Visión Antataura
Vol.2, No.1: 41-53
Junio-Noviembre, 2018
Panamá
ISSN 2520-9892

Caracterización de los espacios de Hilbert separables.

Characterization of Hilbert's separable spaces.

Jorge E. Hernández U.[1], *Temístocles Zeballos M.*[2]

[1]Ph.D. en análisis funcional no lineal; Profesor, Departamento de Matemática, Centro Regional Universitario de Veraguas, Universidad de Panamá; edithleco@gmail.com
[2]Magíster en Matemática Pura; Profesor, Departamento de Matemática, Centro Regional Universitario de Azuero, Universidad de Panamá; temizeballos@gmail.com

Resumen: En el presente trabajo se caracterizan los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita y se prueba que son isométricamente isomorfos al espacio de Hilbert l^2.

Palabras clave: Espacio de Hilbert l^2, bases ortonormales, espacios de Hilbert separables.

Abstract: In this paper separable Hilbert spaces of infinite dimension are characterized, and it is proven that they are isometrically isomorphic to the Hilbert space l^2.

Key words: Hilbert space l^2, orthonormal bases, separable Hilbert spaces.

1. Introducción

Un importante espacio de Hilbert, que recuerda en su aspecto al espacio de coordenadas de dimensión finita, es el espacio de todas las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales o complejos para las que $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$ converge. Este es el espacio de Hilbert l^2 el cual es el prototipo de los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita.

En este trabajo se revisan las propiedades de las bases ortonormales en los espacios de Hilbert y se caracterizan los espacios de Hilbert separables de dimensión

Fecha de recepción: 01 de marzo de 2018 *Fecha de aceptación: 10 de mayo de 2018*

infinita. Finalmente, se prueba que l^2 es isométricamente isomorfo a cualquier espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

2. Bases ortonormales en espacios de Hilbert

2.1 Definición: Sean X un espacio con producto interno y $M \subset X, M \neq \varnothing$. M es un conjunto ortonormal si

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases} \qquad \text{para todo } x, y \in M.$$

2.2 Lema: Todo conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ en un espacio con producto interno X es linealmente independiente. En particular, si X es $k-$dimensional entonces el conjunto $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ es una base para X y cualquier vector $x \in X$ puede ser expresado en la forma $x = \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle \, e_n$ (en este caso $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ usualmente se llama ***base ortonormal*** y los números $\langle x, e_n \rangle$ son las componentes de x con respecto a esta base, los cuales son llamados los ***coeficientes de Fourier*** de x con respecto a esta base ortonormal).

2.3 Lema: Sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ un subconjunto linealmente independiente de un espacio con producto interno X y sea $Y = \left[\{v_1, \cdots, v_k\}\right]$. Entonces existe una base ortonormal $\{e_1, \cdots, e_k\}$ para Y.

2.4 Definición: Sea X un espacio con producto interno. Una sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ se dice que es una sucesión ortonormal si $\|e_n\|=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$, y $\langle e_m, e_n\rangle = 0$ para todo $m,n\in\mathbb{N}$ con $m\neq n$; es decir,

$$\langle e_n, e_m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n\neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

2.5 Propiedad: Todo espacio con producto interno X de dimensión infinita contiene una sucesión ortonormal.

2.6 Propiedad: Sea X un espacio con producto interno y sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en X. Para cualquier $x\in X$ la serie (real) $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2$ converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

2.7 Propiedad: Sean H un espacio de Hilbert y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en H. Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{F}$. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ converge en H si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$ converge en $\mathbb{R}$. Si este es el caso, entonces

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2.$$

2.8 Propiedad: Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en H. Para cualquier $x\in H$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\, e_n$ converge en H.

2.9 Propiedad: Sean X un espacio con producto interno y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en X. Entonces para cada $x \in \overline{[e_1, e_2, \cdots]}$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n$$

2.10 Propiedad: Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en el espacio de Hilbert H. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) $\overline{[e_1, e_2, \cdots]} = H$; es decir, el subespacio generado por el conjunto ortonormal $\{e_n / n \in \mathbb{N}\}$ es denso en H.

