



---

## Creación de un Modelo Matemático para Perfeccionar la Dinámica de los Barcos, en la Industria Naval, en el 2023

### Creation of a Mathematical Model to Improve the Dynamics of Ships, in the Naval Industry, in 2023

**Jorge Antonio Villarreal Cisneros**

Universidad de Panamá. Facultad de Ingeniería. Panamá.

[jorge.villarreal12901@gmail.com](mailto:jorge.villarreal12901@gmail.com)

<https://orcid.org/0009-0004-8104-6111>

Recibido: 8/8/2023 Aceptado: 18/10/2023



DOI <https://doi.org/10.48204/reict.v3n2.4676>

#### RESUMEN

La dinámica que presenta los barcos se perfeccionó, por medio de la mecánica analítica, el cual determina la naturaleza real de los navíos. El objetivo de este proyecto de investigación es construir un modelo de barco mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange y no por el método clásico de Newton. La importancia de construir un modelo de barco basado en estas ecuaciones, es que permite tener un barco más resistente a las perturbaciones.

La intención de proponer este modelo matemático permitirá entender, no solo la mecánica del barco, sino también establecer su eficiencia. La metodología empleada es de enfoque cuantitativo, con un nivel de investigación aplicativo, debido a que se construyó un modelo matemático del barco basado en el principio de mínima acción de Hamilton para obtener las

ecuaciones de movimiento. Además, se empleó el software Matlab para simular la cinemática y dinámica del barco diseñado a partir del modelo matemático empleado. El resultado que se obtuvo demuestra que el modelo matemático utilizado es adecuado para comprender la cinemática y dinámica de los barcos.

**PALABRAS CLAVES:** Mecánica analítica, ecuaciones de Euler-Lagrange, modelo matemático, perturbaciones, principio de mínima acción de Hamilton.

## **ABSTRACT**

The dynamics presented by the ships were perfected through analytical mechanics, which determines the real nature of the ships. The objective of this research project is to build a ship model using the Euler-Lagrange equations and not by the classical Newton method. The importance of building a ship model based on these equations is that it allows us to have a ship that is more resistant to disturbances.

The intention of proposing this mathematical model will allow us to understand not only the mechanics of the ship, but also to establish its efficiency. The methodology used is a quantitative approach, with an applicative level of research, because a mathematical model of the ship was built based on Hamilton's principle of least action to obtain the equations of motion. In addition, Matlab software was used to simulate the kinematics and dynamics of the ship designed based on the mathematical model used. The result obtained demonstrates that the mathematical model used is adequate to understand the kinematics and dynamics of ships.

**KEYWORDS:** Analytical mechanics, Euler-Lagrange equations, mathematical model, perturbations, Hamilton's principle of least action.

## **INTRODUCCIÓN**

La presente investigación consiste en construir un modelo matemático para perfeccionar la dinámica de los barcos y se construye mediante el uso de la mecánica analítica. La cual, absorbe los conocimientos establecidos por Newton a través de los formalismos matemáticos, el cual ayudó al desarrollo de otros campos de la física". (Janses, 2006).

El formalismo que se utilizara para encontrar el modelo matemático del barco es el formalismo lagrangiano, el mismo fue desarrollado por Joseph Louis Lagrange (citado en Camacho, 2020), con la intención de mejorar aquellas desventajas que presentaba la mecánica newtoniana como:

Involucra fuerzas desconocidas a priori, como las tensiones y reacciones. Adicionalmente, las ecuaciones que involucra son vectoriales en su mayoría. Esto hace que se suele trabajar en coordenadas cartesianas, por ser la base ortonormal más intuitiva, aunque no por ello es siempre la opción que más facilita los cálculos. Depende del sistema de coordenadas escogido (Camacho, 2020).

La razón principal de emplear el lagrangiano es descubrir las ecuaciones de movimiento, también conocidas como ecuaciones de Euler-Lagrange. Estas ecuaciones posibilitan la obtención de soluciones analíticas para el sistema al aplicar las leyes de conservación. (Landau & Lifshitz, 1994). Estas leyes describen la continuidad de ciertas cantidades físicas a lo largo del tiempo, en un sistema cerrado (Goldstein,2018).

Para construir y diseñar barcos es necesario encontrar un modelo matemático adecuado y que a la vez sea robusto a las perturbaciones internas y externas que tengan los barcos, las cuales pueden afectar su operatividad. Por tal motivo, Se requiere la creación de un modelo matemático que represente de manera precisa la interacción física del barco, detallando su dinámica. En caso de que el modelo matemático del sistema no sea preciso o carezca de robustez (resistencia a perturbaciones externas), pueden surgir incertidumbres en el sistema. (Chaves, 2005).

Para comenzar el modelado lagrangiano es necesario conocer el vector posición del barco, el cual nos ayudara a obtener: la descripción del movimiento, la velocidad, la aceleración, la dinámica del barco y el análisis de su trayectoria (Landau & Lifshitz, 1994).

Los frutos de esta investigación se destinan a aquellos entusiastas de la tecnología interesados en desarrollar modelos matemáticos para posteriormente desarrollar mejores dispositivos, con la intención de mejorar su eficiencia. Adicionalmente, debemos entender que los barcos a escala global liberan mucho dióxido de carbono, generando el cambio climático y la acidificación de los océanos (Oceana ,2018). También, hay otros agentes contaminantes, como el óxido de nitrógeno, óxido nitroso, entre otros. Una propuesta para abordar esto es disminuir la

velocidad de las embarcaciones. No obstante, esta medida conllevaría a un aumento en el costo del petróleo, impactando negativamente la economía del transporte a nivel global.

