Visión Antataura
Vol.5, No.2: 83-96
Diciembre 2021 - Mayo 2022
Panamá
ISSN 2520-9892

Determinantes: historia y resultados especiales

Determinants: history and special results

Alicia M. Delgado de Brandao[1], Yanina del Carmen Rodríguez Reyes[2], Ubaldino Sandoval Moreno[3], Temístocles Zeballos Mitre[4]

[1] Maestría en Ciencias con Especialización en Matemática Educativa; Profesora, Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Departamento de Matemática, Panamá; aliciadelgado0719@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-4999-554X
[2] Maestría en Ciencias con Especialización en Matemática Educativa; Profesora, Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Departamento de Matemática, Panamá; rryanina06@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-4757-950X
[3] Maestría en Dificultades en el Aprendizaje de la Matemática; Profesor, Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Departamento de Matemática, Panamá; ubasando@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-2171-9703
[4] Maestría en Matemática Pura; Profesor, Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Departamento de Matemática, Panamá; temizeballos@gmail.com; https://orcid.org/0000-0002-1557-5769

Resumen: En este artículo, se presenta la evolución histórica del concepto de determinante; se definen las matrices de Hadamard y matrices de Hadamard normalizadas; también se define el determinante de una matriz cuadrada. Se presentan algunos ejemplos de determinantes máximos de Hadamard y se exhibe la relación entre los determinantes máximos de matrices con elementos ceros y unos, y los determinantes de Hadamard. Finalmente, se presenta el determinante de Vandermonde.

Palabras clave: Historia de los determinantes, determinante máximo de Hadamard, determinante de Vandermonde.

Abstract: This paper shows the historical evolution of the concept of determinants. The Hadamard's matrices, the normalized Hadamard's matrices, and the determinant of a square matrix are also defined. Some examples of Hadamard's maximum determinants are presented, and we exhibit the relationship between the maximum determinants of matrices whose elements are zero and one, and the Hadamard's determinants. Finally, the Vandermonde determinant is presented.

Key words: History of the determinants, Hadamard's maximum determinant, Vandermonde determinant.

1. Introducción

En la actualidad la definición de determinante está ligada a una matriz cuadrada, lo que puede hacer pensar que el origen del determinante fue posterior al de las matrices; sin embargo, ambos tuvieron orígenes diferentes. De hecho, los determinantes aparecieron antes que las matrices (Kleiner, 2007). Su desarrollo conceptual estuvo estrechamente relacionado con las

Fecha de recepción: 02 de octubre de 2021 *Fecha de aceptación: 22 de noviembre de 2021*

ecuaciones lineales. Existe toda una teoría de determinantes desarrollada antes que la teoría matricial.

Sobre los determinantes existen estudios muy sobresalientes, como los realizados por Hadamard para acotar el valor del determinante de ciertas matrices que actualmente llevan su apellido; los realizados por John Williamson en analogía a los estudios de Hadamard para cuando el orden de la matriz no es múltiplo de cuatro y quizás el más conocido: el determinante de Vandermonde. Cabe indicar que la teoría de los determinantes tiene un campo amplio de aplicación en Matemática e Ingeniería.

2. Historia

Los orígenes de los determinantes se remontan al siglo IV a. C.; sin embargo, su desarrollo debió esperar hasta finales del siglo XVII donde reaparecieron las ideas y se logra realmente un avance. Los babilonios estudiaron problemas que conducen a ecuaciones lineales simultáneas y donde surgen los inicios de los determinantes. Mientras que los chinos, alrededor del siglo II a. C. se aproximan mucho más que los babilonios al estudio matricial y existen evidencias de algoritmos similares al conocido actualmente como eliminación gaussiana (Grattan-Guinness, 1994).

Girolamo Cardano, en su Ars Magna (1545), da una regla para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, esta regla se acerca mucho a la regla de Cramer para resolver un sistema 2×2; aunque Cardano no da la definición de determinante, su método sí conduce a la definición.

En 1683, Takakazu Seki escribió "Method of solving the dissimulated problems" donde sin tener ninguna palabra que corresponda a "determinante" introdujo los determinantes y además, exhibe métodos generales, a través de ejemplos, para calcular determinantes de matrices de tamaño $2\times 2,\ 3\times 3,\ 4\times 4,\ 5\times 5$.

