Visión Antataura
Vol.2, No.2: 77-89
Diciembre 2018 - Mayo 2019
Panamá
ISSN 2520-9892

Desarrollo conceptual de la compacidad

Conceptual Compactness Development

Yanina del Carmen Rodríguez R.[1], *Temístocles Zeballos M.*[2]

[1]Magíster en Matemática Educativa; Profesora, Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Departamento de Matemática; rryanina@yahoo.es
[2]Magíster en Matemática Pura; Profesor, Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Departamento de Matemática; temizeballos@gmail.com

Resumen: En el presente trabajo se describe el desarrollo histórico del concepto de compacidad, desde las ideas originales hasta las caracterizaciones modernas, utilizando redes y filtros.

Palabras clave: Compacidad, espacios topológicos.

Abstract: This work describes the historical development of the concept of compactness, from the original ideas to the modern characterizations, using nets and filters.

Key words: compactness, topology spaces.

1. Introducción

La Matemática evoluciona y los cambios hacen más claros los conceptos y estos se aplican en situaciones más generales. Si bien es cierto que algunos de los trabajos del siglo XIX sobre compacidad se pueden remontar a las inquietudes matemáticas de los antiguos griegos, el nivel de rigor y de abstracción se alcanzó en uno de los períodos más productivos de la actividad matemática: la segunda mitad del siglo XIX en Europa; lo cual refleja una revolución en el pensamiento matemático.

El concepto de compacidad en espacios métricos es una abstracción de una propiedad muy importante que poseen ciertos subconjuntos de números reales: conjuntos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$. Intuitivamente, generaliza el concepto de subconjuntos finitos en conjuntos abstractos.

Fecha de recepción: 26 de agosto de 2018 *Fecha de aceptación: 20 de noviembre de 2018*

Nuestro propósito en este trabajo es presentar algunos problemas específicos que motivaron el concepto de compacidad y su desarrollo conceptual.

2. Surgimiento de ideas relacionadas con la compacidad

Las primeras ideas de compacidad surgen en la segunda mitad del siglo XIX en Europa, en uno de los períodos más fructíferos de la investigación matemática. Gracias a los trabajos de Cantor se establece el principio de un estudio sistemático de la teoría de conjuntos y la topología conjuntista (Gray, 2015). Matemáticos como Weierstrass, Hausdorff y Dedekind se interesan por darle rigor a las ideas que durante siglos habían sido dadas por sentadas (Kleiner, 2012).

El concepto de compacidad tiene su origen en el estudio de tres tópicos: propiedades de los intervalos cerrados en $\mathbb{R}$, espacio de las funciones continuas y soluciones a las ecuaciones diferenciales (Raman, 1997).

2.1 Propiedades de los intervalos cerrados en $\mathbb{R}$

En sus estudios sobre funciones definidas en sucesiones de números reales, Bolzano y Weierstrass presentan una primera caracterización de la compacidad: compacidad secuencial.

En 1817 Bolzano enuncia y demuestra el siguiente Lema:

2.1.1 Lema de Bolzano: Si una propiedad M no se aplica a todos los valores de una cantidad variable x, sino a todos aquellos que son más pequeños que un cierto u, siempre hay una cantidad U que es el mayor para aquellos de los cuales se puede afirmar que todos los x más pequeños poseen la propiedad M (Aull y Lowen, 1997).

Este lema, actualmente llamado la *propiedad de la menor cota superior para los números reales* (Axioma del Supremo) (Bartle y Sherbert, 2011), fue un gran avance en la conceptualización de los números reales.

La idea detrás de la prueba del Lema de Bolzano fue usar bisección de intervalo (Kline, 1972) y esta demostración proporcionó el primer reporte real del proceso de límite que se utilizó para probar el teorema siguiente:

2.1.2 Teorema de Valor Intermedio: Si f es continua en $[\mathrm{a},b]$ con $f(a)<0$ y $f(b)>0$, entonces para algún x entre a y b, $f(x)$ será exactamente 0.

Es esta propiedad la que Fréchet utiliza cuando generaliza el Teorema de Weierstrass a espacios abstractos. Actualmente se conoce como la Propiedad de Bolzano-Weierstrass o compacidad por punto límite (Shirali, 2006).

Weierstrass demuestra rigurosamente en 1877 el siguiente teorema que se refiere al comportamiento de las funciones continuas definidas sobre un intervalo cerrado (intervalo acotado) de la recta real:

2.1.3 Teorema de Weierstrass: Toda función continua en un intervalo limitado (equivalente actualmente a "cerrado y acotado”) alcanza al menos una vez su máximo (Searcoid, 2007).

