

Análisis integral del Cuerno de Gabriel y la paradoja del infinito en los sólidos de revolución

Integral analysis of Gabriel's Horn and the paradox of infinity in solids of revolution

Lorenzo Caballero Vigil¹, Reyna I. Jaramillo H.²

¹Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología, Escuela de Matemática, Panamá; lorenzo.caballero@up.ac.pa; <https://orcid.org/0000-0003-0758-7038>

²Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología, Escuela de Matemática, Panamá; reyna.jaramillo@up.ac.pa; <https://orcid.org/0000-0002-4096-5830>

Fecha de recepción: 08-02-2026

Fecha de aceptación: 12-05-2026

DOI: <https://doi.org/10.48204/j.vian.v10n1.a10167>

Resumen: El Cuerno de Gabriel, también conocido como trompeta de Torricelli, es un sólido tridimensional que surge al girar la curva $y = \frac{1}{x}$ para $x \geq 1$, alrededor del eje x . Aunque se extiende indefinidamente, encierra un volumen limitado de π unidades cúbicas, pero posee una superficie sin límite, lo cual plantea una paradoja matemática. Esta figura, estudiada desde el siglo XVII, pone en cuestión la comprensión intuitiva del infinito. El análisis se centra en la formulación teórica del sólido, abordando su estructura mediante herramientas del cálculo, particularmente integrales sobre dominios infinitos. Además, se extiende el estudio a funciones de la forma $\frac{1}{x^p}$, revelando cómo pequeñas variaciones en el exponente modifican el comportamiento geométrico. Finalmente, se reflexiona sobre las implicaciones filosóficas del modelo, subrayando la distancia entre lo que la lógica matemática permite y lo que la experiencia física puede concebir.

Palabras clave: geometría, análisis matemático, lógica matemática, teoría científica, teoremas.

Abstract: Gabriel's Horn, also known as Torricelli's trumpet, is a three-dimensional solid that arises when the curve $y = \frac{1}{x}$ for $x \geq 1$ is rotated around the x -axis. Although it extends indefinitely, it encloses a limited volume of π cubic units, but has an unlimited surface area, which poses a mathematical paradox. This figure, studied since the 17th century, challenges the intuitive understanding of infinity. The analysis focuses on the theoretical formulation of the solid, addressing its structure using calculus tools, particularly integrals over infinite domains. In addition, the study is extended to functions of the form $\frac{1}{x^p}$, revealing how small variations in the exponent modify the geometric behavior. Finally, it reflects on the philosophical implications of the model, highlighting the gap between what mathematical logic allows and what physical experience can conceive.

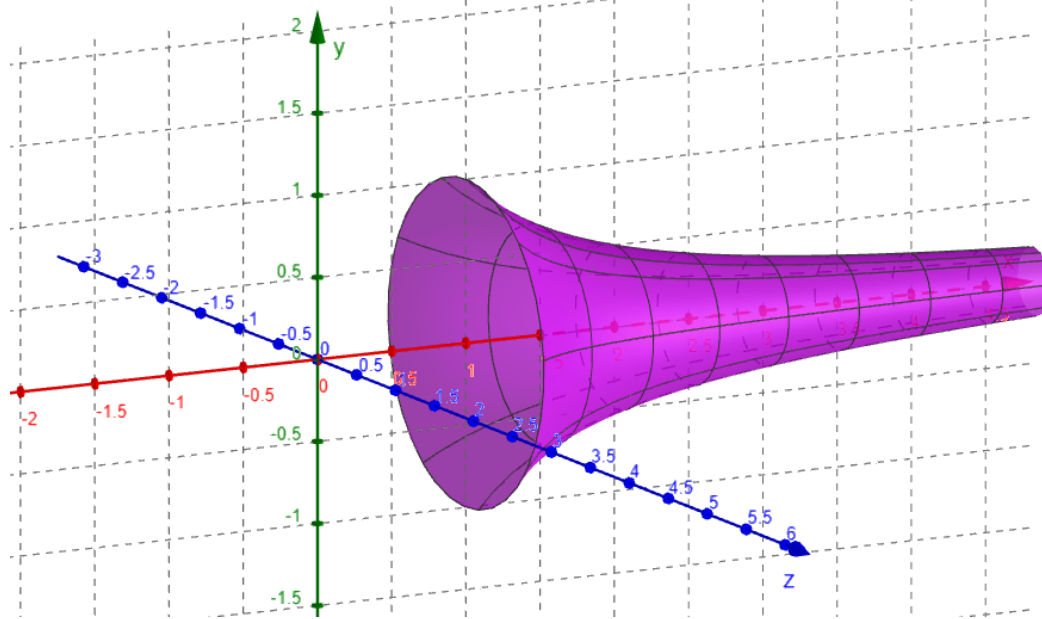
Keywords: geometry, mathematical analysis, mathematical logic, scientific theory, theorems.