En 1693, Gottfried Leibniz le escribió a Guillaume de L'Hôpital y le explica, mediante un ejemplo, que un sistema de ecuaciones tenía solución debido a una condición similar al hecho de que la matriz de coeficientes tenga determinante distinto de cero (Muir, 1906). En su estudio de los sistemas de coeficientes de ecuaciones que lo llevaron a los determinantes, usó la palabra "resultante" para ciertas sumas combinatorias de términos de un determinante. Demostró, entre otros resultados, lo que se conoce como la regla de Cramer. También utilizó el hecho que un determinante podía expandirse usando cualquier columna, lo cual se conoce actualmente como expansión de Laplace.

En la década de 1730, Colin Maclaurin escribió “Treatise of algebra”; obra que contiene los primeros resultados publicados sobre determinantes que demuestran la regla de Cramer para sistemas 2×2 y 3×3, y además indica cómo funcionaría el caso 4×4. Gabriel Cramer presentó la regla general para sistemas $n\times n$ en su artículo “Introduction to the analysis of algebraic curves” en 1750; sin embargo, no dio la demostración de la misma.

La comunidad matemática comienza a interesarse mucho más sobre el estudio de los determinantes y en 1764 Étienne Bézout presenta métodos para calcular determinantes, al igual que Alexandre-Theophile Vandermonde en 1771 (Muir, 1906). En 1772 Pierre-Simon Laplace presenta un artículo donde estudia la solución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando determinantes. Laplace utiliza la palabra “resultante” para lo que ahora llamamos determinante y dio la expansión de un determinante que lleva su nombre.

Carl Friedrich Gauss introdujo por primera vez el término “determinante” el cual aparece en su obra “Disquisitiones arithmeticae” (1801) mientras discutía las formas cuadráticas; sin embargo, el concepto presentado por Gauus no es el mismo que el concepto actual de determinante.

Es Augustin-Louis Cauchy, en 1812, quien utilizó el término “determinante” en su sentido moderno; realizó un trabajo más completo sobre determinantes: probó los resultados anteriores y presentó nuevos resultados sobre menores y adjuntos, demuestra por primera vez el teorema de multiplicación para determinantes.

Carl Gustav Jacob Jacobi publicó tres tratados sobre determinantes en 1841, en los cuales da a conocer ampliamente la idea de determinante y presenta por primera vez la definición de determinante de manera algorítmica y al no especificar las entradas en el determinante, sus resultados tuvieron una mayor aplicación.

La notación estándar para denotar los determinantes se le debe al matemático inglés Arthur Cayley, quien la utilizó en 1841. Además, en 1858, dio una construcción explícita de la inversa de una matriz en términos del determinante de la matriz (Muir, 1911).

Karl Weierstrass utilizó una definición axiomática de determinante en sus notas “On determinants theory” que fueron publicadas póstumamente en 1903. También en 1903 fueron publicadas las notas sobre determinantes de Leopold Kronecker (después de su muerte). Estas dos publicaciones dan inicio a la teoría moderna de los determinantes.

3. Determinante máximo de Hadamard

En 1893 Jacques Hadamard planteó el problema del valor máximo de un determinante de orden n cuyos elementos en valor absoluto son menores o iguales a 1, además probó que dicho valor es $n^{\frac{n}{2}}$ y que esta cota sólo se puede alcanzar si los elementos de la matriz son 1 y -1 y si n es 1, 2 o un múltiplo de 4 (Hadamard, 1893).

Definición 3.1: Se llama matriz de tamaño $m \times n$, constituida por escalares de un cuerpo K, a cualquier tabla rectangular A formada por $m \cdot n$ escalares, dispuestos en m filas y n columnas. Se llama elemento de lugar (i, j) o ij de A al escalar que está situado en la intersección de la fila $i-\text{ésima}$ y la columna $j-\text{ésima}$; si a este elemento se le llama a_{ij}, abreviadamente la matriz se suele escribir $A = \left[a_{ij}\right]$.

Definición 3.2: Sea H una matriz de orden n. H es una matriz de Hadamard si sus elementos son 1 ó -1 y dos cualesquiera filas distintas son ortogonales.

Definición 3.3: Una matriz de Hadamard cuya primera fila y primera columna están formada sólo por 1, se llama matriz de Hadamard normalizada.

