Visión Antataura
Vol.2, No.2: 64-76
Diciembre 2018 - Mayo 2019
Panamá
ISSN 2520-9892

Operadores Fuertes de Fredholm

Fredholm Strong Operators

Zoila M. Rodríguez B.[1], *Jorge E. Hernández U.*[2]

[1]Magister en Matemática Pura; Profesora, Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Panamá Oeste, Departamento de Matemática; zoilarodriguez26@gmail.com
[2]Ph.D. en Análisis Funcional No lineal; Profesor, Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento de Matemática; edithleco@gmail.com

Resumen: El objetivo de este artículo es estudiar una clase especial de operadores en espacios de Hilbert, los cuales llamaremos Operadores Fuertes de Fredholm, y demostrar un resultado que nos permita construir estos operadores, el cual se fundamenta en la bien conocida alternativa de Fredholm para el caso de sistemas de ecuaciones lineales.

Palabras clave: Operadores lineales acotados, alternativa de Fredholm, espacios de Hilbert, operadores fuertes de Fredholm.

Abstract: The objective of this paper is to study a special class of operators in Hilbert spaces, which we will call Fredholm Strong Operators, and to show a result that allows us to construct these operators, which is based on the well-known Fredholm alternative for the case of systems of linear equations.

Key words: Bounded linear operators, Fredholm alternative, Hilbert spaces, Fredholm strong operators.

1. Introducción

Una manera interesante de visualizar los operadores compactos es mostrar que el conjunto de los operadores compactos es la clausura del conjunto de los operadores lineales de rango finito con la norma fuerte de los operadores. Una propiedad de los operadores de rango finito que no se generaliza bajo este análisis es el teorema del algebra lineal que dice que si $T: X \to Y$ es un operador lineal, entonces

$$\dim\big(N(T)\big) - codim\big(T(X)\big) = \dim(X) - \dim(Y)$$

Este problema nos lleva a estudiar los operadores de Fredholm y los operadores fuertes de Fredholm.

Iniciaremos este artículo con la presentación de algunos resultados fundamentales de los operadores lineales acotados en espacios de Hilbert y la definición del índice de un operador, necesarios para probar ciertas propiedades de los operadores de

Fecha de recepción: 16 de agosto de 2018 *Fecha de aceptación: 15 de octubre de 2018*

Fredholm. Posteriormente se definen los operadores fuertes de Fredholm y se muestran algunos ejemplos de operadores fuertes de Fredholm. Por último, se prueba un resultado que permite construir operadores fuertes de Fredholm, a partir de un isomorfismo y un operador lineal acotado de rango finito.

2. Resultados fundamentales de los operadores lineales acotados en espacios de Hilbert

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $T: H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal acotado. El operador adjunto de Hilbert (o simplemente operador adjunto) T^*: $H_2 \rightarrow H_1$ de T se define por la propiedad

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

Para todo $x \in H_1$, $y \in H_2$ (Kubrusly, 2000), (Fernández, 2015).

El operador adjunto T^*: $H_2 \rightarrow H_1$ es un operador lineal acotado que satisface las siguientes propiedades:

$$\overline{T(H_1)}^{\perp} = T(H_1)^{\perp} = N(T^*)$$

$$\overline{T(H_1)}^{\perp\perp} = T(H_1) = N(T^*)^{\perp}$$

$$\overline{T^*(H_2)}^{\perp} = N(T)$$

$$\overline{T^*(H_2)} = N(T)^{\perp}$$

Además

$$H_1 = \overline{T^*(H_2)} \oplus N(T)$$

$$H_2 = \overline{T(H_1)} \oplus N(T^*)$$

Teorema 2.1: Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $T: H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal acotado de rango finito. Entonces el operador adjunto T^*: $H_2 \rightarrow H_1$ es un operador de rango finito y

$$dim\big(T(H_1)\big) = dim(T^*(H_2))$$

Demostración:

Consideremos una base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n \}$ para $T(H_1)$, entonces