Adicionalmente, los barcos marítimos han desempeñado un papel crucial en el comercio global al transportar mercancías por el mar, y este papel sigue creciendo debido al aumento de la actividad económica a nivel mundial. No obstante, las emisiones de gases de efecto invernadero provenientes de estos buques han tenido un impacto significativo en nuestro clima. Según el Banco Mundial, un gran buque de transporte marítimo produce la misma cantidad de azufre que 50 millones de automóviles (ONU,2019).

Por este motivo es importante reducir las emisiones contaminantes de los buques marítimos, para que no ocurra un aumento en la temperatura, la cual afectaría el aumento de las oleadas marítimas, el cual generaría caos a ciertas regiones del mundo, especialmente, aquellas que están cerca del mar y modificando nuestro clima a nivel mundial, por ende, es de gran interés buscar mecanismo, que nos ayuden a resolver dicha problemática (ONU,2019).

Otras complicaciones que enfrentan las embarcaciones marítimas están relacionadas con las rutas marítimas. Un ejemplo de esto tuvo lugar en Egipto, donde 420 barcos quedaron varados en una larga fila, a la espera de pasar por el canal marítimo. Miles de otros barcos tuvieron que desviarse para completar su travesía de Occidente a Oriente. Según la agencia de inteligencia marítima Lloyd's List, la interrupción del tráfico en esa región, por donde transita el 10% de las mercancías mundiales, resultó en una pérdida económica de 400 millones de dólares por cada hora de paralización (Green4t, 2022).

El proceso de desagüe en los buques marítimos es altamente complejo y conlleva riesgos para la seguridad y el medio ambiente. Esto se atribuye a la falta de capacitación de los trabajadores, la ausencia de equipo de protección, controles de seguridad inadecuados y una supervisión deficiente. La flota mundial de buques consta de alrededor de 90,000 embarcaciones, y su vida útil típica oscila entre 20 y 25 años. Cada año, cada buque realiza aproximadamente entre 3000 desagües, y se estima que el 90% de estos desagües ocurren en países como Bangladesh, China, India, Pakistán y Turquía (OIT,2015). Además, La descarga de sustancias cancerígenas y tóxicas provenientes de los buques tiene consecuencias significativas cuando se vierte en el suelo y en las aguas costeras. Esto afecta a las comunidades locales, la pesca, la agricultura, la flora, la fauna y la salud humana. Es destacable que los astilleros carecen de un sistema de gestión de residuos para prevenir la contaminación, según la Organización Internacional del Trabajo (OIT,2015).

En Latinoamérica, los buques tienen retraso en el transporte y existe una congestión de buque, en los puertos. Además, el estatus de contenedores volcados es muy alto (Juares, 2022).

A nivel nacional, la economía de Panamá se debe mayormente al canal de Panamá. Este ha progresado, debido al transporte marítimo y que su peaje, depende del tamaño del buque. Adicionalmente, la creación del tercer juego de esclusa, permitió la entrada de los barcos Post-Panamax (Campuzano, 2021).

La hipótesis de nuestra investigación indica, que a través del modelo matemático se puede perfeccionar la dinámica de los barcos, en la industria naviera, 2023.

## MÉTODOS Y MATERIALES

El método de investigación que utilizamos es de enfoque cuantitativo, con un nivel de investigación predictivo, en la cual se aplicó la mecánica analítica para obtener el modelo matemático del barco.

Los barcos son vehículos marítimos, que tiene la capacidad de flotar y moverse en el agua (Pérez Porto, 2016). Sin embargo, este vehículo tiene ciertos riesgos. Como el de remolcar otros barcos, el cargamento de sustancia peligrosas, el fallo del motor (Mantilla, Camargo Ariza, & Almanza solis, 2021). Adicionalmente, puede sufrir perturbaciones por parte del oleaje, el cual puede generar daños al barco y la dependencia climática. No obstante, los barcos se han transformado, en el medio más idóneo para transportar mercancía de un lugar a otro. “Sin el sector marítimo, no sería posible la importación y exportación de mercancías en el mundo. La expansión del transporte marítimo se traduce en beneficios para los consumidores de todo el mundo a través del bajo costo de los fletes” (OMI, 2015).

El barco describe seis grados de libertad. Pero nosotros solo consideramos tres, debido a que los otros tres permanecen invariantes. Las coordenadas que tomaremos, en cuenta para realizar nuestro estudio son  $x$ ,  $y$  e  $\psi$  (Sørensen, 2021). Los grados de libertad del barco son:

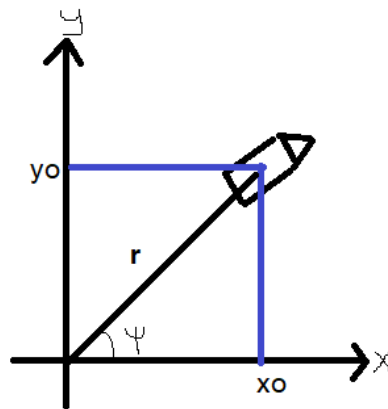
1. **Movimiento longitudinal (surco):** El barco puede avanzar (acelerar) o retroceder (desacelerar).
2. **Movimiento lateral (balanceo):** Se refiere al movimiento de balanceo de un lado a otro.