Observaciones 3.1:

- De la definición de matriz de Hadamard se desprende que es imposible la existencia de este tipo de matrices cuando $n > 1$ es impar.
- Si una matriz de Hadamard H_n existe, entonces n es 1, 2 o un múltiplo de 4.
- La conjetura de Hadamard: Pruebe que una matriz de Hadamard existe si n es 1, 2 o un múltiplo de 4. Esta conjetura es uno de los problemas abiertos más antiguos en Matemática.

Ejemplos 3.1: Las matrices H_1, H_2, H_4 son matrices de Hadamard de orden 1, 2 y 4 respectivamente

$$H_1 = [1] \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definición 3.4: Si A es una matriz cuadrada, entonces el menor M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz obtenida al suprimir la $i-ésimo$ fila y $j-ésima$ columna de A. El cofactor C_{ij} está dado por $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Definición 3.5: Si A es una matriz cuadrada de orden $n \geq 2$, el determinante de A es la suma de los elementos en la primera fila de A multiplicados por sus cofactores. Es decir,

$$\det(A) = |A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \cdots + a_{1n}C_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}C_{1j} .$$

Ejemplos 3.2: A continuación se calcula $|H_2|$ y $|H_4|$.

$$\det(H_2) = |H_2| = h_{11}C_{11} + h_{12}C_{12} = 1(-1)^2 M_{11} - 1(-1)^3 M_{12} = 1(-1)^2 |1| - 1(-1)^3 |1| = 1 + 1 = 2 .$$

$$\begin{aligned} \det(H_4) = |H_4| &= h_{11}C_{11} + h_{12}C_{12} + h_{13}C_{13} + h_{14}C_{14} \\ &= 1(-1)^2 M_{11} + 1(-1)^3 M_{12} - 1(-1)^4 M_{13} - 1(-1)^5 M_{14} \\ &= M_{11} - M_{12} - M_{13} + M_{14} \end{aligned}$$

donde

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{14} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Se presentan los cálculos para M_{11}, los demás se realizan de forma similar.

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= -1(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -2\left\{1(-1)^2|1| + 1(-1)^3|-1|\right\} - \left\{1(-1)^2|-1| + 1(-1)^3|-1|\right\} \\
&= -2\left\{1 - |-1|\right\} - \left\{|-1| - |-1|\right\} \\
&= -2\left\{1 - (-1)\right\} - \left\{-1 - (-1)\right\} \\
&= -2\{2\} - \{0\} \\
&= -4
\end{aligned}
$$

Nótese que la expresión $|-1|$ no debe confundirse con el valor absoluto de -1.

$M_{12} = 4, \quad M_{13} = 4, \quad M_{14} = -4$.

Luego, $\det(H_4) = |H_4| = M_{11} - M_{12} - M_{13} + M_{14} = -4 - 4 - 4 - 4 = -16$.

Ejemplo 3.3: Las matrices H_8 y H_{12} y sus respectivos determinantes se presentan a continuación

$$
H_8 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1
\end{bmatrix}, \qquad |H_8| = 4096 = 8^4
$$

$$H_{12}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}, \qquad \left|H_{12}\right| = 2985984 = 12^6$$

Las matrices de Hadamard de orden 1, 2, 4, 8 y 12 son únicas (salvo isomorfismo). Existen cinco matrices de Hadamard distintas de orden 16 y tres matrices de Hadamard distintas de orden 20 (Hedayat, Sloane, Stufken, 1999).

4. Determinantes con elementos 0 y 1.

Es natural preguntarse si para matrices de orden impar se puede encontrar alguna cota similar a lo planteado por Hadamard, al menos para los primeros casos particulares y si existe alguna relación entre estas matrices y matrices de menor orden cuyos elementos son ceros y unos.

Definición 4.1: Dos matrices A_n y A_n' son equivalentes, lo cual se denota por $A_n \approx A_n'$, si una se puede obtener de la otra por un número finito de las siguientes operaciones:

1. Intercambiar dos filas cualesquiera.
2. Transposición de la matriz.
3. Multiplicar una fila cualquiera por -1.

Observación 4.1: Nótese que si $A_n \approx A_n'$, entonces $\left|\det\left(A_n\right)\right| = \left|\det\left(A_n'\right)\right|$.

Solamente existen dos matrices no equivalentes B_2 y B_2' cuyos determinantes tienen valor 1:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considérese la matriz $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, cuyo $|A_3| = 4$.