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle Tx, e_i \rangle \, e_i$$

para todo $x \in H_1$. Luego

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, T^* e_i \rangle \, e_i$$

Además, como para todo $x \in H_1$, $y \in H_2$

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, T^* e_i \rangle \, e_i, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, T^* e_i \rangle \, \langle e_i, y \rangle$$

y

$$\langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle \, T^* e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle y, e_i \rangle} \langle x, T^* e_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle x, T^* e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$$

se tiene que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, T^* e_i \rangle e_i, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle \, T^* e_i \rangle$$

por lo tanto

$$T^* y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle \, T^* e_i$$

para todo $y \in H_2$. Esto implica que T^* es un operador lineal acotado de rango finito y

$$\dim(T^*(H_2)) \leq \dim(T(H_1))$$

Finalmente, como $T^{**} = T$ y T^* es de rango finito, se tiene que

$$\dim\big(T(H_1)\big) = \dim(T^{**}(H_1)) \leq \dim(T^*(H_2))$$

por lo tanto

$$\dim\big(T(H_1)\big) = \dim(T^*(H_2))$$

Definición 2.2: Sean X, Y espacios vectoriales y $T: X \to Y$ un operador lineal. El **índice** de T se denota por $ind(T)$ y se define por:

$$ind(T) \coloneqq \dim\big(N(T)\big) - codim(T(X))$$

Suponiendo que no existe el caso patológico $\infty - \infty$.

El operador T se dice de índice finito, si $\dim\big(N(T)\big) < \infty$, $codim(T(X)) < \infty$ (Fabian, 2001).

Definición 2.3: Sean X, Y espacios normados sobre K y $T: X \to Y$ un operador lineal acotado. T es un operador de Fredholm si $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y y $\dim\big(N(T)\big) < \infty$, $codim(T(X)) < \infty$; es decir, si $T(X)$ es cerrado y $ind(T) < \infty$.

Teorema 2.4: Sean X, Y espacios de Banach y $T: X \to Y$ un operador lineal acotado tal que

$$\dim\big(N(T)\big) < \infty \quad y \quad codim(T(X)) < \infty$$

Entonces T es un operador de Fredholm; o sea, $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y (Giles, 2000), (Ramm, 2001).

Teorema 2.5: Sean X, Y espacios de Banach. Si $T: X \to Y$ es un operador de Fredholm y $L: X \to Y$ es un operador compacto. Entonces $T + L$ es un operador de Fredholm (Saxe, 2000).

Teorema 2.6: Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert, $T: H_1 \to, H_2$ un operador lineal biyectivo y $L: H_1 \to, H_2$ un operador compacto. Entonces $T + L$ es un operador de Fredholm.

Teorema 2.7: Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert, $T: H_1 \to, H_2$ un operador lineal acotado. T es un operador de Fredholm, si y sólo si, existen operadores lineales acotados $L_1, L_2: H_2 \to H_1$ y operadores compactos $K_1: H_1 \to H_1$ y $K_2: H_2 \to H_2$ tales que:

$$L_1 T = I + K_1 \qquad \text{y} \quad TL_2 = I - K_2$$

Ejemplo 2.8: Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert de dimensión finita y $T: H_1 \to, H_2$ un operador de Fredholm. Entonces por el teorema de las dimensiones, se tiene que:

$$dim(H_1) = dim\big(N(T)\big) + dim(T(H_1))$$

y

$$codim\,\big(T(H_1)\big) = dim(H_2 \ / \, T(H_1)) = dim(H_2) - dim(T(H_1))$$

Por lo tanto,

$$ind(T) = dim\big(N(T)\big) + codim\big(T(H_1)\big) = dim(H_1) - dim(H_2)$$

Teorema 2.9: Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert y $T: H_1 \to, H_2$ un operador lineal acotado. T es un operador de Fredholm si y sólo si existe un operador lineal acotado

$L: H_2 \to H_1$ tal que $LT - I_{H_1}$ y $TL - I_{H_2}$ son operadores de rango finito.

3. Operadores fuertes de Fredholm

Definición 3.1: Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $T: H_1 \to H_2$ un operador lineal acotado. T es un operador **fuerte de Fredholm** si $ind(T) = 0$ y $T^*(H_2)$ es cerrado en H_1.

Observación: Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $T: H_1 \to H_2$ un operador fuerte de Fredholm. Como $ind(T) = 0$, entonces $\dim\big(N(T)\big) < \infty$, $codim(T(H_1)) < \infty$ y

$$n \coloneqq \dim\big(N(T)\big) = codim(T(H_1))$$ (Kesavan, 2009), (Fernández, 2015).