El proceso iterativo utilizado por Bolzano en la prueba de su lema fue esencialmente el mismo proceso utilizado por Weierstrass en la prueba del Teorema de Valor Máximo. En particular, el Lema de Bolzano admite el Teorema de Weierstrass para demostrar que todo conjunto infinito acotado de números reales tiene un punto límite.

Fréchet definió compacidad secuencial en su tesis de 1906 y expresó que su definición era una generalización del teorema anterior a espacios abstractos.

De las investigaciones realizadas por Heine, Borel y Lebesgue, surge una segunda caracterización basada en los cubrimientos de conjuntos por vecindades abiertas.

Mientras Bolzano y Weierstrass estaban tratando de caracterizar las propiedades de la recta real en términos de sucesiones; Borel y Lebesgue estaban tratando de caracterizarlas en términos de cubrimientos abiertos.

Borel demostró el siguiente lema en su tesis de 1894:

2.1.4 Lema de Borel: Si en una línea (intervalo acotado) uno tiene un número infinito de subintervalos, tales que cada punto de la línea es interior a al menos uno de los intervalos, entonces uno puede determinar efectivamente un número acotado de intervalos, entre los intervalos dados, que tienen la misma propiedad (cada punto de la línea es interior a por lo menos uno de ellos).

Resulta que el enfoque de Borel fue similar al enfoque que Heine utilizó en 1872 para demostrar el Teorema que una función continua en un intervalo cerrado era uniformemente continua.

Dirichlet demostró por primera vez este Teorema en sus conferencias de 1852, con un uso más explícito de cubrimientos y subcubrimientos que en el Teorema de Heine. Sin embargo, las notas de Dirichlet no se publicaron hasta 1904, lo que podría explicar el por qué no reconocerle su versión generalizada del "Lema de Borel" (que ahora se conoce como el Teorema de Borel (Aull y Lowen, 1997)). La razón por la que el nombre de Heine se une con el Teorema es que Schönflies, un estudiante de Weierstrass, se dio cuenta de la conexión entre la obra de Heine y de Borel. El Teorema generalizado, que comúnmente se llama Teorema de Heine-Borel, con el lenguaje y notación moderna es el siguiente:

2.1.5 Teorema de Heine-Borel: Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado (Shirali, 2006).

En 1895, P. Cousin generalizó el lema de Borel a cubrimientos arbitrarios:

2.1.6 Lema de Cousin: En $\mathbb{R}^2$, sea S un área acotada conexa por un contorno cerrado, simple o complejo (cerrado y acotado). Supongamos que en cada punto de S o de su perímetro hay un círculo, de radio distinto de cero, teniendo este punto como su centro. Entonces siempre es posible subdividir S en regiones, finitas en número y suficientemente pequeñas para que cada una de ellas esté enteramente dentro de un círculo correspondiente a un punto elegido adecuadamente en S o en su perímetro.

En otras palabras, si para cada punto de una región cerrada acotada corresponde una vecindad finita, entonces la región se puede dividir en un número finito de subregiones de tal manera que cada subregión está contenida en un círculo que tiene su centro en la subregión. El Lema de Cousin (a veces conocido como el Teorema de Cousin) se atribuye generalmente a Lebesgue, quien se decía que era consciente del resultado en 1898 y publicó su prueba en 1904. El Lema de Lebesgue se considera a sí mismo como una consecuencia importante de compacidad.

Si bien existe cierto debate acerca de quién era realmente responsable de las ideas y las pruebas, la idea de que cualquier subconjunto cerrado acotado de $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de cubrimiento abierto (a veces se llama la propiedad de Borel-Lebesgue) fue conocida cuando Fréchet definió formalmente compacidad.

2.2 Espacios de funciones continuas

Otras de las razones que originaron la noción de compacidad fue el estudio del espacio de las funciones continuas $C([a,b])$.

En $[a,b]$ los puntos son números reales, mientras que en $C([a,b])$ los puntos son funciones. Las propiedades de $[a,b]$, por sí solas, no podrían haber sido vistas como importantes para generalizar, si no fuera el caso de que pudieran ser de importancia en los espacios más abstractos. Sin embargo, resulta que los espacios de dimensión infinita (como $C([a,b])$) no se comportan tan bien como los espacios de dimensión finita (como $\mathbb{R}^n$). Por ejemplo, los subconjuntos cerrados y acotados de funciones reales continuas no tienen necesariamente la propiedad de Bolzano-Weierstrass o la propiedad de cubrimientos abiertos. Los aportes en esta área fueron realizados por Arzelà y Ascoli en las últimas décadas del siglo XIX.

