Visión Antataura
Vol.5, No.1: 67-74
Junio – Noviembre, 2021
Panamá
ISSN 2520-9892

Caracterización de los operadores de Fredholm vía la invertibilidad módulo un operador compacto

Characterization of Fredholm´s operators through invertibility module way, a compact operator

Zoila M. Rodríguez B.[1], *Jorge E. Hernández*[2]

[1] Maestría en Ciencias con Especialización en Matemática Pura; Profesora Titular, Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Panamá Oeste, Departamento de Matemática; zoilarodriguez26@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-0122-8608
[2] Doctorado en Análisis Funcional no Lineal; Profesor Titular, Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento de Matemática: edithleco@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-1153-1918

Resumen: En este artículo, se define la congruencia módulo un operador compacto y la invertibilidad módulo un operador compacto. Se presentan algunos ejemplos de operadores congruentes módulo un operador compacto y de operadores invertibles módulo un operador compacto. Se demuestran algunas propiedades de esta congruencia y se utilizan estos conceptos para demostrar una caracterización de los operadores de Fredholm, así como algunas propiedades algebraicas de estos operadores.

Palabras clave: Operadores compactos, operadores de Fredholm, congruencia, invertibilidad.

Abstract: In this paper, are defined the congruence module a compact operator and the invertibility module, a compact operator. Some examples of operators congruent module a compact operator and invertible operators module a compact operator are here presented. Some properties of this congruence are demostrated and these concepts were used to establish a characterization of the Fredholm operators, and some algebraic properties of these operators as well.

key words: Compact operators, Fredholm operators, congruency, invertibility.

1. Introducción:

Una hermosa generalización de los operadores lineales de rango finito son los operadores compactos. En este trabajo se enuncian algunas propiedades fundamentales de los operadores compactos (Pietsch, 2007); luego se define el concepto de congruencia módulo un operador compacto (Cascales, Mira, Orihuela y Raja, 2013) y se demuestran algunas propiedades de esta congruencia. Se introduce el concepto de invertibilidad módulo un operador compacto (Lax, 2002) y se prueba que la inversa módulo un operador compacto es única (Fernández, 2015). Por último, se utiliza el concepto de congruencia módulo un operador compacto con el propósito de

Fecha de recepción: 1 de febrero de 2021 *Fecha de aceptación: 14 de mayo de 2021*

probar una caracterización de los operadores de Fredholm (Ramm, 2001) y, algunas propiedades algebraicas de estos operadores (Takesaki, 2002).

2. Conceptos preliminares

Definición 2.1: Sean X, Y espacios normados y $T: X \to Y$ un operador lineal. T es un operador compacto, si para todo subconjunto acotado A de $X, T(A)$ es relativamente compacto en Y; es decir, $\overline{T(A)}$ es compacto en Y.

Teorema 2.2: Sean X, Y espacios normados y

$$K(X, Y) = \{T: X \to Y / \mathrm{T} \text{ es compacto}\}$$

$K(X, Y)$ es un espacio vectorial.

Teorema 2.3: Sea X un espacio normado, $K: X \to X$ un operador compacto y $L: X \to X$ un operador lineal acotado. Entonces KL y LK son compactos (Fernández, 2015).

Teorema 2.4: Sean X, Y espacios normados y $T: X \to Y$ un operador lineal. Si $\dim X < \infty$, entonces T es compacto (Cascales, Mira, Orihuela y Raja, 2013).

Definición 2.5: Sean X, Y espacios normados y $T: X \to Y$ un operador lineal acotado. T es un operador de Fredholm si $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y y $\dim\,(N(T)) < \infty$,

$codim(T(X)) < \infty$; es decir, si $T(X)$ es cerrado y

$$ind(T) := \dim\,(N(T)) - \,codim(T(X)) < \infty.$$

Teorema 2.6: Sea X un espacio de Banach, $I: X \to X$ el operador identidad y $T: X \to X$ un operador compacto. Entonces $L := I - T$ es un operador de Fredholm (Fetter y Gamboa, 2008).