A partir de A_3, se obtiene A_3' sumando la primera columna a las otras dos:

$$A_3' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

El determinante de A_3' es: $|A_3'| = 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(2)(2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Observación 4.2: $\det(A_3) = \det\left(A_3'\right) = 2^2 |B_2'|$, donde $|B_2'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Por lo tanto, el valor máximo para $\det(A_3) = 4$ y para $\det(B_2) = \det(B_2') = 1$ (Williamson, 1946).

Ahora, se toma la matriz $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Por analogía a lo realizado con A_3, se obtiene $A_4' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$|A_4| = |A_4'| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2^3|B_3|$, donde $B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si bien el determinante de B_3 es -2, en valor absoluto se tiene un máximo para B_3 y por lo tanto para A_4.

Considérese la matriz $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, cuyo $|A_5| = 32$.

Similar a la construcción anterior, se encuentra que $A_5' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

El determinante de A_5' es:

$$\left|A_5'\right| = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2^4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Observación 4.3: $\det\left(A_5\right) = \det\left(A_5'\right) = 2^4\left|B_4\right|$, donde $\left|B_4\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

Con la matriz A_5 no se alcanza un valor máximo para su determinante. Haciendo un proceso similar para las siguientes matrices, se obtiene:

$$A_5^{*} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_5^{**} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|A_5^*\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2^4 \times \left|B_4^*\right| = 2^4 \times 3 = 48 .$$

$$\left|A_5^{**}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2^4 \times \left|B_4^{**}\right| = 2^4 \times (-3) = -48 .$$

Nótese que B_4^* y B_4^{**} no son equivalentes.

Al considerar la matriz $A_5^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, resulta:

$$\left|A_5^\dagger\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2^4 \left|B_4^\dagger\right| = 2^4 \times 3 = 48 .$$

El valor máximo para el determinante de una matriz de orden cinco (de la forma descrita) es 48 y el valor máximo para la correspondiente matriz de orden cuatro es 3 (Williamson, 1946).

Para el análisis de los determinantes de las matrices de orden seis, considérense las siguientes:

$$A_6=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1&-1&1\\1&1&1&1&1&-1\\1&-1&-1&1&1&1\\1&-1&1&-1&1&1\\1&-1&1&1&-1&1\end{bmatrix},\quad A_6'=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&1&1&-1&-1&1\\1&1&1&1&1&-1\\1&1&-1&1&1&1\\1&-1&1&-1&1&1\\1&-1&1&1&-1&1\end{bmatrix},\quad A_6''=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&-1&1&1&1&1\\1&1&1&-1&-1&1\\1&1&-1&1&-1&1\\1&1&-1&-1&1&1\\1&1&1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$|A_6|=\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1&-1&1\\1&1&1&1&1&-1\\1&-1&-1&1&1&1\\1&-1&1&-1&1&1\\1&-1&1&1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&2&0&0&0&2\\1&2&2&2&2&0\\1&0&0&2&2&2\\1&0&2&0&2&2\\1&0&2&2&0&2\end{vmatrix}=2^5\begin{vmatrix}1&0&0&0&1\\1&1&1&1&0\\0&0&1&1&1\\0&1&0&1&1\\0&1&1&0&1\end{vmatrix}=2^5|B_5|=2^5\times 5=160.$$

$$|A_6'|=\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&1&1&-1&-1&1\\1&1&1&1&1&-1\\1&1&-1&1&1&1\\1&-1&1&-1&1&1\\1&-1&1&1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&2&2&0&0&2\\1&2&2&2&2&0\\1&2&0&2&2&2\\1&0&2&0&2&2\\1&0&2&2&0&2\end{vmatrix}=2^5\begin{vmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&1&1&0\\1&0&1&1&1\\0&1&0&1&1\\0&1&1&0&1\end{vmatrix}=2^5|B_5'|=2^5\times 5=160.$$

$$|A_6''|=\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&-1&1&1&1&1\\1&1&1&-1&-1&1\\1&1&-1&1&-1&1\\1&1&-1&-1&1&1\\1&1&1&1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&0&2&2&2&2\\1&2&2&0&0&2\\1&2&0&2&0&2\\1&2&0&0&2&2\\1&2&2&2&2&0\end{vmatrix}=2^5\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&1&0&0&1\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\\1&1&1&1&0\end{vmatrix}=2^5|B_5''|=2^5\times 5=160.$$

El valor máximo para el determinante de una matriz de orden seis (de la forma descrita) es 160 y el valor máximo para la correspondiente matriz de orden cinco, es 5 (Williamson, 1946).