El siguiente ejemplo ilustra que un subconjunto cerrado y acotado de funciones reales continuas no es, en nuestro lenguaje moderno, secuencialmente compacto.

2.2.1 Ejemplo: Consideremos el conjunto B de las funciones continuas f definidas en $[0,1]$ con $\|f\| \leq 1$.

Probaremos, que existe una sucesión en B que no tiene una subsucesión convergente.

Demostración: Sea $f_n(x)=x^n$. Esta sucesión pertenece a B, pero no podemos encontrar una subsucesión que converja uniformemente a una función en $C([a,b])$.

Supongamos lo contrario: que existe una función f tal que

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=f(x)$$

lo que implicaría que

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$$

Como f es una función discontinua, f no pertenece a $C([a,b])$. Por lo tanto, la sucesión $f_n(x)$ no tiene ninguna subsucesión uniformemente convergente (Shirali, 2006).

La dificultad en el ejemplo anterior viene de cómo convergen las funciones. Si la convergencia significa convergencia puntual, entonces tenemos un comportamiento diferente al de sucesiones en la bola unitaria cerrada de $\mathbb{R}^n$.

Con el fin de subsanar este problema, Ascoli introdujo la noción de equicontinuidad. Un conjunto E es equicontinuo si y sólo si para todo $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que $|s-t|<\delta$ y $f\in E$ implica que $|f(s)-f(t)|<\varepsilon$ (Shirali, 2006).

El Teorema de Arzelà-Ascoli, en lenguaje moderno, establece lo siguiente:

2.2.2 Teorema de Arzelà -Ascoli: Cualquier sucesión acotada equicontinua de funciones en $C([a,b])$ tiene una subsucesión uniformemente convergente (Munkres, 2002).

Usando la terminología moderna podemos establecer una consecuencia de este teorema, análogo al Teorema de Heine-Borel.

2.2.3 Teorema: Un subconjunto de $C([a,b])$ es compacto si y sólo si es cerrado, acotado, y equicontinuo (Munkres, 2002).

Ascoli demostró la condición suficiente $[\Rightarrow]$ en 1884 y Arzelà la condición necesaria $[\Leftarrow]$en 1889. Posteriormente, en 1894 Arzelà presenta una prueba más clara. Esta generalización del Teorema de Bolzano-Weierstrass, a pesar de que está expresada en términos de compacidad, fue aparentemente bien conocida después de 1880. Además, Hilbert parece haber descubierto esta propiedad de compacidad de forma independiente y lo publicó en 1900. No está claro si Arzelà y Ascoli eran conscientes de cómo su trabajo se relacionaba con la compacidad, pero sus trabajos influyeron en los realizados posteriormente por Fréchet.

2.3 Soluciones a las ecuaciones diferenciales

Otros estudios que dieron origen al concepto de compacidad, fue el deseo de encontrar soluciones a las ecuaciones diferenciales. Peano, un contemporáneo de Arzelà y Ascoli, se dio cuenta de que el Teorema de Arzelà -Ascoli podría ser útil para demostrar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales. Buscó soluciones haciendo una sucesión de aproximaciones. Luego, utilizó lo que ahora llamamos compacidad; para demostrar que había una subsucesión que converge uniformemente a un límite -que viene siendo la solución a la ecuación diferencial. Con ese objetivo, Peano demostró el siguiente teorema en 1890:

2.3.1 Teorema: Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales en forma normal:

$$\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, x_1, \cdots, x_n),$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, x_1, \cdots, x_n),$$

donde las funciones $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ son continuas en una vecindad de $(b, a_1, \cdots, a_n)$. Entonces existe un intervalo (b, b') y n funciones de t en este intervalo, $x_1, \cdots, x_n$, que satisfacen nuestro sistema de ecuaciones y evaluando a $a_1, \cdots, a_n$, respectivamente, en $t = b$.

Aunque no está claro si Fréchet estaba al tanto de esta aplicación, las aplicaciones para la noción de compacidad al parecer se conocen antes de que se definiera formalmente compacidad.

3. Desarrollo de la definición

A continuación, se presentan las contribuciones de Fréchet, Hausdorff, Alexandroff, Urysohn, Moore, Smith y Cartan en el desarrollo conceptual de la compacidad.

3.1 Contribuciones de René Maurice Fréchet

Fréchet fue influenciado por muchos contemporáneos y predecesores, pero parece que merece el crédito como el padre de la compacidad. Fue Fréchet quien dio el nombre al concepto, en un documento que conduce a su tesis doctoral de 1906. Fréchet también define por primera vez espacios métricos, aunque no usando ese término y de hecho incursiona en el análisis funcional, proporcionando así un contexto para el cual la importancia de la compacidad se hizo indiscutible (Aull y Lowen, 1997).