3. **Movimiento vertical (cabeceo):** Relativo al movimiento hacia arriba o hacia abajo de la proa y la popa.
4. **Movimiento de guiñada (girar sobre el eje vertical):** Rotación alrededor del eje vertical del barco.
5. **Movimiento de arfada (girar sobre el eje longitudinal):** Rotación alrededor del eje que va de la proa a la popa.
6. **Movimiento de balance (girar sobre el eje lateral):** Rotación alrededor del eje que va de un lado a otro.

Para encontrar el modelo matemático del buque marítimo. Se debe describir el comportamiento del buque (ver figura1). Esto nos permitirá encontrar el vector posición del buque marítimo.

**Figura 1.**

*Descripción geométrica del buque marítimo*



Nota. El gráfico representa la descripción geométrica del buque marítimo, en la cual se pueden visualizar sus parámetros.

El vector posición es un vector, que va del origen hasta donde se encuentra la partícula, en nuestro caso el barco será la partícula material. El vector posición del buque marítimo, se puede expresar matemáticamente de la siguiente manera:

$$\vec{r} = r \cos \psi \hat{x} + r \sin \psi \hat{y} \quad (2.1)$$

Dónde:

$\vec{r}$  , representa el vector posición del barco

r, es el módulo del vector posición

$\psi$ , Es el ángulo

En la ecuación (2.1) nos indica que el vector posición depende de r y  $\psi$ . Ahora, vamos a diferenciar el vector posición para determinar la velocidad del vector posición.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{r} \cos \psi - r\dot{\psi} \sin \psi)\hat{x} + (\dot{r} \sin \psi + r\dot{\psi} \cos \psi)\hat{y} \quad (2.2)$$

Donde

$\frac{d\vec{r}}{dt}$  , es la velocidad del buque

$\dot{r}$  , es la velocidad del buque cuando se mueve hacia adelante

$\dot{\psi}$  , es la velocidad angular del buque

La velocidad del buque marítimo depende de  $\dot{r}$  , r,  $\psi$ ,  $\dot{\psi}$ . Conociendo la velocidad podemos encontrar la rapidez cuadrática mediante el producto escalar. Este producto lo que hace es operar dos vectores y llevarlo a la misma dimensión, es decir, obtener una operación escalar. Veamos el procedimiento matemático.

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 \quad (2.3)$$

$$v^2 = [(\dot{r} \cos \psi - r\dot{\psi} \sin \psi)\hat{x} + (\dot{r} \sin \psi + r\dot{\psi} \cos \psi)\hat{y}] \cdot [(\dot{r} \cos \psi - r\dot{\psi} \sin \psi)\hat{x} + (\dot{r} \sin \psi + r\dot{\psi} \cos \psi)\hat{y}]$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 \quad (2.4)$$

El resultado de la ecuación (2,4) podemos obtener el Lagrangiano del sistema. “El lagrangiano se define como una función escalar, de donde se pueden captar las leyes de la conservación, la evolución temporal y otras características primordiales de un sistema dinámico y es el operador fundamental de la física” [1]. Pero para obtener la ecuación del lagrangiano, debemos

determinar la energía cinética y la energía potencia. La energía cinética del barco lo podemos definir de esta manera:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.5)$$

Sustituyo la ecuación (2.4) a la ecuación (2.5), entonces la energía cinética se puede expresar de la siguiente manera:

$$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2) \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) expresa la energía cinética del buque marítimo, ahora vamos a encontrar la energía potencial del buque marítimo.

$$U = mgh \quad (2.7)$$

La energía potencia depende de h, el cual lo definimos como la altura, en la coordenada del y. La energía potencial la podemos definir de la siguiente manera:

$$U = mgr \sin \psi \quad (2.8)$$

Luego, la energía cinética se le resta la energía potencial y de esta manera obtenemos el lagrangiano del buque, el cual se puede expresar así:

$$L = E_c - U \quad (2.9)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2) - mgr \sin \psi$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\psi}^2 - mgr \sin \psi \quad (2.10)$$

La importancia del conocer el lagrangiano, es que nos permite determinar las ecuaciones de movimiento del buque marítimo. Donde las variables son r y  $\psi$ . Al tener dos variables implica, que tendremos dos ecuaciones de movimiento. Las ecuaciones de movimiento o ecuaciones de Euler-Lagrange, son más generales que las segundas leyes de Newton, debido a que son aplicables



a cualquier conjunto de coordenadas generalizada y permite descubrir la geometría que presenta el sistema dinámico [2].