Teorema 2.7: Sean X, Y espacios de Banach y $T: X \to Y$ un operador lineal acotado tal que

$$\dim\,(N(T)) < \infty \qquad \text{y} \qquad codim(T(X)) < \infty$$

Entonces T es un operador de Fredholm; o sea, $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y (Galaz, 2006).

3. Invertibilidad módulo un operador compacto

En lo que sigue $L(X, Y)$ denota el espacio de los operadores lineales acotados de X en Y, $K(X, Y)$ denota el espacio de los operadores compactos de X en Y, y $Fred(X, Y)$ el conjunto de los operadores de Fredholm de X en Y.

Definición 3.1: Sean X, Y espacios normados y $T, L \in L(X, Y)$. Diremos que T es **congruente** con L módulo un operador compacto si

$$T - L \in K(X, Y).$$

En este caso escribimos

$$T \equiv L \: mod \: K(X, Y).$$

Teorema 3.2: La congruencia módulo un operador compacto es una relación de equivalencia sobre $L(X, Y)$.

Demostración:

Esto es una consecuencia inmediata del teorema 2.2.

Teorema 3.3: Si $T \equiv L \: mod \: K(X, Y)$ y $T_1 \equiv L_1 \: mod \: K(Y, Z)$, entonces

$$T_1 T \equiv L_1 L \: mod \: K(X, Z).$$

Demostración:

Como $T \equiv L \: mod \: K(X, Y)$, entonces $T - L \in K(X, Y)$ y como T_1 es acotado, por teorema 2.3

$$T_1(T - L) \in K(X, Z),$$

de donde

$$T_1 T \equiv T_1 L \: mod \: K(X, Z) \qquad (1)$$

De igual forma, como $T_1 \equiv L_1 \: mod \: K(Y, Z)$, entonces $T_1 - L_1 \in K(Y, Z)$ y como L es acotado, por teorema 2.3

$$(T_1 - L_1)L \in K(X, Z),$$

de donde

$$T_1 L \equiv L_1 L \: mod \: K(X, Z) \qquad (2)$$

Luego por Teorema 3.2 $T_1 T \equiv L_1 L \: mod \: K(X, Z)$.

Definición 3.4: Sean X, Y espacios normados y $T: X \to Y$ un operador lineal acotado. Se dice que T es invertible módulo un operador compacto si existe un operador lineal acotado $T_1: Y \to X$ tal que

$$TT_1 \equiv I_Y \; mod \; K(Y,Y) \quad \text{y} \quad T_1T \equiv I_X \; mod \; K(X,X)$$

En este caso se dirá que T_1 es una inversa de T, módulo un operador compacto.

El siguiente teorema muestra que la inversa módulo un operador compacto, es única, módulo un operador compacto.

Teorema 3.5: Sean X, Y espacios normados y $T: X \to Y$ un operador lineal acotado. Si existen $T_1: Y \to X$ y $T_2: Y \to X$, tales que:

$$TT_1 \equiv I_Y \; mod \; K(Y,Y) \quad \text{y} \quad T_2T \equiv I_X \; mod \; K(X,X)$$

entonces T posee una inversa módulo un operador compacto y además

$$T_2 \equiv T_1 \; mod \; K(Y,X)$$

Demostración:

Como

$$TT_1 \equiv I_Y \; mod \; K(Y,Y) \quad \text{y} \quad T_2T \equiv I_X \; mod \; K(X,X)$$

se tiene que

$$T_2TT_1 \equiv T_2I_Y \; mod \; K(Y,X) \equiv T_2 \; mod \; K(Y,X)$$

y

$$T_2TT_1 \equiv I_XT_1 \; mod \; K(Y,X) \equiv T_1 \; mod \; K(Y,X)$$

por lo tanto

$$T_2 - T_2TT_1 \in K(Y,X) \quad \text{y} \quad T_2TT_1 - T_1 \in K(Y,X)$$

Por consiguiente, por el teorema 2.2 se tiene que

$$T_2 - T_2TT_1 + T_2TT_1 - T_1 \in K(Y,X)$$

o sea

$$T_2 - T_1 \in K(Y,X)$$

así pues,

$$T_2 \equiv T_1 \; mod \; K(Y,X)$$

Se ha probado así que la inversa es única módulo un operador compacto.