3.1.1 Definición: Un conjunto E se llama compacto si, siempre que E_n es una sucesión de subconjuntos cerrados no vacíos de E tal que E_{n+1} es un subconjunto de E_n para todo n, entonces existe al menos un elemento que pertenece a todos los E_n.

Fréchet prefería su definición intuitiva que involucra intersecciones anidadas, pero se percata de la importancia de proporcionar una definición más útil. A continuación, mostramos otra definición de Fréchet, que usa la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

3.1.2 Definición: Un conjunto es compacto si contiene sólo un número finito de puntos o si cada uno de sus subconjuntos infinitos da lugar al menos a un punto límite.

3.2 Contribuciones de Félix Hausdorff

Uno de los obstáculos para definir compacidad, tal como se conoce en la actualidad, fue definirla de una manera que funcionara para los espacios topológicos abstractos.

A principios del siglo XX, el trabajo de Hausdorff revolucionó el área de la topología, proporcionando definiciones que ahora son estándar en este campo de la Matemática.

Por ejemplo, en 1914 introdujo lo que ahora llamamos espacios de Hausdorff, en los que puntos distintos tienen vecindades disjuntas. En su libro "Grundzüge der Mengenlehre, 1914” definió un conjunto E como compacto si cada subconjunto infinito de E tiene un punto límite en E, donde el punto límite, en este contexto, significa que cada vecindad del punto contiene un número infinito de elementos de E (Aull y Lowen, 1997).

La noción de Compacidad de Hausdorff, que llamaríamos compacidad por punto límite y que es equivalente a la compacidad numerable para los espacios de Hausdorff, siguió siendo la noción estándar de compacidad en todo el desarrollo de la topología de punto conjuntista, en la década de 1920.

3.3 Contribuciones de P. S. Alexandroff y P. S. Urysohn

Mientras Fréchet fue el primero en definir formalmente compacidad, sus contemporáneos en Rusia, Alexandroff y Urysohn, parecen ser los primeros en establecer su forma más general, en el contexto de los espacios topológicos abstractos. Quizás por esta razón es que a los dos rusos se le acredita a menudo la definición de la noción de compacidad.

En un artículo publicado en 1923, de Alexandroff y Urysohn, aparece el concepto de compacidad por cubrimientos abiertos: la propiedad de que cada cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento finito, como una de las tres propiedades equivalentes que un conjunto debería tener para ser llamado compacto (en su lenguaje "bicompacto"). Las otras dos propiedades fueron que todos los conjuntos infinitos tienen un punto de acumulación y que las intersecciones anidadas no son vacías. Alexandroff y Urysohn señalan que estas tres propiedades ya eran conocidas, aunque el concepto no había sido nombrado. Alexandroff afirmó que la caracterización punto de acumulación era más importante al principio, debido al predominio de la propiedad de Bolzano-Weierstrass, pero después de algunos años se hizo evidente que la propiedad de los cubrimientos abiertos fue más fructífera. Hoy en día, es común dar la propiedad de los cubrimientos abiertos como la definición y demostrar la equivalencia de una o ambas de las otras dos propiedades como teoremas. Aunque es más abstracto y tal vez menos intuitiva que las otras caracterizaciones, la propiedad de cubrimiento abierto pone de manifiesto, con mayor claridad que las demás, la analogía entre lo compacto y lo finito (Aull y Lowen, 1997).

3.4 Contribuciones de Moore y Smith

Las dos propiedades importantes de compacidad, las derivadas de la propiedad de Bolzano-Weierstrass (compacidad secuencial) y la propiedad de Borel-Lebesgue (compacidad por cubrimientos abiertos), no son equivalentes en espacios topológicos abstractos. La compacidad por cubrimientos abiertos es más general y de mayor aplicabilidad, por estas razones es actualmente el concepto al que se refiere el término "compacidad". Sin embargo, es posible definir la compacidad por cubrimientos abiertos de una manera que es análoga a la compacidad secuencial, utilizando las nociones de redes y filtros. Estos dos conceptos son muy diferentes, pero dan lugar a la misma noción de convergencia en espacios topológicos abstractos.

La teoría de redes fue desarrollada por E. H. Moore y su alumno H. L. Smith, y publicada en 1922. No está claro si Moore y Smith sabían que las redes podrían ser utilizadas para definir la compacidad. Esta conexión se le atribuye generalmente a Garrett Birkhoff, que aplica la teoría de Moore-Smith a los espacios topológicos generales (Kelley, 1955). Sin embargo, en los estudios en el que Moore y Smith introducen el concepto de redes, también generalizan algunos de los resultados de compacidad de Fréchet.