Las ecuaciones de movimiento se pueden expresar, de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) representa la ecuación de movimiento, en donde  $q$  es la coordenada generalizada y  $\dot{q}$  es la velocidad generalizada. En donde tenemos dos coordenadas generalizada la cual son  $r$  y  $\psi$  y las velocidades generalizadas son  $\dot{q}$  y  $\dot{\psi}$ . Ahora, buscaremos la primera ecuación de movimiento con la variable  $r$ . El cual se puede expresar de esta manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = Q_1 \quad (2.12)$$

Resolviendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\psi}^2 - m g r \sin \psi \right) \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\psi}^2 - m g r \sin \psi \right) = Q_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \dot{r}) - m r \dot{\psi}^2 - m g \sin \psi = Q_1$$

$$m \ddot{r} - m r \dot{\psi}^2 - m g \sin \psi = Q_1 \quad (2.13)$$

Donde  $Q_1$  representa la fuerza generalizada del sistema y se interpreta como una fuerza, que afecta el movimiento del buque marítimo, en la cual representaremos de manera matemática de la siguiente manera:

$$Q_1 = F_1 \quad (2.14)$$

$$Q_1 = \frac{\tau_1}{r \sin \psi} \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) la sustituimos a la ecuación (2.13). La ecuación del movimiento del buque, queda expresada de esta manera:

$$m \ddot{r} - m r \dot{\psi}^2 - m g \sin \psi = \frac{\tau_1}{r \sin \psi} \quad (2.16)$$

También, se puede expresar de esta forma:

$$mr \sin \psi \ddot{r} - mr^2 \sin \psi \dot{\psi}^2 - mgr (\sin \psi)^2 = \tau_1 \quad (2.17)$$

Después, de haber obtenido la primera ecuación de movimiento, procederemos a calcular la segunda ecuación de movimiento con la variable  $\psi$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = Q_2 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\psi}^2 - mgr \sin \psi \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\psi}^2 - mgr \sin \psi \right) = Q_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m r^2 \dot{\psi}) - mgr \cos \psi = Q_2$$

$$2m \dot{r} \dot{\psi} + m r^2 \ddot{\psi} - mgr \cos \psi = Q_2 \quad (2.19)$$

Donde  $Q_2$  es la fuerza generalizada del ángulo, el cual se puede expresar de esta manera:

$$Q_2 = F_2 \quad (2.20)$$

$$Q_2 = \frac{\tau_2}{r \sin \psi} \quad (2.21)$$

Ahora, sustituimos la ecuación (2.21) a la ecuación (2.19) y obtenemos, el siguiente resultado:

$$2m \dot{r} \dot{\psi} + m r^2 \ddot{\psi} - mgr \cos \psi = \frac{\tau_2}{r \sin \psi} \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) se puede expresar de la siguiente manera:

$$m r^3 \ddot{\psi} \sin \psi + 2m \dot{r} \dot{\psi} \sin \psi - mgr^2 \cos \psi \sin \psi = \tau_2 \quad (2.23)$$

La ecuación (2.17) y la (2.23) representan las ecuaciones del movimiento del buque marítimo. De esas ecuaciones nos interesa saber las aceleraciones. Primero, buscaremos  $\ddot{r}$

$$\ddot{r} = \frac{\tau_1 + mgr (\sin \psi)^2 + mr^2 \dot{\psi}^2 \sin \psi}{mr \sin \psi}$$

$$\ddot{r} = g \sin \psi + r \dot{\psi}^2 + \frac{\tau_1}{mr \sin \psi} \quad (2.24)$$

Ahora, buscaremos la aceleración angular del sistema.

$$\ddot{\psi} = \frac{\tau_2 + mgr^2 \cos \psi \sin \psi - 2mr\dot{r}\dot{\psi} \sin \psi}{mr^3 \sin \psi}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{gr \cos \psi - 2\dot{r}\dot{\psi}}{r^2} + \frac{\tau_2}{mr^3 \sin \psi} \quad (2.25)$$

Es importante bajarle el orden a la ecuaciones, para eso aplicamos el concepto de variable de estado.” Las Variables de Estado son variables internas del sistema, cuyo conocimiento para todo tiempo, junto con el conocimiento de las entradas, permite computar cualquier otra variable del sistema” [3].

Las variables de estado la podemos, expresar por medio de la coordenada generalizada y la definimos de la siguiente manera:

$$q_1 = r$$

$$q_2 = \psi$$

$$q_3 = \dot{r}$$

$$q_4 = \dot{\psi}$$

Diferenciamos, las coordenadas generalizadas y quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\dot{q}_1 = \dot{r} = q_3$$

$$\dot{q}_2 = \dot{\psi} = q_4$$

$$\dot{q}_3 = \ddot{r}$$

$$\dot{q}_4 = \ddot{\psi}$$

Usamos la ecuación (2.24) para tener  $\dot{q}_3$  en función de las coordenadas generalizadas y queda reflejado de la siguiente forma:

$$\dot{q}_3 = g \sin q_2 + q_1 q_4^2 + \frac{\tau_1}{m q_1 \sin q_2} \quad (2.26)$$

Ahora, utilizamos la ecuación (2.2) para tener  $\dot{q}_4$  en función de las coordenadas generalizadas y queda así:

$$\dot{q}_4 = \frac{g q_1 \cos q_2 - 2 q_3 q_4}{q_1^2} + \frac{\tau_2}{m q_1^3 \sin q_2} \quad (2.27)$$

Con los resultados, obtenidos podemos expresar el modelo matemático del buque marítimo, en función de sus variables de estado de manera vectorial, el cual escribimos del siguiente modo:

$$\dot{q}_n = f(x) + g(x)u \quad (2.28)$$

Y nos queda así:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ \frac{g \sin q_2 + q_1 q_4^2}{q_1^2} \\ \frac{g q_1 \cos q_2 - 2 q_3 q_4}{q_1^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m q_1 \sin q_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m q_1^3 \sin q_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Dónde:

$$f(x) = \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ \frac{g \sin q_2 + q_1 q_4^2}{q_1^2} \\ \frac{g q_1 \cos q_2 - 2 q_3 q_4}{q_1^2} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{mq_1 \sin q_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{mq_1^3 \sin q_2} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