Luego por el teorema 2.4, $T(H_1)$ es un subespacio cerrado de H_2 y T es un operador de Fredholm. Además

$$H_2 = T(H_1) \oplus N(T^*) \quad \text{y} \quad H_1 = T^*(H_2) \oplus N(T)$$

por lo tanto

$$n \coloneqq codim\big(T(H_1)\big) = dim\,(N(T^*))$$

y

$$n \coloneqq dim(N(T)) = codim\,(T^*(H_2))$$

lo que implica que

$$ind(T^*) = dim\,N(T^*) - \ codim\,\big(T^*(H_2)\big) = n - n = 0$$

Ahora bien, como $T^{**} = T$, se tiene que $T^{**}(H_1) = T(H_1)$ es un subespacio cerrado de H_2.

De lo anterior se tiene que T es un operador de Fredholm y T^* es un operador fuerte de Fredholm.

Ejemplo 3.2: Sean H un espacio de Hilbert de dimensión finita y $T: H \to H$ un operador lineal. Por la observación anterior y por el teorema de las dimensiones se tiene que T y y T^* son operadores fuertes de Fredholm.

Ejemplo 3.3: Sea H un espacio de Hilbert y $T: H \to H$ un isomorfismo, entonces T^* es un isomorfirmo y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ (Schechter, 2002). Luego $T^*(H) = (H)$ es cerrado y

$$di\,m\big(N(T)\big) = \ codim\big(T(H)\big) = 0$$

Por lo tanto $ind(T) = 0$ y T es un operador fuerte de Fredholm.

Ejemplo 3.4: Sea H un espacio de Hilbert de dimensión finita y $T: H \to H$ un operador lineal, entonces $ind(T) = 0$ (Galaz, 2006). Y como $dim(T^*(H)) < \infty$, se tiene que $T^*(H)$ es cerrado en H y T es un operador fuerte de Fredholm.

Ejemplo 3.5: Consideremos el operador lineal $T: l_2 \to l_2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, -x_2, -x_3, \dots)$$

Note que T es un operador lineal acotado biyectivo.

Por lo tanto,

$$\dim\big(N(T)\big) = 0 \quad \text{y} \quad codim\big(T(l_2)\big) = codim(l_2) = 0,$$

Así pues $ind(T) = 0$. Además, T es un operador autoadjunto. O sea que $T^* = T$. Por lo tanto, $T^*(l_2) = T(l_2) = l_2$ es un subespacio cerrado de l_2. Esto implica que T es un operador fuerte de Fredholm. Finalmente, $T + I_{l_2}$ no es un operador de Fredholm, ya que $codim\big[\big(T + I_{l_2}\big)(l_2)\big] = \infty$.

4. Construcción de un operador fuerte de Fredholm

En el siguiente teorema presentaremos un resultado que nos permite construir operadores fuertes de Fredholm.

Teorema 4.1: Sean H un espacio de Hilbert, $L: H \rightarrow H$ un isomorfismo y $F: H \rightarrow H$ un operador lineal acotado de rango finito. Entonces el operador $T := L + F$ es un operador fuerte de Fredholm.

Demostración:

F es un operador compacto (Galaz, 2006), y por el ejemplo 3.2, L es un operador fuerte de Fredholm. Luego por el teorema 2.5, $T := L + F$ es un operador de Fredholm. Por lo tanto $T(H)$ es un subespacio cerrado de H y

$$\dim\big(N(T)\big) < \infty, \qquad codim(T(H)) < \infty$$

Por otro lado, por el teorema 2.1, F^* es un operador lineal acotado de rango finito. Además L^* es un isomorfismo y

$$T^* = L^* + F^*$$

Esto implica que T^* es un operador de Fredholm. Así pues $T^*(H)$ es un subespacio cerrado de H y

$$\dim\big(N(T^*)\big) < \infty, \qquad codim(T^*(H)) < \infty$$

Consideremos ahora la ecuación

$$Tu = f \tag{1}$$

note que

$$T = L + F = L + FL^{-1}L = (I + FL^{-1})L$$

Denotemos por $S \coloneqq FL^{-1}$. Como L es un isomorfismo, la ecuación

$$(I + S)w = w + Sw = f \tag{2}$$

es equivalente a la ecuación (1), (Takessaki, 2002). Además, note que S es un operador lineal acotado de rango finito y

$$\dim\big(S(H)\big) = \dim(F(H)) < \infty$$

También tenemos que

$$\dim\big(N(T)\big) = \dim\big(N(I + S)\big)$$

y

$$T(H) = (I + S)(H)$$ (Takessaki, 2002)

Sea $n = \dim\big(S(H)\big)$ y $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $S(H)$. Entonces por la demostración del teorema 2.1 se tiene que

$$Sx = \sum_{i=1}^{n} \langle Sx, e_i \rangle e_i$$

y

$$S^*y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle S^* e_i$$

Luego si $(I + S)u = 0$, entonces $u = -Su$; o sea,

$$u = -\sum_{i=1}^{n} \langle Su, e_i \rangle e_i = -\sum_{i=1}^{n} \langle u, S^* e_i \rangle e_i$$

Por lo que $u \in S(H)$. Así, $N(I + S) \subset S(H)$ y $\dim(N(I + S)) \leq n$.