4. Aplicaciones de la congruencia módulo un operador compacto

A continuación, se utilizará la congruencia módulo un operador compacto para probar una caracterización de los operadores de Fredholm y algunas propiedades del conjunto $Fred(X,Y)$ en espacios de Banach.

Teorema 4.1: Sean X, Y espacios de Banach y $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado. T es un operador de Fredholm si y sólo si T es invertible módulo un operador compacto.

Demostración:

Sea $T: X \rightarrow Y$ un operador de Fredholm, entonces se puede **e**scribir

$$X = N(T) \oplus G \quad \text{y} \quad Y = T(X) \oplus H$$

donde G es un subespacio cerrado de X y H es un subespacio cerrado de Y y

$$dim(N(T)) < \infty, \quad dim(H) < \infty \qquad \text{(Fabián, 2001).}$$

Se denota por P la proyección de $T(X) \oplus H$ sobre $T(X)$ y j la inyección natural de G en X. Recordar que por el Teorema de la Función Abierta (Lax, 2002),

$$T: G \rightarrow T(X) = T(G)$$

es un isomorfismo, luego $T^{-1}: T(X) \rightarrow G$ existe como un operador lineal acotado. Considerar el operador lineal acotado $S: Y \rightarrow X$ definido por

$$S = jT^{-1}P$$

$$Y = T(X) \oplus H \xrightarrow{P} T(X) \xrightarrow{T^{-1}} G \xrightarrow{j} X$$

note que

$$TS = TjT^{-1}P = TT^{-1}P = P$$

luego

$$I_Y - TS: Y \rightarrow H$$

es la proyección $T(X) \oplus H$ sobre H.

De igual manera $ST: N(T) \oplus G \rightarrow G$ es la proyección de $N(T) \oplus G$ sobre G por lo tanto $I_X - ST$ es la proyección de $N(T) \oplus G$ sobre $N(T)$.

Como H y $N(T)$ son subespacios de dimensión finita, por el teorema 2.4, se tiene que

$$I_Y - TS \in K(Y,Y) \quad \text{y} \quad I_X - ST \in K(X,X)$$

por lo tanto

$$TS \equiv I_Y \; mod \; K(Y,Y) \quad \text{y} \quad ST \equiv I_X \; mod \; K(X,X)$$

así pues, S es una inversa de T módulo un operador compacto.

Recíprocamente, se debe suponer que S es una inversa de T módulo un operador compacto, luego

$$TS \equiv I_Y \; mod \; K(Y,Y) \quad \text{y} \quad ST \equiv I_X \; mod \; K(X,X)$$

por lo tanto

$$I_Y - TS \in K(Y,Y) \quad \text{y} \quad I_X - ST \in K(X,X)$$

luego por el teorema 2.6.

$$I_Y - (I_Y - TS) \in Fred(Y,Y) \quad \text{y} \quad I_X - (I_X - ST) \in Fred(X,X)$$

o sea

$$TS \in Fred(Y,Y) \quad \text{y} \quad ST \in Fred(X,X)$$

$$N(T) \subset N(ST) \quad \text{y} \quad T(X) \supset (TS)(X)$$

se tiene que

$$\dim\,(N(T)) < \infty \quad \text{y} \quad codim(T(X)) < \infty$$

Luego como X, Y son espacios de Banach, por el teorema 2.7 T es un operador de Fredholm.

Los siguientes resultados son consecuencia del teorema anterior.

Corolario 4.2: Sea X, Y espacios de Banach, $T: X \to Y$ un operador lineal acotado. T es un operador de Fredholm si y sólo si, existe un operador lineal acotado $S: Y \to X$ tal que $I_X - ST$ y $I_Y - TS$ son compactos.

Corolario 4.3: Sean X, Y, Z espacios de Banach y $T: X \to Y$, $L: Y \to Z$ operadores de Fredholm. Entonces $LT: X \to Z$ es un operador de Fredholm.

