08 - Visión Antataura
Vol. 10, No. 1: 124 - 135
Junio – Noviembre 2026
Panamá
ISSN L 2520-9892

El problema de Pappus: una base del desarrollo científico moderno

The Pappus problem: a basis of modern scientific development

Galina Cogley[1]

[1]Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Panamá; galina.cogley@up.ac.pa; https://orcid.org/0009-0003-1949-7125

Fecha de recepción: 14-03-2026 *Fecha de aceptación: 16-05-2026*

DOI: https://doi.org/10.48204/j.vian.v10n1.a10168

Resumen: El problema de Pappus de Alejandría del siglo IV d.C. fue un impulso fundamental para el nacimiento de la geometría analítica en el siglo XVII. Este artículo tiene como objetivos: exponer la relevancia histórica del problema, describir el método cartesiano para resolver ecuaciones cuadráticas con una incógnita y ejemplificar su aplicación en un problema actual de cuatro rectas. Este artículo usa un enfoque metodológico deductivo aplicado. Inicia con una reseña histórica del problema de Pappus y su relación con el descubrimiento de la geometría analítica; luego se plantea cómo Descartes resuelve un tipo de ecuaciones cuadráticas con una incógnita usando su innovador método, innovador porque es usado por primera vez en su época. Se resuelve un problema actual sobre cuatro rectas, siendo este una representación moderna del problema de Pappus. Este artículo es importante, ya que plantea la relación que hay entre el problema de Pappus, el descubrimiento de la geometría analítica y las secciones cónicas. Otro resultado significativo es que en el problema actual de las cuatro rectas se obtiene como solución el conjunto de puntos que representan una cónica, en este caso hipérbola y elipse. Como conclusión, se puede decir que la solución al problema de Pappus, planteada por Descartes, garantizó el procedimiento y resultado del problema actual de las cuatro rectas planteado en este artículo. El problema de Pappus se considera base del desarrollo científico moderno, ya que el método (de unir algebra con geometría) que resuelve el mismo da pie al inicio y desarrollo de la geometría analítica, rama importante para el inicio del desarrollo científico.

Palabras clave: geometría, álgebra, análisis matemático, epistemología, historia de la ciencia.

Abstract: The problem of Pappus of Alexandria from the 4th century AD was a fundamental impetus for the birth of analytic geometry in the 17th century. This article aims to demonstrate the historical relevance of the problem, describe the Cartesian method for solving quadratic equations with one unknown, and illustrate its application in a modern problem involving four lines. This article adopts an applied deductive methodological approach. It begins with a historical overview of Pappus's problem and its relationship to the discovery of analytic geometry. It then explains how Descartes solved a type of quadratic equation with one unknown using his innovative method, which was groundbreaking at the time. Subsequently, a modern problem involving four lines is solved, representing a contemporary interpretation of Pappus's problem. This article is significant because it establishes the relationship between Pappus's problem, the discovery of analytic geometry, and conic sections. Another important result is that the solution to the modern four-line problem is the set of points that form a conic section specifically, a hyperbola and an ellipse. In conclusion, Descartes' solution to Pappus's problem ensured both the procedure and the result of the modern four-line problem presented in this article. Pappus's problem is considered fundamental to modern scientific development, as the method of combining algebra with geometry that solves it led to the emergence and advancement of analytic geometry, an essential branch for the development of science.

Keywords: geometry, algebra, mathematical analysis, epistemology, history of science.

1. Introducción

A lo largo de los siglos, se han presentado casos de problemas matemáticos sin solución en su debido momento. Un caso es el problema de Pappus, que estuvo siglos sin una solución general hasta que un matemático lo resuelve, aunque se puede decir que los antiguos griegos usaron su método de regla y compás para resolverlo, no existe ninguna prueba que garantice que ellos lo resolvieron (Collette, 2000), quedando el problema planteado y sin resolver por varios siglos.

El problema es resuelto por un innovador método que cambia el prototipo de solución usado por los antiguos griegos. Este nuevo método demuestra que un problema es irresoluble no por falta de premisas, sino porque las reglas vigentes no son las correctas para resolverlo. La solución de este problema por René Descartes en el siglo XVII demostró que la ciencia necesitaba un procedimiento sistemático.