Se finaliza esta sección, con los determinantes de matrices de orden siete; considerando las siguientes matrices:

$$A_7=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1&-1&1&1\\1&-1&1&1&1&1&-1\end{bmatrix},\qquad A_7'=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&1&1&-1&1&1&-1\\1&1&-1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1&-1&1&1\\1&-1&1&1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$A_7''=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&1&1&1&1&-1&-1\\1&1&1&-1&-1&1&1\\1&-1&-1&1&1&1&1\\1&1&-1&1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1&1&-1&1\\1&-1&1&1&-1&-1&1\end{bmatrix}.$$

Procediendo de forma análoga a los anteriores, se obtiene:

$$|A_7|=2^6\begin{vmatrix}1&0&0&1&1&0\\0&0&1&1&1&1\\1&1&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\\0&1&1&1&1&0\end{vmatrix}=2^6|B_6|=2^6\times 9=576\,.$$

$$|A_7'|=2^6\begin{vmatrix}1&1&0&1&1&0\\1&0&1&1&1&1\\1&1&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\\0&1&1&1&1&0\end{vmatrix}=2^6|B_6'|=2^6\times 9=576\,.$$

$$\left|A_7''\right| = 2^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2^6 \left|B_6''\right| = 2^6 \times (-8) = -512 .$$

El valor máximo para el determinante de una matriz de orden siete (de la forma descrita) es 576 y el valor máximo para la correspondiente matriz de orden seis, es 9 (Williamson, 1946).

En las construcciones anteriores se encontró que $\left|A_n\right| = 2^{n-1}\left|B_{n-1}\right|$. Si se considera a A_n como una matriz de Hadamard normalizada, se tiene que el determinante de la matriz de Hadamard es el producto de 2^{n-1} por el determinante de una matriz de orden $n-1$ cuyos elementos son ceros y unos.

4. Determinante de Vandermonde

Considérese el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & b & c & \cdots & k \\ a^2 & b^2 & c^2 & \cdots & k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \cdots & k^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Restando a cada fila la anterior multiplicada por a, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b-a & c-a & \cdots & k-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & \cdots & k(k-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & b^{n-2}(b-a) & c^{n-2}(c-a) & \cdots & k^{n-2}(k-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\cdots(k-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & c & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b^{n-2} & c^{n-2} & \cdots & k^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Aplicando el mismo procedimiento, al determinante de la derecha y sucesivamente a los determinantes que se vayan obteniendo, se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & b & c & \cdots & k \\ a^2 & b^2 & c^2 & \cdots & k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \cdots & k^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (b-a)(c-a)\cdots(k-a)\cdot \\ \quad (c-b)\cdots(k-b)\cdot \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots \\ \quad\quad\quad \cdots\cdots \end{array}$$

(Burgos,2006).

Ejemplo 4.1: Aplicando la fórmula anterior al siguiente determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 8 \\ 3^2 & 5^2 & 4^2 & 7^2 & 8^2 \\ 3^3 & 5^3 & 4^3 & 7^3 & 8^3 \\ 3^4 & 5^4 & 4^4 & 7^4 & 8^4 \end{vmatrix} = (5-3)(4-3)(7-3)(8-3)(4-5)(7-5)(8-5)(7-4)(8-4)(8-7)$$
$$= 2\times 1\times 4\times 5\times(-1)\times 2\times 3\times 3\times 4\times 1 = -2880$$

Referencias bibliográficas

De Burgos, J. (2006). *Álgebra lineal y geometría cartesiana*. McGraw-Hill.

Grattan-Guinness, I. (1994). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Vol. 1 & 2. Routledge.

Hadamard, J. (1893). Résolution d'une question relative aux determinants. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, vol. *17*, Part I.

Hedayat, A.S., Sloane, N.J.A., Stufken, J. (1999). *Orthogonal Arrays: Theory and Applications.* Springer-Verlag.

Kleiner, I. (2007). *A History of Abstract Algebra*. Birkhauser.

Muir, T. (1906). *The Theory of determinants in the historical order of development*. Vol. 1. Macmillan company.

Muir, T. (1911). *The Theory of determinants in the historical order of development*. Vol. 2. Macmillan company.

Williamson, J. (1946). Determinants whose Elements are 0 and 1. *The American Mathematical Monthly*, *53* (8), 427-434.