El barco que utilizaremos tiene una masa de 25,0 kg. Adicionalmente, las condiciones iniciales del barco son:

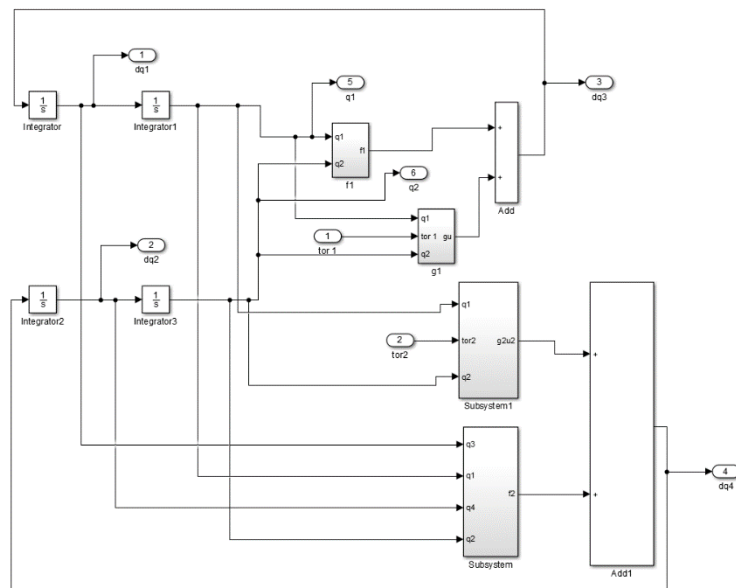
$$r(0) = 0 \text{ y } v(0) = 0$$

## Resultado y Análisis

La programación nos quedó de esta manera (ver figura 2):

### Figura 2.

*Programación en bloque del modelo matemático del barco*

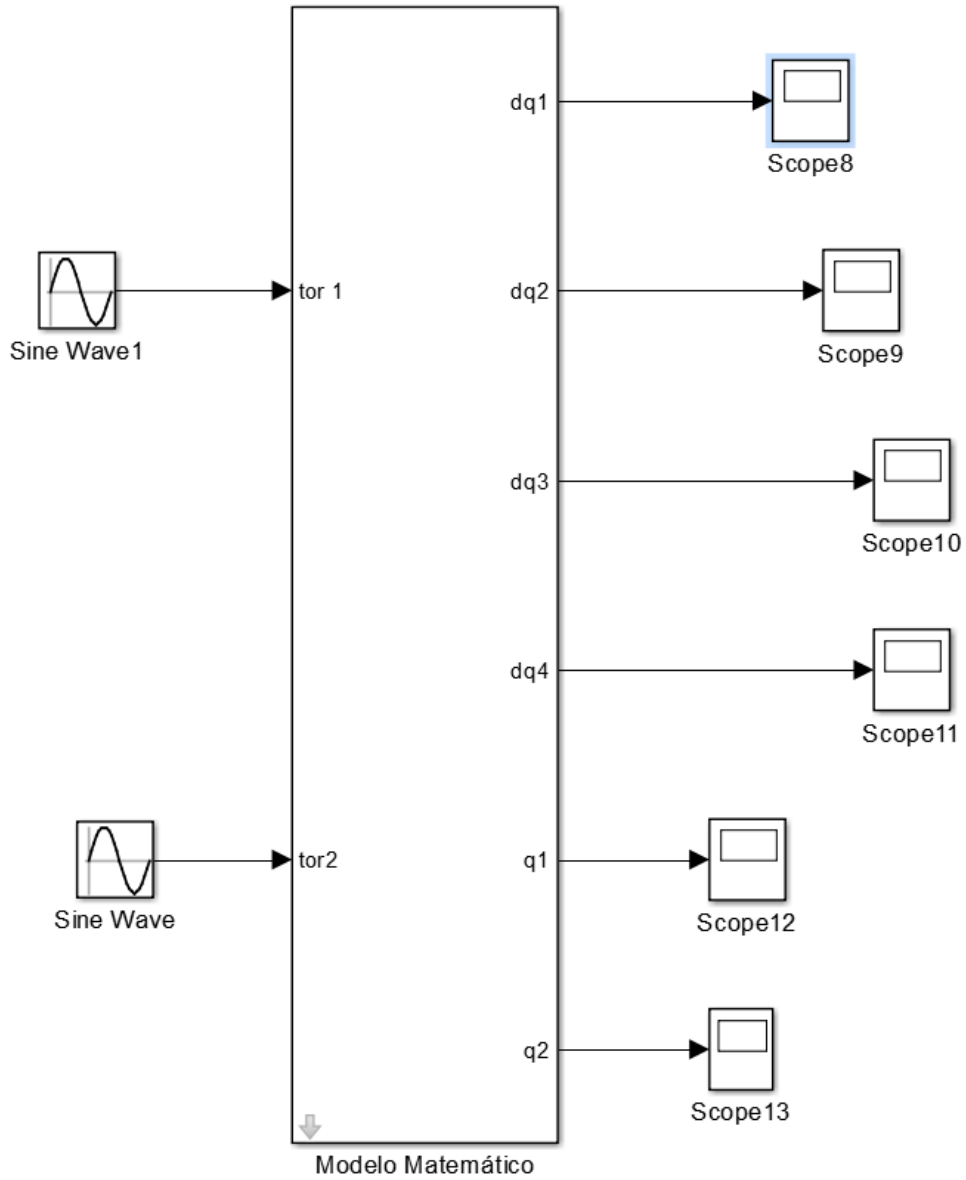


Nota. En la Figura 2, se puede visualizar la programación en bloque del modelo matemático del barco.