1. Introducción

La paradoja del Cuerno de Gabriel, también conocida como la trompeta de Torricelli, trompeta de Gabriel, Cuerno de Torricelli o el Cuerno de Gabriel es una figura geométrica

que desafía nuestras intuiciones sobre el infinito (Campo, 2013; Kindt, 2005; Ruiz y Arroyo, 2017). Esta figura se genera al rotar la curva $y = \frac{1}{x}$ (para $x \geq 1$) alrededor del eje x (Artigue, 2019; Gordejuela, 2016). El resultado es un sólido tridimensional que se extiende infinitamente hacia el eje x positivo, pero cuya superficie presenta propiedades sorprendentes.

Figura 1
Representación tridimensional de la trompeta de Torricelli



Nota. Representación en el espacio tridimensional (R^3) del Cuerno de Gabriel, también denominada como Trompeta de Torricelli, generado mediante la revolución de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x \geq 1$ alrededor del eje de abscisas x .

A pesar de su extensión infinita, el Cuerno de Gabriel posee dos propiedades aparentemente contradictorias:

Volumen finito: El volumen del sólido se calcula mediante la integral:

$$V = \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi$$

Este resultado indica que el volumen total del sólido es finito y equivale a π unidades cúbicas.

Área superficial infinita: La superficie del sólido tiene un área infinita, determinada por la integral:

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2} dx$$

Este cálculo muestra que el área superficial crece sin límite a medida que x tiende a infinito.

La paradoja fue estudiada por Evangelista Torricelli en el siglo XVII. En su obra *De solido hyperbolico acuto* (1643), Torricelli exploró las propiedades de este sólido, al que denominó: sólido hiperbólico agudo (Gutiérrez, 2009). Su trabajo sentó las bases para el desarrollo del cálculo integral y la teoría de los sólidos de revolución.

Aunque Torricelli fue uno de los primeros en estudiar esta figura, no fue el primero en describir formas infinitamente largas con volumen o área finita. El trabajo de Nicole Oresme en el siglo XIV ya había abordado conceptos similares, de acuerdo con Debroise (2019), Oresme construye geoméricamente, a partir de un cuerpo de volumen finito, un cuerpo de mismo volumen, pero infinitamente extendido en longitud y en anchura, y deduce que una cualidad corporal puede extenderse indefinidamente en longitud y anchura, manteniendo su intensidad de forma uniforme o difusa, pero no de forma uniformemente difusa.

La paradoja conocida como el Cuerno de Gabriel provoca una profunda reflexión sobre el concepto del infinito y su expresión en matemática. Este fenómeno, que presenta un objeto con volumen finito, pero con una superficie infinita, desafía los límites tradicionales de cómo entendemos tanto la matemática como la física.

Este tipo de paradojas subraya cómo el cálculo integral permite construir modelos precisos de objetos que no existen físicamente, pero que son coherentes dentro de la lógica matemática. La paradoja aparece cuando se intentan aplicar conceptos físicos, como cubrir una superficie, a figuras matemáticas abstractas, evidenciando las diferencias entre las matemáticas teóricas y las condiciones del mundo real.