Consideremos ahora la ecuación

$$T^*v = g \tag{3}$$

Note que

$$T^* = L^* + F^* = L^* + L^* L^{*-1} F^* = L^*(I + L^{*-1} F^*)$$

y

$$S^* = (FL^{-1})^* = (L^{-1})^* F^* = L^{*-1} F^*$$

o sea

$$T^* = L^*(I + S^*)$$

Luego la ecuación (3) es equivalente a la ecuación

$$(I + S^*)v = v + S^*v = h \tag{4}$$

donde, por el teorema 2.1, S^* es un operador lineal acotado de rango finito y

$$n = \dim\big(S(H)\big) = \dim(S^*(H))$$

Similar al caso anterior, se tiene que

$$\dim\big(N(T^*)\big) = \dim(N(I + S^*))$$

$$T^*(H) = (I + S^*)(H)$$

$$N(I + S^*) \subset S^*(H) \qquad \text{y} \qquad \dim(N(I + S^*)) \leq n$$

Hemos probado que la ecuación (1) es equivalente a la ecuación (2); o sea, equivalente a la ecuación

$$w + \sum_{j=1}^{n} \langle Sw, e_j \rangle e_j = f$$

es decir que la ecuación (1) es equivalente a la ecuación

$$w + \sum_{j=1}^{n} \langle w, S^* e_j \rangle e_j = f \tag{5}$$

De igual manera la ecuación (3) es equivalente a la ecuación

$$v + \sum_{j=1}^{n} \langle v, e_j \rangle S^* e_j = h \tag{6}$$

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c} \langle w, S^* e_1 \rangle + \langle \sum_{j=1}^{n} \langle w, S^* e_j \rangle e_j , S^* e_1 \rangle = \langle f, S^* e_1 \rangle \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \langle w, S^* e_n \rangle + \langle \sum_{j=1}^{n} \langle w, S^* e_j \rangle e_j , S^* e_n \rangle = \langle f, S^* e_n \rangle \end{array}$$

o sea

$$\begin{array}{c} \langle w, S^* e_1 \rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle w, S^* e_j \rangle \langle e_j , S^* e_1 \rangle = \langle f, S^* e_1 \rangle \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \langle w, S^* e_n \rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle w, S^* e_j \rangle \langle e_j , S^* e_n \rangle = \langle f, S^* e_n \rangle \end{array} \tag{7}$$

Sean

$$c_i = \langle w, S^* e_i \rangle \quad , \qquad t_{ij} = \langle e_j , S^* e_i \rangle \quad , \qquad f_i = \langle f, S^* e_i \rangle$$

luego el sistema de ecuaciones (7) se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} c_1 + \sum_{j=1}^{n} t_{1j} c_j &= f_i \\ \vdots \qquad \vdots \quad & \;\vdots \;\; \vdots \\ c_n + \sum_{j=1}^{n} t_{nj} c_j &= f_i \end{aligned} \tag{8}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada al sistema (8)

Probemos que la ecuación (5) [o ecuación (2)] es equivalente al sistema de ecuaciones (7) [o sistema de ecuaciones (8)].

Por la forma como se construyó el sistema (7), es claro que cada solución de la ecuación (5) [o ecuación (2)] genera una solución del sistema de ecuaciones (7); a saber, $c_i = \langle w, S^* e_i \rangle, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ donde w es la solución de (5). Probemos que toda solución del sistema (7) genera una solución de la ecuación (5). En efecto, sea $c_1, c_2, \ldots, c_n$ una solución del sistema de ecuaciones (7) y definamos

$$w \coloneqq f - \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$$

Entonces

$$\begin{aligned} Sw &= Sf - \sum_{j=1}^{n} c_j S e_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle Sf, e_i \rangle e_i - \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{i=1}^{n} \langle S e_j, e_i \rangle e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle Sf, e_i \rangle e_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_j \langle S e_j, e_i \rangle e_i \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\langle Sf, e_i \rangle e_i - \sum_{j=1}^{n} c_j \langle Se_j, e_i \rangle e_i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\langle f, S^* e_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} c_j \langle e_j, S^* e_i \rangle \right] e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[f_i - \sum_{j=1}^{n} c_j t_{ij} \right] e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$$

$$= f - w$$

o sea

$$w + Sw = f$$

lo que implica que w es una solución de la ecuación (2) [o de la ecuación (5)].