El matemático principal de este artículo es Descartes, quien fue un filósofo, matemático y científico francés reconocido como padre de la filosofía moderna y creador de la geometría analítica. Este artículo plantea el problema de Pappus principalmente para 4 líneas rectas, pero cabe destacar que el método de Descartes garantiza su solución para más de 4 líneas rectas (Hernández, 2002).

Este artículo tiene como objetivos exponer la relevancia histórica del problema de Pappus, describir el método cartesiano para resolver ecuaciones cuadráticas con una incógnita y ejemplificar su aplicación en un problema actual de cuatro rectas.

Se inicia con la reseña histórica del problema, su concepto, interpretación geométrica, se plantea que su solución es base del descubrimiento de la geometría analítica; luego se presenta el método usado por Descartes, para resolver ecuaciones cuadráticas con una incógnita, y esto, para conocer los primeros trabajos históricos relacionados con el método cartesiano; y finalmente se resuelve un problema en versión actual del problema de Pappus de 4 rectas.

2. Desarrollo

- **El problema de Pappus:**

Se le atribuye al matemático conocido como Pappus de Alejandría, del siglo IV después de Cristo, considerado uno de los últimos destacados matemáticos griegos de la antigüedad, coleccionista de ideas que reunió aportes matemáticos de antiguos maestros (Euclides, Arquímedes, Apolonio) en su obra "*Colección Matemática*" (Gonzalez, 2026). *Colección Matemática* es una obra donde Pappus guardó información que valía la pena saber sobre las formas y los números. Puede decirse que muchos fueron los que desconocieron por completo este tratado y no se pudo aprovechar su contenido hasta finales del siglo XVI, cuando el italiano Federico Commandino (1509-1575) uno de los más destacados traductores de obras de la antigüedad lo tradujera al latín, en el siglo XX ya había versiones en inglés y francés (Población, 2022). La *Colección Matemática* de Pappus de Alejandría es una obra enciclopédica de ocho libros que amplía, comenta y compila conocimientos de la geometría griega antigua, incluye teoremas fundamentales de geometría plana y sólidos, áreas de figuras, volúmenes de sólidos, entre otros (Mendoza, 2018).

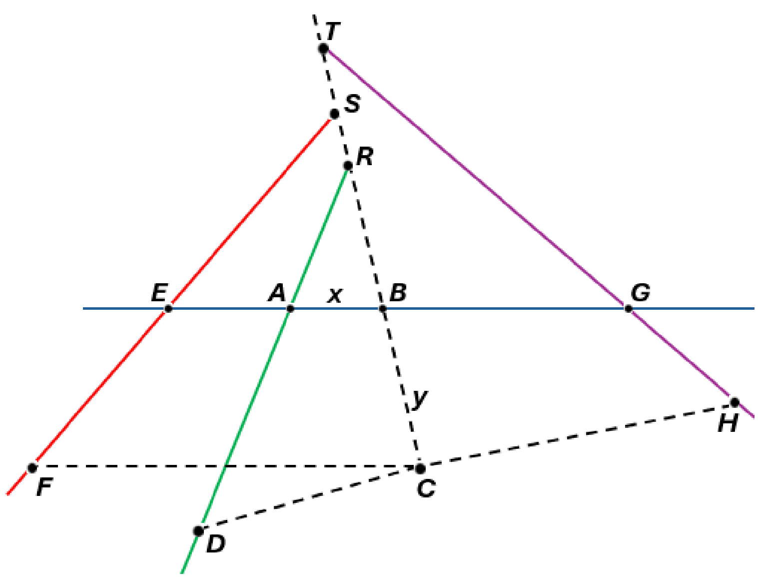
Con la historia de Pappus se conoce el largo tiempo que estuvo sin resolver su problema, ya que él lo plantea en su obra *Colección Matemática* del siglo IV, hasta que después de más de 1300 años René Descartes lo resuelve en el siglo XVII dando origen a su geometría analítica. Es René Descartes (1596-1650) quien da a conocer una solución general y elegante de este problema (o problema de las *n* líneas); aunque Descartes uso este método en la solución de otros problemas matemáticos, es con la solución del problema de Pappus que comprueba el valor e importancia del mismo.