Este ensayo tiene como objetivo explorar en detalle la paradoja del Cuerno de Gabriel, analizando su construcción matemática, el cálculo de su volumen y área superficial, y las implicaciones filosóficas que surgen de su estudio. Se utilizarán herramientas del

cálculo integral para desentrañar las propiedades de este intrigante sólido y se discutirán sus conexiones con conceptos más amplios en matemáticas y filosofía.

Para abordar de manera rigurosa la paradoja asociada al sólido conocido como Cuerno de Gabriel, este estudio se sustenta en una metodología basada en el análisis matemático de funciones continuas y el uso del cálculo integral impropio. La investigación se estructura sobre tres pilares fundamentales: el modelo matemático idealizado, el uso de herramientas analíticas precisas, y el contraste entre propiedades geométricas aparentemente contradictorias. Cada uno de estos ejes permite aproximarse con claridad al comportamiento del sólido desde una perspectiva tanto técnica como conceptual.

Para la construcción de este modelo idealizado, en primer lugar, se establece un modelo teórico abstracto, idealizando el comportamiento geométrico de una figura generada por rotación. A diferencia de los objetos físicos, este tipo de figura no está sujeta a limitaciones materiales, lo cual permite estudiar sus propiedades sin interferencia de restricciones prácticas. En este contexto, se define un sólido de revolución generado por una curva continua, monótonamente decreciente y definida en un dominio no acotado. La metodología no pretende construir el objeto en sí, sino analizar sus propiedades internas bajo condiciones matemáticamente controladas.

Este enfoque idealizado no busca replicar una figura física concreta, sino representar una construcción cuyo comportamiento en el infinito se puede estudiar con las herramientas del análisis. El uso de funciones que tienden a cero, pero que nunca alcanzan ese valor, permite generar estructuras teóricas infinitamente extensas que conservan propiedades localmente integrables. Esta característica es clave para explorar las condiciones que dan lugar a resultados aparentemente paradójicos, como el caso de un volumen finito acompañado de un área superficial infinita.

La paradoja se aborda utilizando técnicas del cálculo integral, en particular integrales impropias definidas en intervalos infinitos. La justificación del uso de estas herramientas responde a la necesidad de analizar funciones que, a pesar de no tener un dominio finito, pueden ser evaluadas de forma coherente bajo ciertas condiciones de convergencia. El volumen y el área superficial del sólido no se calculan mediante aproximaciones empíricas,

sino mediante el desarrollo exacto de expresiones analíticas que permiten comprobar su comportamiento en el límite.

Además, se aplican propiedades de los sólidos de revolución, como el uso del método de los discos y del método de las superficies generadas por rotación, lo cual permite definir con precisión las integrales asociadas a cada una de las magnitudes geométricas del sólido. Se hace énfasis en la interpretación rigurosa de los resultados a través de criterios de convergencia, permitiendo diferenciar entre magnitudes finitas e infinitas de manera formal.

Una vez definido el objeto y establecidas las herramientas, la estrategia analítica consiste en descomponer el problema en dos estudios principales: el cálculo del volumen encerrado por el sólido y el cálculo del área superficial de su contorno. Ambos problemas son tratados de forma independiente, con el fin de evidenciar cómo dos magnitudes aparentemente relacionadas pueden presentar comportamientos asimétricos en presencia de infinitos.

La metodología también contempla una etapa de interpretación crítica. Luego del análisis cuantitativo, se discute el resultado en términos de su coherencia interna y de sus implicaciones filosóficas. Esta fase permite identificar la fuente de la paradoja no en un error lógico, sino en el uso de categorías intuitivas inaplicables a objetos matemáticos abstractos.