(b) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$, para todo $x \in H$; es decir, todo elemento de H es igual a su serie de Fourier.

(c) $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$, para todo $x, y \in H$.

(d) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$, para todo $x \in H$. Identidad de Parseval.

(e) No existe un conjunto ortonormal en H que contiene propiamente al conjunto $\{e_n / n \in \mathbb{N}\}$. O sea que $\{e_n / n \in \mathbb{N}\}$ es maximal en el sentido ortonormal.

(f) $\{e_n / n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$.

(g) $\langle x, e_n \rangle = \langle y, e_n \rangle$, para todo $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = y$.

2.11 Definición: Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en el espacio de Hilbert H. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$

es una base ortonormal para H si se satisface una de las condiciones de la Propiedad 2.10. En este caso se dice también que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión ortonormal total o completa.

3. Espacios de Hilbert Separables

Ahora que se han estudiado las bases ortonormales en detalle, es natural preguntarse qué espacios de Hilbert poseen una base ortonormal.

3.1 Definición: Un espacio de Hilbert H se llama separable si existe una familia enumerable de vectores $\{v_1, v_2, \cdots\}$ tal que $\overline{\{v_1, v_2, \cdots\}} = H$.

3.2 Teorema: Todo espacio de Hilbert de dimensión finita es separable.

Demostración: Sea H un espacio de Hilbert tal que $\dim(H) = n < \infty$ y sea $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base para H. Definamos,

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k : (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n \right\} \text{ si } H \text{ es real}$$

y

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k : \alpha_k = a_k + i b_k; \quad a_k, b_k \in \mathbb{Q} \right\} \text{ si } H \text{ es complejo.}$$

En cualquier caso S es enumerable y $\overline{S} = H$. Por lo tanto, H es separable.

El siguiente Teorema caracteriza a los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita.

3.3 Teorema: Un espacio de Hilbert de dimensión infinita H es separable si y solo si posee una base ortonormal.

Demostración:

$\Rightarrow]$ Sea H un espacio de Hilbert separable y $\dim(H)=\infty$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $H=\overline{\{x_n / n\in\mathbb{N}\}}$. Consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ que se obtiene de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ omitiendo los términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que son combinaciones lineales de los términos precedentes de la sucesión $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots$

Así, $y_1 = x_1$. Si x_2 es combinación lineal de x_1 entonces no lo tomo; si x_2 no es combinación lineal de x_1 entonces tomo $y_2 = x_2$. Si x_3 no es combinación lineal de x_1 y x_2 entonces lo tomo y procedo de esa forma.

Por construcción, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto linealmente independiente y

$$[x_1, x_2, \cdots] = [y_1, y_2, \cdots].$$

Por el proceso de Gram-Schmidt podemos construir una sucesión ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$[e_1, e_2, \cdots] = [y_1, y_2, \cdots] = [x_1, x_2, \cdots].$$

Por lo tanto,

$$\overline{[e_1, e_2, \cdots]} = \overline{[x_1, x_2, \cdots]} \supset \overline{\{x_1, x_2, \cdots\}} = H.$$

Así pues, $H = \overline{[e_1, e_2, \cdots]}$ con $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortornormal, de donde $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para H.

$\Leftarrow]$ Supongamos ahora que H posee una base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Luego para todo $x \in H$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle x, e_n \rangle \right|^2 = \|x\|^2 < \infty .$$

Sea

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \,/\, \alpha_k \in \mathbb{Q} \left(ó\ \alpha_k = p_k + iq_k, \quad p_k, q_k \in \mathbb{Q} \right), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Luego, S es un conjunto enumerable.