Ahora le introduciremos dos señales senoidales al modelo matemático y podemos ver el bloque del modelo matemático (ver figura 3).

**Figura 3.**

*Subsistema del modelo matemático del bloque*

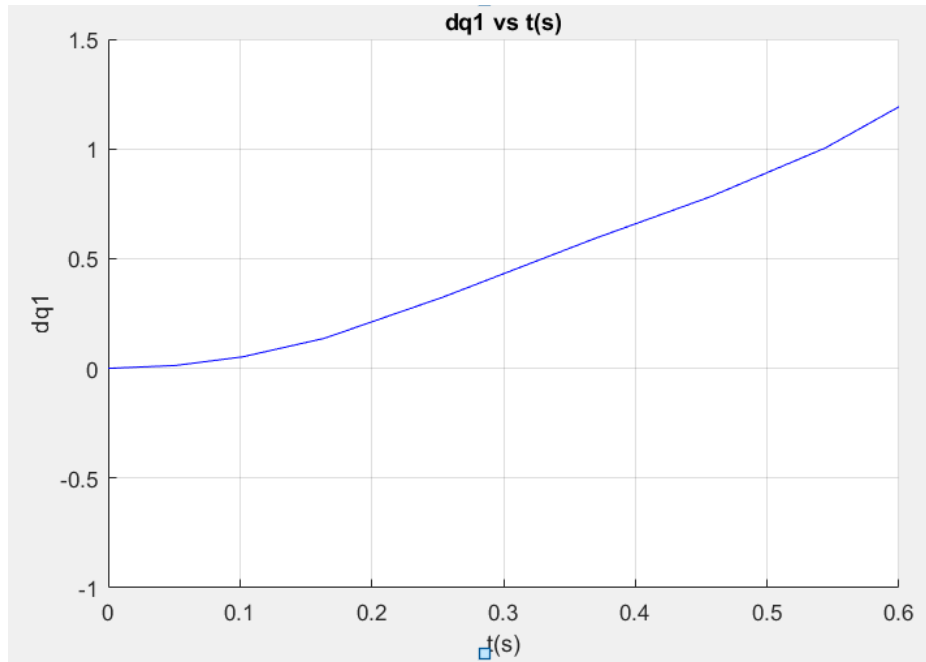


Nota. En ese bloque se contiene todo el modelo matemático del barco. Las señales de entradas, que elegimos fueron las entradas senoidales, debido a que el barco está en constante movimiento vibratorio.

Ahora, veremos el comportamiento de  $\dot{q}_1$  (ver figura 4).

**Figura 4.**

$\dot{q}_1$  vs  $t(s)$



Nota. En esta gráfica se puede observar el comportamiento de la velocidad de la coordenada generalizada 1 y que está creciendo de manera potencial, hasta que diverge.

Los resultados estadísticos que arrojas son estos (figura 5):

**Figura 5.**

*Estadística de la velocidad de la coordenada generalizada 1*

Signal Statistics		
	Value	Time
Max	1.932e+263	25.034
Min	5.358e+71	0.025
Peak to Peak	1.932e+263	
Mean	9.387e+260	
Median	4.691e+167	
RMS	Inf	

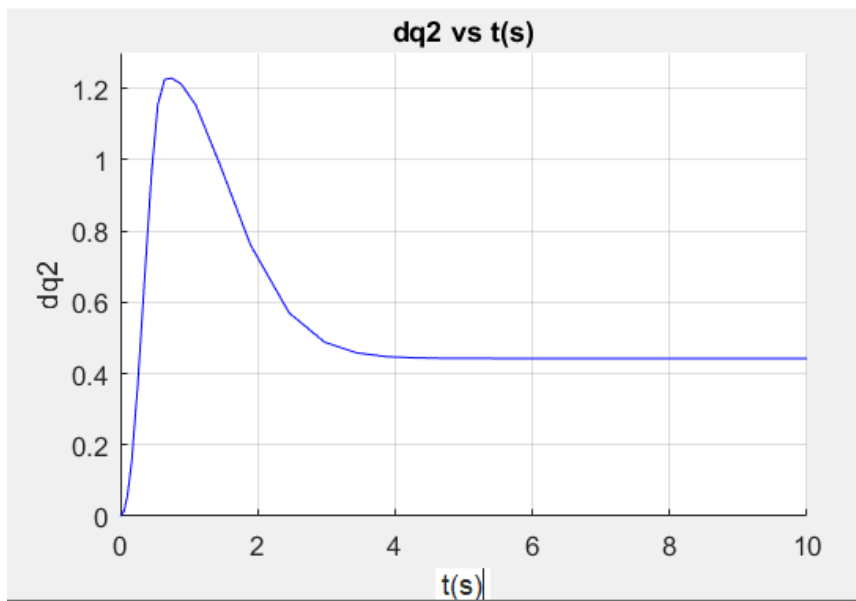
Nota. En la Figura 5, podemos ver los valores estadístico, como el valor máximo de la velocidad de la coordenadas generalizada 1, el valor máximo del tiempo , el valor mínimo de la velocidad

de la coordenada 1, el valor mínimo del tiempo, el valor pico a pico de la velocidad de la coordenada generalizada 1, el promedio de la velocidad de la coordenada generalizada 1, el promedio de la velocidad generalizada 1, la mediana de la velocidad de la coordenada generalizada 1 y la velocidad cuadrática media tiende al infinito.