2. Desarrollo

El sólido conocido como Cuerno de Gabriel se obtiene al rotar la curva definida por la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \text{ para } x \geq 1$$

alrededor del eje x . Esta curva es continua, positiva y estrictamente decreciente en el intervalo $[1, \infty)$. La elección del dominio $x \geq 1$ garantiza que la función esté bien definida y que la rotación genere una superficie sin discontinuidades. Al realizar la rotación de la

curva $y = \frac{1}{x}$, definida para $x \geq 1$ alrededor del eje x , se genera un sólido tridimensional simétrico. Este cuerpo comienza en el punto $x = 1$, donde tiene su mayor apertura, y se proyecta indefinidamente hacia la derecha. A medida que x crece, el radio de la sección transversal disminuye progresivamente, acercándose a cero sin llegar jamás a alcanzarlo, lo que le otorga al sólido una apariencia de trompeta que se estrecha indefinidamente.

Puede imaginarse como una secuencia continua de discos circulares muy delgados, alineados a lo largo del eje x . El radio de cada uno de estos discos está determinado por el valor de la función en ese punto, es decir, $\frac{1}{x}$. Como consecuencia, el volumen de cada disco depende del cuadrado de este radio, y al sumar todos estos volúmenes infinitesimales se obtiene la medida total del sólido.

Para determinar el volumen total de Cuerno de Gabriel, se utiliza el método de discos, que permite calcular el volumen de un sólido de revolución en torno al eje x . La fórmula general para este caso es:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

sustituyendo $f(x) = \frac{1}{x}$, con $a = 1$ y $b \rightarrow \infty$, se obtiene, como lo describe Silva, (2016). una integral impropia:

$$V = \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Al evaluar esta integral, de acuerdo con Beránek, (2023) se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $V = \pi \cdot 1 = \pi$

Este resultado, aunque matemáticamente riguroso, es profundamente contraintuitivo: el sólido se extiende infinitamente, pero su volumen total es finito y equivale exactamente a π unidades cúbicas. Esta situación solo es posible gracias a la rápida tasa de decrecimiento de la función $\frac{1}{x}$, que compensa la extensión infinita del dominio de integración.

Si bien el volumen resulta ser finito, el análisis del área superficial revela un comportamiento opuesto. A continuación, se demostrará que la superficie del Cuerno de Gabriel crece sin límite, generando la aparente paradoja que da nombre a este sólido.

Para calcular el área superficial del Cuerno de Gabriel se utiliza la fórmula del área de una superficie de revolución en torno al eje x .

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

En este caso, la función es $f(x) = \frac{1}{x}$ definida para $x \geq 1$. Derivando esta función se obtiene que:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Sustituyendo en la fórmula de área, este cálculo se transforma en:

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx$$

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

Aunque la expresión $\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}$ tiende a 1 cuando $x \rightarrow \infty$, no lo hace lo suficientemente rápido como para que la integral converja. Para demostrar la divergencia, podemos acotar la integral por debajo.

Como $\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > 1$, Sancho-Vinuesa y Gras (2011) define que para todo $x \geq 1$ entonces:

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot 1 dx$$

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

Esta última integral es una divergente. Por lo tanto, el área superficial del sólido es infinita.

Este resultado resulta aún más sorprendente que el cálculo del volumen. Mientras que el volumen total del Cuerno de Gabriel es finito, su superficie es infinitamente grande. Desde un punto de vista físico, esto implica que sería posible llenar la figura con una cantidad finita de pintura, pero no sería posible pintar toda su superficie con esa misma cantidad, lo cual desafía nuestra intuición.

La paradoja surge al aplicar conceptos del mundo físico, como rellenar o pintar, a una construcción puramente matemática. En la realidad, ningún objeto puede extenderse infinitamente, pero en el ámbito del análisis matemático, figuras como esta revelan las propiedades sutiles y, a menudo, contraintuitivas del infinito.