Probemos que S es denso en H. Sea $x \in H$, entonces

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle x, e_n \rangle \right|^2 < \infty .$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \langle x, e_n \rangle \right|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} .$$

Para cada $n = 1, 2, 3, \cdots, N$ tomemos $\alpha_n \in \mathbb{F}$ racional o complejo racional (según sea el caso) tal que

$$\left| \langle x, e_n \rangle - \alpha_n \right|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2N} .$$

Tomemos $y = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \in S$ entonces

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \left\|\sum_{n=1}^{N}\left(\langle x,e_n\rangle-\alpha_n\right)e_n+\sum_{n=N+1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n\right\|^2\\ &=\sum_{n=1}^{N}\left|\langle x,e_n\rangle-\alpha_n\right|^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\langle x,e_n\rangle\right|^2\\ &\le\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}\\ &=\varepsilon^2\end{aligned}$$

de donde $\|x-y\|<\varepsilon$. Esto implica que $\overline{S}=H$ y por lo tanto, H es separable.

3.4 Teorema: La sucesión ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para l^2, donde

$$\begin{aligned}e_1&=(1,0,0,\cdots)\\ e_2&=(0,1,0,\cdots)\\ &\vdots\\ e_n&=(0,0,\cdots,0,1,\cdots,0,0,\cdots)\\ &\vdots\end{aligned}$$

Demostración: Es claro que para cualquier $n\in\mathbb{N}$, $e_n\in l^p$ para todo $1\le p\le\infty$.

Note que $\|e_n\|_2=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\langle e_m,e_n\rangle=0$ para todo $n\neq m,\quad n,m\in\mathbb{N}$. Así, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es, en efecto, una sucesión ortonormal en l^2.

Por otro lado, sea $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$, entonces

$$\langle x,e_n\rangle=x_n,$$

por lo tanto,

$$\|x\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle x,e_n\rangle\right|^2.$$

O sea, se satisface la identidad de Parseval. Por lo tanto, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para l^2 (Por la Definición 2.11).

3.5 Corolario: l^2 es separable.

Demostración: Se deduce directamente de los Teoremas 3.3 y 3.4.

3.6 Lema: Sean $[a,b]$ un intervalo acotado y $1 \le p < \infty$. Entonces el conjunto $C([a,b])$ es denso en $L^p([a,b])$.

3.7 Lema: Para cualquier $b > a$ el conjunto de polinomios con coeficientes racionales (o complejos racionales) es denso en el espacio $\left(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty\right)$.

Demostración: Consideremos el espacio $C_{\mathbb{R}}([a,b])$, con la norma $\|\cdot\|_\infty$, y supongamos que $f \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por el teorema de Stone-Weierstrass existe un polinomio real $p_1(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ tal que $\|f - p_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, para cada $k = 0, \cdots, n$, elijamos coeficientes racionales β_k, tal que $|\beta_n - \alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2n\gamma^k}$ (donde $\gamma = \max\{|a|, |b|\}$, y sea $p_2(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k$.

Entonces

$$\|p_1 - p_2\|_\infty \le \sum_{k=0}^{n} |\beta_n - \alpha_n| \gamma^k < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ y por lo tanto, } \|f - p_2\|_\infty < \varepsilon,$$

lo que demuestra el resultado.

Para el caso complejo aplicamos este resultado a la parte real e imaginaria de $f \in C_{\mathbb{C}}([a,b])$

3.8 Teorema: Para cualquier $b > a$ el conjunto de polinomios con coeficientes racionales (o complejos racionales) es denso en el espacio $\left(L^2([a,b]), \|\cdot\|_2\right)$.

Demostración: Consideremos el espacio $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$, con la norma $\|\cdot\|_2$, y supongamos que $f \in L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por el Lema 3.6 existe una función $g \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$ tal que $\|f - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Por le Lema 3.7, existe un polinomio p con coeficientes racionales tal que $\|g - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{|b-a|}}$. Luego, en $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ la norma $\|g - p\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ y por lo tanto, $\|f - p\|_2 < \varepsilon$, lo que prueba el resultado en el caso real.

Para el caso complejo aplicamos este resultado a la parte real e imaginaria de f.