El teorema de Pappus, también planteado en la obra *Colección Matemática*, no es lo mismo que el problema de Pappus, el presente artículo se centra exclusivamente en el problema de Pappus por ser el que dio pie al descubrimiento de la geometría analítica, importante rama de las matemáticas y base fundamental para el surgimiento del desarrollo científico. A diferencia del teorema, que trata sobre puntos alineados, el problema de Pappus (de las *n* líneas) busca encontrar el lugar geométrico de un conjunto de puntos que siguen una regla de distancia muy específica, planteado por los matemáticos griegos del tiempo de Euclides, estudiado por Apolonio y Pappus, su dificultad sobrepasaba a través de los siglos como si fuera un reto por alcanzar. Gracias al contenido de la obra *Colección Matemática* se puede decir que los antiguos griegos sabían que el lugar geométrico de puntos buscado en el problema de Pappus, para 3 y 4 líneas, representaba una sección cónica, pero el gran reto para ellos era generalizarlo para más de 4 líneas, reto que pudo ser resuelto por Descartes en el siglo XVII y que plasmo en su obra Geometría. Como se planteó, Rene Descartes garantiza que el problema de Pappus puede ser resuelto para más de 4 líneas, importante señalar que su método fue innovador, método que siembra las bases al surgimiento del método cartesiano. Este problema, que lleva siglos sin resolver, abre el camino a una innovación científica, y se puede decir innovación científica a la geometría analítica porque gracias a ella hoy en día muchas teorías o leyes han podido ser representadas y desarrolladas de forma práctica y ser trasmitidas de generación en generación (Rodríguez, 2014).

Ahora bien, para cumplir con el objetivo de este artículo es de suma importancia conocer el enunciado del problema de Pappus, este enunciado se encuentra en la obra Geometría de René Descartes. El problema para 4 líneas se plantea como sigue:

Figura 1

Representación geométrica del problema de Pappus para 4 líneas



Sean AB, AD, EF, GH varias líneas dadas y debe encontrarse un punto, como C, del cual, trazando otras líneas a las dadas, como CB, CD, CF y CH, de manera que los ángulos

CBA, CDA, CFE, CHG sean dados, y que el producto de la multiplicación de una parte de estas líneas sea igual al producto de la multiplicación de las otras; o bien que ellas tengan otra proporción dada, lo que no hace, en modo alguno, más difícil el problema (Páez Pinzón, 2021).

El método de demostración usado por Descartes para resolver este problema se encuentra en su obra La Geometría (Zavaleta, 2015). No es necesario plasmar la demostración, basta con examinar las características de este método y sus resultados obtenidos. La gran innovación de Descartes es la asignación de una longitud a los segmentos para garantizar la manipulación de las operaciones algebraicas, así denota a los segmentos AB mediante x y BC mediante y. Expresa las distancias CD, CF y CH como expresiones lineales en términos de x y de y (x y en y), con coeficientes determinados por las distancias fijas y por los ángulos determinados entre los segmentos. Mediante principios geométricos y el uso de abreviaturas apropiadas Descartes llega a una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En la ecuación anterior los coeficientes literales no son las mismas representaciones dadas en el problema, esta ecuación representa una cónica, es decir una parábola, una elipse o una hipérbola (o recta) dependiendo del valor de los coeficientes literales. Además, se plantea un caso particular: cuando las 4 rectas son paralelas y están a igual distancia a, y la quinta es perpendicular a las otras, el lugar corresponde a una cúbica que Newton llamó parábola cartesiana:

$$x^3 - 2ax^2 + 2a^3 = axy$$

De esta forma aparecerían por primera vez las curvas como lugares geométricos definidos por ecuaciones, umbral y base de la geometría analítica (Collette, 2000).

Cabe destacar, en este nuevo método se asignó las letras (x, y) para las incógnitas y las letras (a, b, c) para constantes o segmentos de longitud conocida. También a^2 o b^3 Descartes las concibe como segmentos simples y no, según los antiguos griegos, como cuadrados o cubos; rompiendo la tradición griega (Collette, 2000).