- **Generalización del Cuerno de Gabriel: el caso de $f(x) = \frac{1}{x^p}$**

Una forma natural de extender el análisis del Cuerno de Gabriel consiste, de acuerdo con *Matcom Online Grader* (2025), en considerar no solo la función $f(x) = \frac{1}{x}$; sino una familia más general de funciones decrecientes de la forma

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \quad \text{con } p > 0 \text{ y } x \geq 1.$$

Al rotar estas funciones alrededor del eje x , se genera una clase de sólidos infinitamente largos, cuya geometría depende del parámetro p . Este enfoque generalizado permite estudiar cómo el comportamiento de la función influye en la convergencia del

volumen y del área superficial del sólido, revelando condiciones más amplias bajo las cuales surgen paradojas similares a la del Cuerno de Gabriel.

Para realizar el análisis del volumen de la generalización se recurre al método de los discos, tal como lo muestra CK-12 Foundation (2026), el volumen de un sólido de revolución generado por una función $f(x)$ al rotar alrededor del eje x se calcula mediante la fórmula:

$$V = \pi \int_1^{\infty} [f(x)]^2 dx$$

Sustituyendo $f(x) = \frac{1}{x^p}$, se obtiene:

$$V = \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^p}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx$$

Esta es una integral impropia, cuya convergencia depende del exponente $2p$. Para que la integral converja, debe cumplirse que:

$$2p > 1 \Rightarrow p > \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el volumen del sólido es finito si y solo si $p > \frac{1}{2}$. En cambio, si $0 < p \leq \frac{1}{2}$, el volumen diverge y el sólido no encierra una cantidad finita de espacio.

Por otro lado, para realizar el análisis del área superficial de la generalización se utiliza la fórmula de superficie de revolución:

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Primero, se calcula la derivada:

$$f(x) = x^{-p} \Rightarrow f'(x) = -px^{-(p+1)}$$

Sustituyendo en la fórmula del área:

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} \sqrt{1 + [-px^{-(p+1)}]^2} dx$$

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} \sqrt{1 + p^2 x^{-2(p+1)}} dx$$

Como $x \rightarrow \infty$, el término $p^2 x^{-2(p+1)} \rightarrow 0$, por lo tanto:

$$\sqrt{1 + p^2 x^{-2(p+1)}} \rightarrow 1$$

Esto sugiere que la integral es comparable a:

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

Esta nueva integral converge si $p > 1$. Entonces, el área superficial del sólido es finita si y solo si $p > 1$. En el caso particular $p = 1$, como en el Cuerno de Gabriel, esta integral diverge, y por lo tanto el área es infinita.

Tabla 1

Comportamiento del volumen y área superficial según el valor del parámetro p

Valor de p	¿Volumen finito?	¿Área superficial finita?
$0 < p \leq \frac{1}{2}$	No	No
$\frac{1}{2} < p \leq 1$	Si	Si
$p > 1$	Si	No

Esto demuestra que no es suficiente que la función decrezca para garantizar un volumen o área finitos. La tasa de decrecimiento, controlada por el valor de p , es fundamental. En particular:

- Para $p = 1$, tenemos exactamente el caso del Cuerno de Gabriel: volumen finito y superficie infinita.
- Para valores mayores de p , tanto el volumen como el área pueden ser finitos.

- Para valores menores, el crecimiento acumulado es demasiado lento para compensar la extensión infinita del dominio.

Este análisis ilustra cómo el infinito, en matemática, no debe ser visto como una entidad uniforme. Existen grados de infinidad, y el comportamiento global de un objeto puede cambiar radicalmente con una pequeña variación en la función generadora.

Por ejemplo, un sólido generado por $f(x) = \frac{1}{x^{0.6}}$ tiene volumen finito, pero superficie infinita, como el Cuerno de Gabriel. Sin embargo, si se usa $f(x) = \frac{1}{x^{1.1}}$, se obtiene un objeto más estrecho que el Cuerno de Gabriel, pero con menos superficie total y volumen también finito.

Esta variabilidad pone en evidencia que el infinito puede ser domesticado en contextos analíticos, pero solo bajo condiciones precisas.