Ahora, analizaremos  $\dot{q}_2$  (ver Figura 6).

**Figura 6.**

$\dot{q}_2$  vs t



Nota. Esta es la gráfica de la velocidad del ángulo y podemos observar que esta sube a 1,23 rad/s y cuando llega a los 4 segundos la gráfica se estabiliza. Los resultados estadísticos se pueden ver en la siguiente gráfica.

Los resultados estadísticos que arrojas son estos (figura 7):



### Figura 7.

Estadística de la velocidad de la coordenada generalizada 1

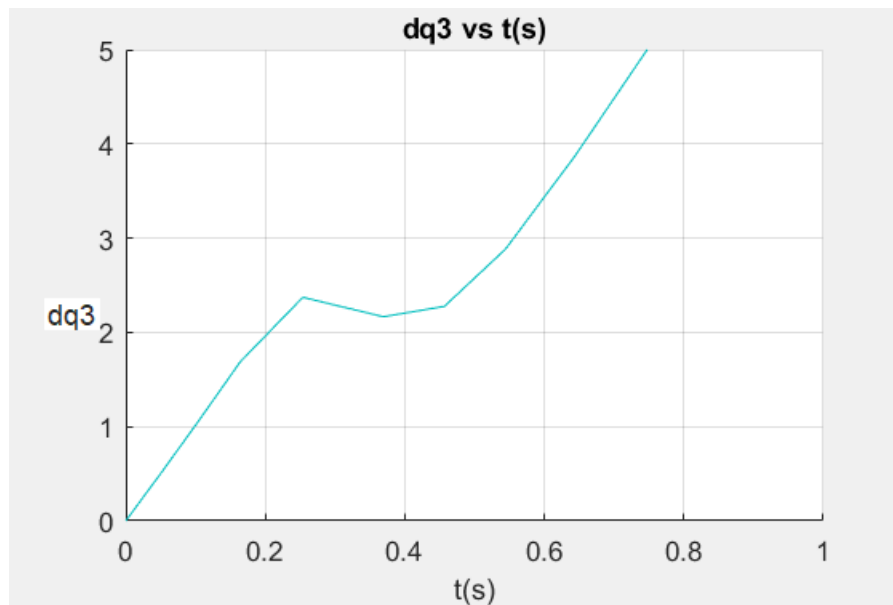
	Value	Time
Max	1.932e+263	50.000
Min	0.000e+00	0.000e+00
Peak to Peak	1.932e+263	
Mean	6.713e+260	
Median	2.672e+129	
RMS	Inf	

Nota. En la figura 7, podemos ver los valores estadístico, como el valor máximo de la velocidad de la coordenadas generalizada 2, el valor máximo del tiempo , el valor mínimo de la velocidad de la coordenada 2, el valor mínimo del tiempo, el valor pico a pico de la velocidad de la coordenada generalizada 2, el promedio de la velocidad de la coordenada generalizada 2, el promedio de la velocidad generalizada 2, la mediana de la velocidad de la coordenada generalizada 2 y la velocidad cuadrática media tiende al infinito.

Ahora, analizaremos  $\dot{q}_3$  (ver Figura 8).

### Figura 8.

$\dot{q}_3$  vs t



*Nota.* Esta es la Figura de la velocidad de la coordenada generalizada 3 y podemos observar que está creciendo de manera potencial y tiene un pequeño desdoblamiento y luego vuelve a crecer hasta que diverge.

Los resultados estadísticos se pueden ver en la figura 9

**Figura 9.**

*Estadística de la velocidad de la coordenada generalizada 3*

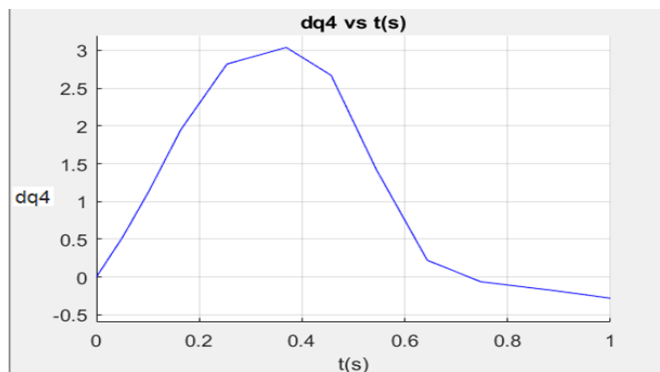
	Value	Time
Max	4.475e+264	50.000
Min	0.000e+00	0.000e+00
Peak to Peak	4.475e+264	
Mean	1.554e+262	
Median	4.344e+130	
RMS	Inf	

*Nota.* En la Figura 9, podemos ver los valores estadístico, como el valor máximo de la velocidad de la coordenadas generalizada 3, el valor máximo del tiempo , el valor mínimo de la velocidad de la coordenada generalizada 3, el valor mínimo del tiempo, el valor pico a pico de la velocidad de la coordenada generalizada 3, el promedio de la velocidad de la coordenada generalizada 3, el promedio de la velocidad generalizada 3, la mediana de la velocidad de la coordenada generalizada 3 y la velocidad cuadrática media tiende al infinito.