- **EL nuevo método de Descartes:**

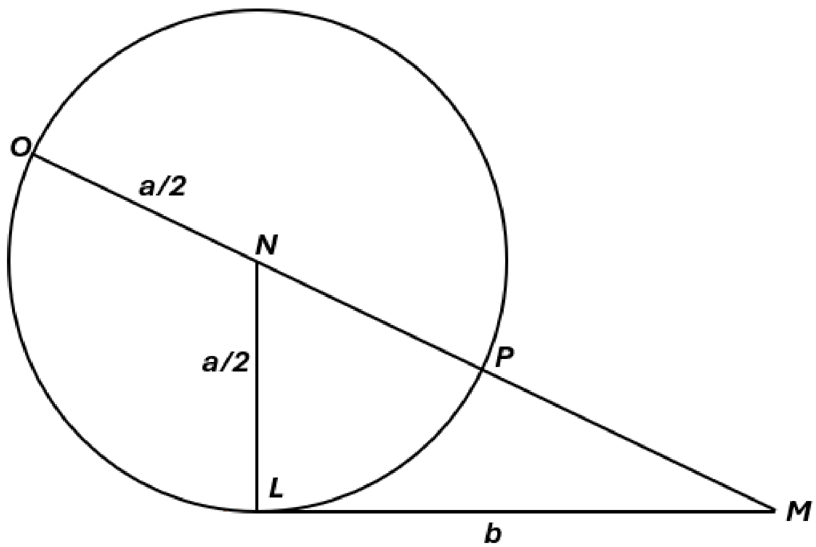
Los primeros pasos que dio Descartes para el desarrollo de la geometría analítica se pueden observar también en el siguiente problema planteado en su obra geometría. El problema consiste en buscar una solución geométrica para la ecuación de la forma:

$$z^2 = az + bb$$

donde z es la incógnita buscada, a y b son magnitudes dadas (Amat, 2020). Descartes procede geométricamente indicando la forma de construir el segmento de longitud z y usa la siguiente figura (Boyer, 1986):

Figura 2

Representación geométrica de la solución de la ecuación cuadrática



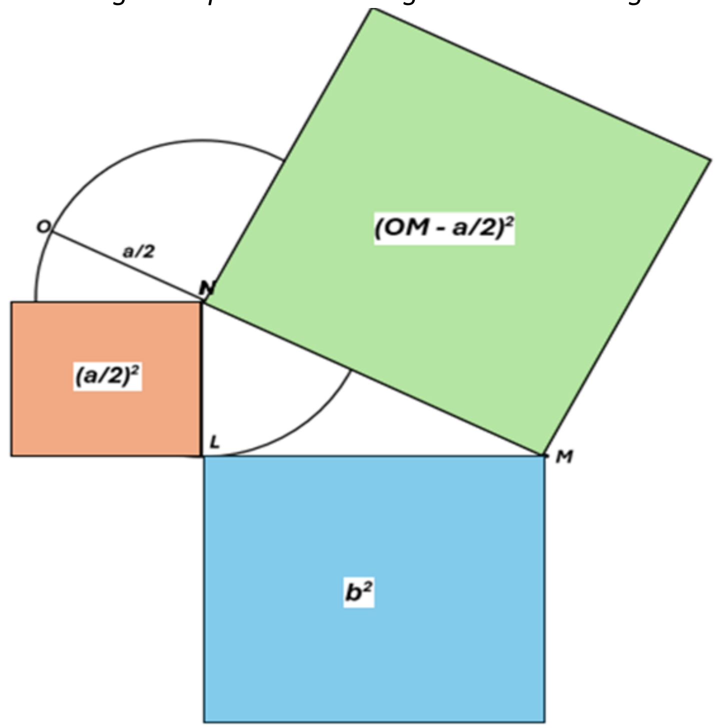
Se construye según la Figura 2, un triángulo NLM, con el lado LM igual a b, la raíz cuadrada de la cantidad conocida b^2, y el otro lado LN igual a $a/2$, la mitad de la otra cantidad conocida que esta multiplicada por z**,** la cual es el segmento desconocido o incógnita por hipótesis. Prolongamos la hipotenusa del triángulo NLM hasta O**,** de tal forma que NO sea igual a NL. Continuando Descartes plantea que OM es la línea z buscada y que:

$$z = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

Los pasos del párrafo anterior se pueden deducir según la Figura 3 como:

Figura 3

Teorema de Pitágoras aplicado al triángulo NML de la Figura 2



De la Figura 3 y por el teorema de Pitágoras se tiene (Gutierrez, 2011):

$$\left(OM-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2$$

$$(OM)^2-(OM)\left(\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2$$

$$(OM)^2-2(OM)\left(\frac{a}{2}\right)=b^2$$

$$(OM)^2=2(OM)\left(\frac{a}{2}\right)+b^2$$

$$(OM)^2=a(OM)+b^2$$

y relacionado con $z^2=az+bb$ se tiene $z=OM$, y como $\left(OM-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2$, entonces: $\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2$ luego:

$$z=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}$$

- **Un problema de Pappus en su versión actual:**

El lenguaje del siglo XVII usado en la solución de problemas no es usado en la actualidad, fue modificando poco a poco con el pasar de los años y gracias al aporte de importantes matemáticos posteriores a Descartes. A continuación, se plantea el problema de Pappus para 4 líneas usando el lenguaje moderno y utilizando la distancia perpendicular de un punto $P(x, y)$ a un conjunto de rectas dadas, se debe tener claro que los ángulos que se plantean en el problema de Pappus pueden ser distintos a 90°:

Sean 4 rectas en el plano definidas con sus ecuaciones generales:

$$L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$L_3: a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

$$L_4: a_4x + b_4y + c_4 = 0$$

Sea $d_i$la distancia de L_i al punto arbitrario $P(x, y)$. Sabiendo que la fórmula de distancia es:

$$d_i = \frac{|a_ix + b_iy + c_i|}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}$$

El problema busca encontrar el lugar geométrico de los puntos P que cumplan con lo siguiente:

$$(d_1)(d_2) = k(d_3)(d_4) \quad , \quad k \text{ es una constante dada}$$

Un ejemplo de la versión actual del problema de Pappus es el siguiente:

Ejemplo: Sean las siguientes rectas en el plano

$$L_1: y + 2 = 0$$

$$L_2: 3x + 4y + 1 = 0$$

$$L_3: x - 1 = 0$$

$$L_4: 12x - 5y + 3 = 0$$

Sea d_1 la distancia de L_1 al punto arbitrario $P(x, y)$.

Sea d_2 la distancia de L_2 al punto arbitrario $P(x, y)$.

Sea d_3 la distancia de L_3 al punto arbitrario $P(x, y)$.

Sea d_4 la distancia de L_4 al punto arbitrario $P(x, y)$.

Encontrar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que cumplan con lo siguiente:

$$(d_1)(d_2) = 5(d_3)(d_4)$$

Solución: Se sabe que la fórmula de distancia ***dᵢ*** de la recta ***Lᵢ*** al punto arbitrario $P(x, y)$ es:

$$d_i = \frac{|a_i x + b_i y + c_i|}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}$$

Se debe encontrar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que cumplan con lo siguiente $(d_1)(d_2) = 5(d_3)(d_4)$ es decir:

$$\left(\frac{|a_1 x + b_1 y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right)\left(\frac{|a_2 x + b_2 y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right) = 5\left(\frac{|a_3 x + b_3 y + c_3|}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}\right)\left(\frac{|a_4 x + b_4 y + c_4|}{\sqrt{a_4^2 + b_4^2}}\right)$$

reemplazando se tiene:

$$\left(\frac{|y+2|}{\sqrt{0+1^2}}\right)\left(\frac{|3x+4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}\right) = 5\left(\frac{|x-1|}{\sqrt{1^2+0}}\right)\left(\frac{|12x+5y+3|}{\sqrt{12^2+5^2}}\right)$$

$$\left(\frac{|(y+2)(3x+4y+1)|}{5}\right) = 5\left(\frac{|(x-1)(12x-5y+3)|}{13}\right)$$