Reflexionar sobre el infinito desde la paradoja del Cuerno de Gabriel

La paradoja del Cuerno de Gabriel no solo representa un objeto de estudio matemático, sino que ha sido, desde su origen, un punto de encuentro entre la intuición humana y las nociones más abstractas del infinito. Para Kaufman (2023) constituye uno de los primeros ejemplos en los que los matemáticos del siglo XVII abordaron el estudio de un sólido tridimensional cuya descripción implica una superficie bidimensional infinita. Por lo que, a lo largo de la historia, esta figura ha estimulado tanto el desarrollo técnico del cálculo integral como la reflexión filosófica sobre los límites del conocimiento.

Para Santiago y Fernández (2020) el sólido fue descrito formalmente en el siglo XVII por Evangelista Torricelli, en una época en la que el concepto de infinito comenzaba a adquirir un lugar legítimo dentro del discurso científico. Su análisis del sólido hiperbólico agudo, nombre con el que denominó este cuerpo según lo manifiesta Seoane (2018), no solo ofreció uno de los primeros ejemplos de integración impropia, sino que sirvió como evidencia de que el infinito podía ser tratado de forma rigurosa mediante herramientas matemáticas emergentes.

Sin embargo, siglos antes, en el siglo XIV, Nicole Oresme ya había introducido ideas análogas. En sus estudios sobre la continuidad y la extensión de las cualidades, planteó modelos en los que una propiedad podía distribuirse de manera uniforme a lo largo de un cuerpo infinito, anticipando así la posibilidad de que ciertas magnitudes, aunque infinitas en extensión, pudieran mantener características finitas. Esta perspectiva precursora revela que la paradoja del Cuerno de Gabriel tiene raíces más profundas en el pensamiento medieval, donde los límites entre lo físico y lo abstracto comenzaban a difuminarse.

Desde otro punto de vista, el Cuerno de Gabriel cuestiona directamente nuestra noción del infinito como algo necesariamente inconmensurable. La idea de que un objeto puede contener una cantidad finita de materia, pero poseer una superficie que no puede ser completamente recubierta por ningún medio finito, confronta nuestras intuiciones físicas. ¿Cómo es posible que podamos llenar una figura con una cantidad determinada de pintura, pero no pintar su superficie? Esta contradicción aparente surge, no de un error en el razonamiento, sino de aplicar categorías del mundo físico a objetos matemáticos puramente ideales.

Esta paradoja también expone la diferencia entre existencia matemática y existencia física. En el marco formal del análisis, el Cuerno de Gabriel no representa una anomalía, sino una consecuencia natural de la definición de integrales impropias sobre dominios infinitos. Sin embargo, al intentar trasladar estas propiedades a escenarios concretos, como fabricar el objeto o cubrirlo con una capa de pintura, emergen contradicciones que solo pueden resolverse comprendiendo los límites de cada modelo.

En este sentido, el Cuerno de Gabriel no es solo una curiosidad matemática, sino una herramienta pedagógica y epistemológica: enseña que nuestras intuiciones, moldeadas por la experiencia cotidiana, no siempre son fiables cuando se enfrentan a los extremos del pensamiento matemático. Además, ilustra la potencia del cálculo integral para describir situaciones que, aunque inalcanzables en la práctica, son perfectamente válidas dentro de una estructura lógica rigurosa.