Así, la ecuación (2) es equivalente al sistema de ecuaciones (8).

Es fácil probar que si $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ son k soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (2), entonces las correspondientes k soluciones $\{c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{ni}\}$, $1 \leq i \leq k$ del sistema homogéneo asociado al sistema (7) son también linealmente independientes, y viceversa.

De igual manera se prueba que la ecuación (6) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccc} \langle v, e_1 \rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle S^* e_j, e_1 \rangle \langle v, e_j \rangle & = & \langle h, e_1 \rangle \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle v, e_n \rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle S^* e_j, e_n \rangle \langle v, e_j \rangle & = & \langle h, e_n \rangle \end{array}$$

Tomando

$$\varepsilon_i = \langle v, e_i \rangle \quad , \quad t_{ij}^* = \langle S^* e_j, e_i \rangle \quad , \quad h_i = \langle h, e_i \rangle$$

se tiene que la ecuación (6) [y por lo tanto la ecuación (3)] es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_1 + \sum_{j=1}^{n} t_{1j}^* \varepsilon_j & = & h_1 \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{n} t_{nj}^* \varepsilon_j & = & h_n \end{array} \tag{9}$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} t_{11}^* & \cdots & t_{1n}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^* & \cdots & t_{nn}^* \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada al sistema (9).

Note que

$$\begin{aligned} \bar{A}^T &= \begin{pmatrix} \overline{t_{11}} & \cdots & \overline{t_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{t_{1n}} & \cdots & \overline{t_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\langle e_1 , S^* e_1 \rangle} & \cdots & \overline{\langle e_1 , S^* e_n \rangle} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\langle e_n , S^* e_1 \rangle} & \cdots & \overline{\langle e_n , S^* e_n \rangle} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle S^* e_1, e_1 \rangle & \cdots & \langle S^* e_n, e_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle S^* e_1, e_n \rangle & \cdots & \langle S^* e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}^* & \cdots & t_{1n}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^* & \cdots & t_{nn}^* \end{pmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

Luego los sistemas de ecuaciones lineales (8) y (9) satisfacen la bien conocida Alternativa de Fredholm para el caso de sistema de ecuaciones lineales.

Así pues, como el sistema de ecuaciones lineales (8) es equivalente a la ecuación (2) y el sistema de ecuaciones lineales (9) es equivalente a la ecuación (4), se tiene que

$$\dim\big(N(I+S)\big) = \dim(N(I+S^*))$$

por lo tanto

$$\dim\big(N(T)\big) = \dim(N(T^*))$$

y

$$ind(T) = \dim\big(N(T)\big) - codim\big(T(X)\big)$$

$$= \dim\big(N(T)\big) - dim(N(T^*))$$
$$= 0$$

Se ha probado así que T es un operador fuerte de Fredholm.

Referencias Bibliográficas

Fabian, M. (2001). *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*. New York: Springer-Verlag.

Fernández, C. (2015). *Introducción a los espacios de Hilbert, operadores y espectros*. Madrid: Editorial UNED.

Galaz, F. (2006). *Elementos de análisis funcional*. CIMAT: México

Giles, J. (2000). *Introduction to the analysis of normed linear spaces*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kesavan, S. (2009). *Functional analysis*. Hindustan: Institute of Mathematical Science Chennai Press.

Kubrusly, C. S. (2000). *Elements of operator theory*. Cambridge: Birkhäuser,

Ramm, A.G. (2001). A simple proof of the Fredholm alternative and a characterization of the Fredholm operators. *Amer. Math*. Monthly 108, 855-860.

Saxe, K. (2000). *Beginning functional analysis*. New York: Springer-Verlag

Schechter, M. (2002). *Principles of functional analysis*. Providence, R.I: AMS Press.

Takesaki, M. (2002). *Theory of operator algebras I*. New York: Springer-Verlag.