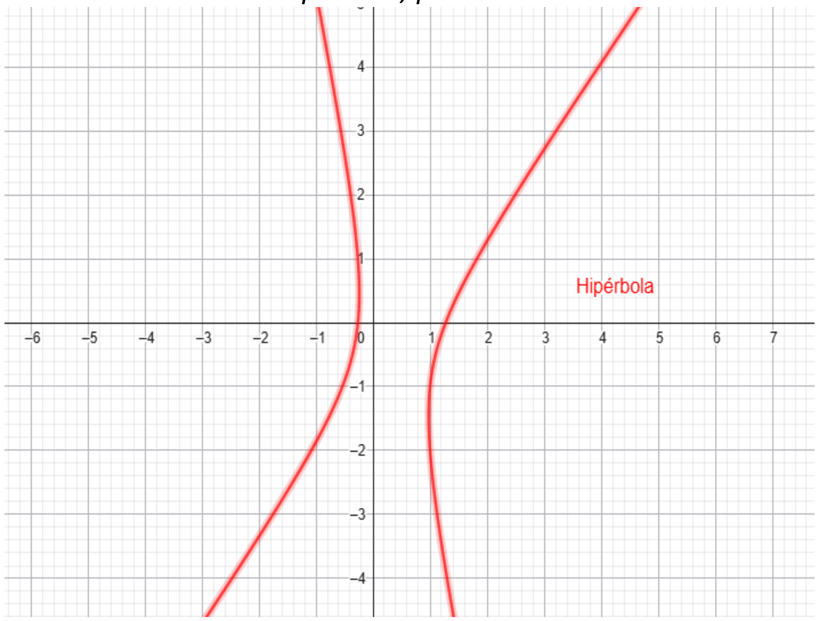
$$13|4y^2 + 9y + 3xy + 6x + 2| = 25|12x^2 - 9x - 5xy + 5y - 3|$$

Como $|52y^2 + 117y + 39xy + 78x + 26| = |300x^2 - 225x - 125xy + 125y - 75|$ entonces: $52y^2 + 117y + 39xy + 78x + 26 = 300x^2 - 225x - 125xy + 125y - 75$, o $52y^2 + 117y + 39xy + 78x + 26 = -(300x^2 - 225x - 125xy + 125y - 75)$.

Para $52y^2 + 117y + 39xy + 78x + 26 = 300x^2 - 225x - 125xy + 125y - 75$ se obtiene la ecuación general de la hipérbola: $300x^2 - 164xy - 52y^2 - 303x + 8y - 101 = 0$, primera solución encontrada. cuya gráfica se muestra en la Figura 4.

Figura 4

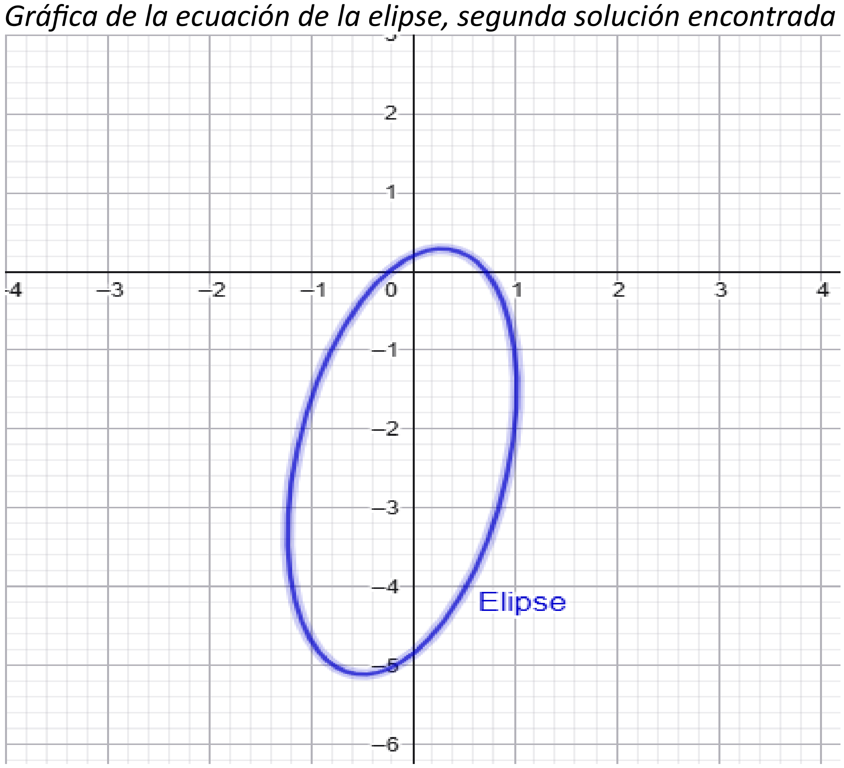
Gráfica de la ecuación de la hipérbola, primera solución encontrada



Para $52y^2 + 117y + 39xy + 78x + 26 = -(300x^2 - 225x - 125xy + 125y - 75)$ se tiene la ecuación general de la elipse $300x^2 - 86xy + 52y^2 - 147x + 242y - 49 = 0$, segunda solución encontrada cuya gráfica se muestra en la Figura 5.