3. Conclusiones

El Cuerno de Gabriel no solo ha servido como objeto de análisis matemático, sino como punto de partida para interrogantes mucho más amplios sobre la naturaleza del conocimiento y los límites de la razón. Al examinar su historia y las ideas filosóficas que ha inspirado, se hace evidente que esta figura abstracta actúa como un puente entre la precisión del cálculo y la especulación conceptual sobre el infinito. Su estudio no solo plantea una paradoja matemática, sino que ilumina la constante tensión entre lo que las matemáticas permiten formalizar y lo que la intuición humana logra comprender. Esta tensión es precisamente lo que da profundidad y riqueza al debate en torno a esta construcción singular.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (2019). Evolución de las investigaciones en didáctica de la matemática en el nivel universitario. *Revista de la Academia de Ciencias Canaria*, 31, 75-93. <https://personales.unican.es/fioravam/Escuela-MdeGuzman-2022/Artigue2019-Rev-AcademiaCanariaCiencias.pdf>
- Beránek, J. (2023). Giovanni Torricelli jako matematik Giovanni Torricelli as mathematician. *STUDIA SCIENTIFICA FACULTATIS PAEDAGOGICAE*, 19. <https://doi.org/10.54937/ssf.2023.22.5.19-30>
- Campo G., L. D. (2013). *Complementos exóticos, atractivos en la formación matemática del Bachillerato de Ciencias y Tecnología de Castilla y León* [Tesis de Maestría, Universidad de Valladolid]. <https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/3852/TFM-G216.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- CK-12 Foundation. (2026). 6.3 *Sólidos de Revolución: Volúmenes por Discos*. <https://flexbooks.ck12.org/cbook/c%C3%A1culo-2.0/section/6.3/primary/lesson/s%C3%B3lidos-de-revoluci%C3%B3n%3A-vol%C3%BAmenes-por-discos-calc-spn/>
- Matcom Online Grader [MOG]. (2025). *Cuerno de Gabriel*. <https://www.matcomgrader.com/problem/88/cuerno-de-gabriel/>
- Debroise, P. (2019). *Mathématiques de l'intensité et Merveilles de la nature: études sur le Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum de Nicole Oresme* (Doctoral Thesis, Université Paris Cité). <https://theses.hal.science/tel-03028342/>
- Gutiérrez, S. (2009). Evangelista Torricelli: un precursor del cálculo. *Revista Suma*, 60, 117-121. <https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/60/117-121.pdf>

- Gordejuela, F. E. (2016). *Tomando medidas: aproximación matemática a la idea de medir*. Editorial Universidad de Cantabria. https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=fkK_DQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA9&dq=la+trompeta+de+Torricelli+en+el+siglo+XVII&ots=3Yl0QTiNkq&sig=piB0LoNTLIQ_uWqgFnK31pNoda14#v=onepage&q=la%20trompeta%20de%20Torricelli%20en%20el%20siglo%20XVII&f=false
- Kaufman, R. (2023). Gabriel's Horn and the Painter's Paradox in Perspective. *Ohio Journal of School Mathematics*, 94, 1-5.
- Kindt, M. (2005). *La historia de las matemáticas en la enseñanza del análisis*. Sociedad, ciencia, tecnología y matemáticas (sctm). <https://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo3lp/4/mkindt.pdf>
- Ruiz, S. P. M. A. R., y Arroyo, E. (2017). Experiencia educativa con alumnos de bachillerato en programas de excelencia: Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP). *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de Actas*. https://www.researchgate.net/profile/Miguel-Adan/publication/371133923_Experiencia_educativa_con_alumnos_de_bachillerato_en_programas_de_excelencia_ABP/links/6474f5746a3c4c6efbef0626/Experiencia-educativa-con-alumnos-de-bachillerato-en-programas-de-excelencia-ABP.pdf
- Sancho-Vinuesa, T., & Gras Martí, A. (2011). *Integració impròpia, setembre 2011*. Universitat Oberta de Catalunya. <https://hdl.handle.net/10609/41961>
- Santiago, E. Á. L., y Fernández, F. S. (2020). La trompeta de Torricelli y la escalera infinita. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de profesores de matemáticas*, (109), 18-27. <https://www.ucm.es/sociedadpuigadam/file/boletin-109-de-soc-puig-adam>
- Seoane, J. (2018). Distinguiendo diagramas infinitos. *Metatheoria Revista de Filosofía e Historia de la Ciencia*, 9(1), 1-11. <https://doi.org/10.48160/18532330me9.204>
- Silva, I. N. L. D. (2016). *A Trombeta de Gabriel* [Tesis de Maestría, Universidad Federal de Ceará]. https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/21175/1/2016_dis_inlsilva.pdf