3.9 Corolario: $L^2([0,1])$ es separable.

Demostración: El conjunto de polinomios con coeficientes racionales (o complejos racionales) es enumerable y denso en $L^2([0,1])$. Por lo tanto, $L^2([0,1])$ es separable.

3.10 Definición: Sean X, Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$. T es una isometría si $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Si T es una isometría suryectiva, entonces se dice que X y Y son espacios normados isométricamente isomorfos.

3.11 Teorema: Sea H un espacio de Hilbert con una base ortonormal $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces existe una isometría suryectiva $T: H \to l^2$ tal que $T(u_n) = e_n = (0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $x \in H$, entonces $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n$.

Denotemos

$$\alpha_n := \langle x, u_n \rangle .$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty .$$

Esto implica que

$$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 .$$

Definamos $T: H \to l^2$ por

$$T(x) = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \text{, donde } \alpha_n = \langle x, u_n \rangle .$$

Probemos que T es lineal.

Sean $x, y \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Entonces

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n \quad \text{y} \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, u_n \rangle u_n .$$

Luego,

$$\alpha x + \beta y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \alpha x + \beta y, u_n \rangle u_n$$

y

$$\begin{aligned} T(\alpha x+\beta y) &= \left\{\langle \alpha x+\beta y, u_n\rangle\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \alpha\left\{\langle x, u_n\rangle\right\}_{n=1}^{\infty}+\beta\left\{\langle y, u_n\rangle\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \alpha T(x)+\beta T(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es lineal.

Probemos que T es una isometría. En efecto, por la identidad de Parseval se tiene que

$$\|T(x)\|_2^2=\left\|\left\{\langle x, u_n\rangle\right\}_{n=1}^{\infty}\right\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle x, u_n\rangle\right|^2=\|x\|^2$$

de donde

$$\|T(x)\|_2=\|x\|, \text{ para todo } x\in X .$$

Así, T es una isometría.

Probemos que T es suryectiva.

Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^2$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$.

Luego, por la Propiedad 2.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n u_n\in H$. Denotemos $x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n u_n$, entonces $\alpha_n=\langle x, u_n\rangle$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, u_n\rangle u_n \text{ y } T(x)=\left\{\langle x, u_n\rangle\right\}_{n=1}^{\infty}=\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Así, T es suryectiva. Hemos probado que T es una isometría suryectiva y

$$T(u_n)=e_n \text{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$

3.12 Corolario: Todo espacio de Hilbert H separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a l^2; es decir, existe una isometría $T:H\to l^2$ tal que es un isomorfismo.

Demostración: Como H es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita entonces por el Teorema 3.3, H posee una base ortonormal y, por el Teorema 3.11, H es isométricamente isomorfo a l^2.

3.13 Corolario: $L^2([0,1])$ es isométricamente isomorfo a l^2.

Demostración: Por el Corolario 3.9 $L^2([0,1])$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, luego por el Corolario 3.12 $L^2([0,1])$ es isométricamente isomorfo a l^2.

Referencias bibliográficas

Amann, H. y Escher, J. (2009). *Analysis III*. First Edition. Birkhäuser Verlag AG, Basel.

Athreya, K.B. y Lahiri, S.N. (2006). *Measure Theory and Probability Theory*. First Edition. New York: Springer-Verlag.

Bogachev, V.I. (2007). *Measure Theory. Volume I.* First Edition. Berlin: Springer-Verlag.

Capinski, M. y Kopp, E. (2004). *Measure, Integral and Probability*. Second Edition. Berlin: Springer-Verlag

Maccluer, B.D. (2009). *Elementary Functional Analysis.* First Edition. New York: Springer-Verlag.

Rynne, B.P. y Youngson, M.A. (2008). *Linear Functional Analysis*. Second Edition. London: Springer-Verlag.

Stein, E.M. y Shakarchi, R. (2005). *Real Analysis. Measure Theory*, Integration, y Hilbert Spaces. First Edition. New Jersey: Princeton University Press.