Figura 5

Gráfica de la ecuación de la elipse, segunda solución encontrada



3. Conclusiones

La reseña histórica del problema Pappus nos lleva a la siguiente pregunta ¿cómo el deseo de resolver un problema, que lleva siglos sin resolver, abre el camino a una innovación científica? Se sabe que la solución del problema de Pappus fue de suma importancia no por el resultado obtenido, sino por el método utilizado para resolverlo, método que sirvió de base para el descubrimiento y desarrollo de la geometría analítica, rama de las matemáticas que representa mediante ecuaciones algebraicas formas geométricas y viceversa, dotando con esto a la ciencia de herramientas con capacidad de representar y medir fenómenos físicos de manera abstracta, su descubrimiento dio paso al surgimiento del cálculo infinitesimal, la física de Newton, la ingeniería actual, la creación de gráficos por computadora. Por tal razón, se considera el problema de Pappus base del desarrollo científico moderno.

El problema de las 4 rectas, que representa una versión actual del problema de Pappus, dio como solución el lugar geométrico de una hipérbola y una elipse, siendo este un ejemplo concreto que evidencia la solución general que brinda Descartes a este problema.

El interés de René Descartes en dar solución al problema de Pappus enseña que una situación que se cree irresoluble, más que un obstáculo, puede ser, en realidad, el inicio de un gran descubrimiento.

Referencias bibliográficas

Amat, P. R. (2020). *Dibujando a Descartes* (1era Ed.). Fondo Editorial Pascual Bravo. https://prometeo.matem.unam.mx/recursos/VariosNiveles/iCartesiLibri/recursos/Dibujando_a_Descartes/index.html?page=25

Boyer, C. B. (1986). *Historia de las matemáticas.* Alianza Universitaria. https://www.academia.edu/41341372/Historia_de_la_matematica_Carl_Boyer

Collette, J.P. (2000). *Historia de las matemáticas* (2da Ed.). Siglo XXI Editores. https://www.sigloxxieditores.com/libro/historia-de-las-matematicas-volumen-2_17110/

González, P. M. (2026). *Dos problemas históricos: el problema de Apolonio y el problema de Pappus.* Centro virtual de divulgación de las matemáticas. https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Apolonio4.asp.htm#:~:text=Vieta%20sostiene%20en%20su%20mano,esencia%20de%20la%20Geometr%C3%ADa%20Anal%C3%ADtica

Gutiérrez, D. A. (2011). *Historia de las matemáticas desde sus inicios hasta Hilbert* [Tesis de Grado, Universidad Surcolombiana]. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1313027/Gutierrez2011Historia.pdf

Hernández, V. (2002). *La geometría analítica de Ddescartes y Fermat: ¿y Apolonio?*. Apunte de historia de las matemáticas, 1(1). https://share.google/CECxEQxUEdwaLLeZh

Mendoza G., J. E. (2018). ¿Un posible error de la "Géométrie"?: Descartes y la solución del problema de Pappus. *Revista Premisa 20* (78), 52-79. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1180940/Mendoza2018Un.pdf

Páez Pinzón, E. J. (5 de agosto 2021). *Solución de Descartes al Problema de Pappus* (Video). YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=wQrKyKIMhjY

Población, A. J. (2022). *El legado perdido de Pappus de Alejandría que dio lugar a unas nuevas matemáticas.* ABCdario de las matemáticas. https://www.abc.es/ciencia/abci-legado-perdido-pappus-alejandria-lugar-unas-nuevas-matematicas 202205020127_noticia.html?ref=https%3A%2F%2Fwww.abc.es%2Fciencia%2Fabci-legado-perdido-pappus-alejandria-lugar-unas-nuevas-matematicas-202205020127_noticia.html

Rodríguez, V. (2014). *El problema de Pappus y el origen de la geometría analítica: una propuesta para su enseñanza en el bachillerato* [Tesis de Grado, Universidad Nacional Autónoma de México]. https://tesiunamdocumentos.dgb.unam.mx/ptd2014/junio/0714447/0714447.pdf

Zavaleta, E. (2015). *Análisis de la Geometría de Descartes* [Tesis de Grado, Universidad Nacional Autónoma de México]. https://ru.dgb.unam.mx/server/api/core/bitstreams/7ac4d296-e292-437e-ae92-6d1f44276594/content