Demostración:

Como $T \in Fred(X,Y)$ y $L \in Fred(Y,Z)$, existen operadores lineales acotados $T_1: Y \to X$ y $L_1: Z \to Y$ tales que

$$TT_1 \equiv I_Y \; mod \; K(Y,Y) \quad \text{y} \quad T_1T \equiv I_X \; mod \; K(X,X)$$

$$LL_1 \equiv I_Z \; mod \; K(Z,Z) \quad \text{y} \quad L_1L \equiv I_Y \; mod \; K(Y,Y)$$

Luego

$$LTT_1 \equiv LI_Y \; mod \; K(Y,Z)$$

o sea

$$LTT_1 \equiv L \; mod \; K(Y,Z)$$

Por lo tanto

$$LTT_1L_1 \equiv L \, L_1 mod \; K(Z,Z)$$

y

$$(LT)(T_1L_1) \equiv I_Z mod \; K(Z,Z)$$

De igual forma se prueba que

$$(T_1L_1)(LT) \equiv I_X mod \; K(X,X)$$

Así pues T_1L_1 es una inversa de LT módulo un operador compacto. Luego, por el teorema 4.1, LT es un operador de Fredholm.

Para finalizar, se puntualiza que la suma de operadores de Fredholm no necesariamente es un operador de Fredholm. Pero si a un operador de Fredholm se le suma un operador compacto en un espacio de Banach, entonces la suma es un operador de Fredholm como lo muestra el siguiente corolario.

Corolario 4.4: Sean X, Y espacios de Banach y $T: X \to Y$ un operador de Fredholm y $L: X \to Y$ un operador compacto. Entonces $T + L: X \to Y$ es un operador de Fredholm.

Demostración:

Como $T: X \to Y$ es un operador de Fredholm, por el teorema 4.1 existe un operador lineal acotado $T_1: Y \to X$ tal que

$$TT_1 \equiv I_Y \; mod \; K(Y,Y) \quad \text{y} \quad T_1T \equiv I_X \; mod \; K(X,X)$$

o sea

$$TT_1 - I_Y \in K(Y,Y) \quad \text{y} \quad T_1T - I_X \in K(X,X)$$

Como $L: X \to Y$ es un operador compacto, por el teorema 2.3, se tiene que

$$LT_1: Y \to Y \quad \text{y} \quad T_1L: X \to X$$

son operadores compactos. Por lo tanto, por el teorema 2.2

$$TT_1 - I_Y + LT_1 \in K(Y,Y) \quad \text{y} \quad T_1T - I_X + T_1L \in K(X,X)$$

o sea

$$(T+L)T_1 - I_Y \in K(Y,Y) \qquad \text{y} \qquad T_1(T+L) - I_X \in K(X,X)$$

lo que implica que

$$(T+L)T_1 \equiv I_Y \; mod \; K(Y,Y) \qquad \text{y} \qquad T_1(T+L) \equiv I_X \; mod \; K(X,X)$$

Así pues, T_1 es una inversa de $T+L$ módulo un operador compacto. Luego, por el teorema 4.1, $T+L$ es un operador de Fredholm.

Referencias bibliográficas

Cascales, B., Mira, J., Orihuela, J., Raja, M. (2013). *Análisis funcional*. Murcia: Ediciones Electolibris, S.L.

Fabian, M., Habala, P., Hajek, P., Montesinos Santalucia, V., Pelant, J., Zizler, V. (2001). *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*. New York: Springer-Verlag.

Fernández, C. (2015). *Introducción a los espacios de Hilbert, operadores y espectros*. Madrid: Editorial UNED.

Fetter, H. y Gamboa, B. (2008). *Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach*. México: CIMAT.

Galaz, F. (2006). *Elementos de análisis funcional*. México: CIMAT.

Lax, P. D. (2002). *Functional analysis*. New York: Wiley-Interscience.

Pietsch, A. (2007). *History of Banach spaces and linear operators*. Boston: Birkhäuser.

Ramm, A. (2001). A simple proof of the Fredholm alternative and a characterization of the Fredholm operators. *The American Mathematical Monthly 108*(9*),* 855-860.

Takesaki, M. (2002). *Theory of operator algebras I*. New York: Springer-Verlag.