Ahora, analizaremos  $\dot{q}_2$  (ver figura10).

**Figura 10.**

*Gráfica de  $\dot{q}_4$  vs  $t$*

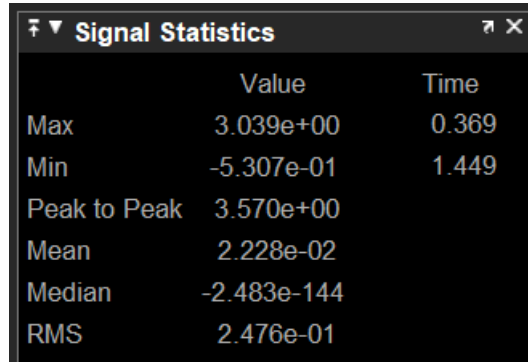


*Nota.* Esta es la Figura de la velocidad de la coordenada generalizada 4 y podemos observar que se comporta como una función cuadrática, en cierta región y después se estabiliza.

Los resultados de la Figura 11

**Figura 11.**

*Estadística de la velocidad de la coordenada generalizada 4*



	Value	Time
Max	3.039e+00	0.369
Min	-5.307e-01	1.449
Peak to Peak	3.570e+00	
Mean	2.228e-02	
Median	-2.483e-144	
RMS	2.476e-01	

*Nota.* En la Figura 11, podemos ver los valores estadístico, como el valor máximo de la velocidad de la coordenadas generalizada 4, el valor máximo del tiempo , el valor mínimo de la velocidad de la coordenada generalizada 4, el valor mínimo del tiempo, el valor pico a pico de la velocidad de la coordenada generalizada 4, el promedio de la velocidad de la coordenada generalizada 4, el promedio de la velocidad generalizada 4, la mediana de la velocidad de la coordenada generalizada 4 y la velocidad cuadrática media tiende al infinito.

**CONCLUSIONES**

En conclusión, el modelado de un barco basado en las ecuaciones de movimiento nos determina el comportamiento, que tiene el barco en los océanos. El modelo utilizado describe con precisión las interacciones entre el barco, las fuerzas externas y el medio acuático. Este modelo matemático, nos permitió entender el rendimiento y la estabilidad del barco.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bert Janses. (2006). *Mecánica Analítica*. Junio. <https://www.ugr.es/~bjanssen/text/mecanica.pdf>
- Chaves, J., Aarón, V., Calvo, P., Miguel, J., & Solórzano, S. (2005). *Sistemas de Control MONOGRAFIA Aplicaciones de Control en Barcos* [Universidad de Costa Rica]. <http://isa.uniovi.es>
- Camacho, A. G. (2020). *Introducción a la Mecánica analítica* [Universidad de Sevilla]. <https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/115222/TFG%20DGMye%20Guti%C3%A9rez%20Camacho%2C%20Adri%C3%A1n.pdf?>
- Campuzano, J. (marzo de 2021). Estudio del Tráfico Marítimo del Canal de Panamá; Antes y Después de la Última Ampliación (2006-2016). Barcelona, Barcelona, España.
- Do, K. D. (2009). *Control of Ships and Underwater Vehicles*. London: Springe.
- Goicolea, J. (2010). *Grupo de Mecánica computacional*. Obtenido de <http://www.mecanica.upm.es>
- Goldstein, H. (2018). *Mecánica clásica*. Reverté.
- Green4t. (13 de mayo de 2022). *Green4t*. Obtenido de <https://www.green4t.com/>
- Juares, C. (2 de marzo de 2022). *the logist world*. Obtenido de <https://thelogisticsworld.com>
- Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems*. Michigan. Estados Unidos: Prentice Hall.
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1994). Curso de Física Teórica: Mecánica (2a. Ed., Vol. 1). Barcelona: Reverté.
- Larios, G. (2020). *Es perezosa la naturaleza/Principio de mínima acción*. España.
- Mantilla, M. C., Camargo Ariza, L. L., & Almanza solis, J. G. (2021). Identificación de riesgos en barcos remolcadores mediante el análisis de efecto y modo de falla. *Mundo Fesc*, 163.
- Oceana. (2008). <https://europe.oceana.org/>.
- OIT. (23 de MARZO de 2015). *OIT*. Obtenido de <https://www.ilo.org/>
- Pérez Porto, J. M. (3 de marzo de 2016). *Definicion.de*. Obtenido de <https://definicion.de/barco/>
- Sørensen, M. E. (diciembre de 2021). Topics in Nonlinear and Model-based Control of Ships. *Thesis for the degree of Philosophiae Doctor*. Noruega: Norwegian University of Science and Technology
- Varela, J., & Solozarno, A. (2005). *Aplicaciones de control de Barco*. Obtenido de [http://isa.uniovi.es/docencia/ra\\_marina/apli\\_control\\_barcos.pdf](http://isa.uniovi.es/docencia/ra_marina/apli_control_barcos.pdf)
- OMI. (20 de noviembre de 2015). *OMI*. Obtenido de <https://www.imo.org/>