3.4.1 Definición: Una sucesión (denotada por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$) es una función que asigna a cada elemento n de los números naturales $\mathbb{N}$, un valor funcional x_n en un conjunto X.

Nos gustaría reemplazar $\mathbb{N}$ con un conjunto que tenga la posibilidad de ser no contable, pero que tenga un orden similar a $\mathbb{N}$. En otras palabras, queremos establecer condiciones para una relación de orden en un conjunto genérico que sistematice la forma en que se ordenan los números naturales, $>$. Vamos a llamar a esta relación $\succ$ para sugerir la conexión a $>$, y diremos que esta relación "dirige" un conjunto dado.

3.4.2 Definición: Un conjunto no vacío D, con la relación $\succ$ se llama dirigido si y sólo si:

(i) Si $d_1, d_2, d_3 \in D$ tales que $d_1 \succ d_2$ y $d_2 \succ d_3$, entonces $d_1 \succ d_3$;

(ii) Si $d_1, d_2 \in D$ entonces existe $d_3 \in D$ tal que $d_3 \succ d_1$ y $d_3 \succ d_2$.

3.4.3 Definición: Una red (denotada $\{x_d\}_{d\in D}$ o simplemente $\{x_d\}$) es una función que asigna a cada elemento d de un conjunto dirigido D, un valor funcional x_d en un conjunto X (Munkres, 2002).

Dado que ya se conoce que es una red, se puede indicar lo que significa que converja. Como era de esperar, se puede derivar las definiciones de red convergente y punto límite tomando las definiciones que involucran sucesiones y simplemente reemplazar $\mathbb{N}$ y $>$ por D y $\succ$, respectivamente.

3.4.4 Definición: Una red $\{x_d\}$ converge a $a \in X$ (denotado $\{x_d\} \to a$) si y sólo si, para cada vecindad U de a, existe un índice $d_0 \in D$ tal que si $d \succ d_0$, entonces $x_d \in U$; es decir, si la red está eventualmente en cada vecindad de a.

3.4.5 Definición: Un punto a es un *punto límite* de $\{x_d\}$ si para cada vecindad U de a y cada $d_0 \in D$, existe un $d \succ d_0$ tal que $x_d \in U$.

3.4.6 Definición: Una subred de una red $\{x_d\}_{d\in D}$ es una red $\{y_b\}_{b\in B}$ donde B es un conjunto dirigido y existe una función $\varphi : B \to D$ tal que:

(i) $y_b = x_{\varphi(b)}$ y

(ii) $\forall d \in D, \exists b_0 \in B$ tal que si $b \succ b_0$, entonces $\varphi(b) \succ d$.

Ahora estamos listos para caracterizar compacidad en términos de redes.

3.4.7 Teorema: Un espacio topológico X es compacto si y sólo si, se satisface cualquiera de las dos condiciones siguientes:

(i) Toda red de puntos de X tiene un punto límite en X, o

(ii) Toda red de puntos de X tiene una subred convergente en X .

3.5 Contribuciones de Cartan y Smith

Otra generalización de sucesiones es un filtro, definido por H. Cartan en 1937. Aunque son diferentes de una red, tanto las redes como los filtros dan lugar a la misma noción de convergencia en espacios topológicos. Es decir, en espacios topológicos abstractos, redes y filtros son esencialmente lo mismo. La idea detrás de los filtros fue prefigurada por F. Riesz en 1907 cuando proporcionó axiomas para la topología basada en los puntos límite en lugar de una métrica (Raman, 1997).

Smith descubrió de forma independiente los filtros como un intento de explicar lo que faltaba en la teoría de redes que él y Moore propusieron.

3.5.1 Definición: Sea X un conjunto. Un conjunto Φ de subconjuntos de X se llama un filtro si y sólo si

(i) $\varnothing \notin \Phi,$

(ii) $A_1 \subset A_2 \subset X$ y $A_1 \in \Phi \Rightarrow A_2 \in \Phi,$ y

(iii) $A_1, A_2 \in \Phi \Rightarrow A_1 \bigcap A_2 \in \Phi$.

3.5.2 Definición: Un filtro Φ converge a $a \in A$ (denotado $\Phi \to a$) si y sólo si cada vecindad de a es un miembro de Φ .

3.5.3 Definición: Un filtro en X es un ultrafiltro si y sólo si ningún filtro en X lo contiene propiamente.

Observación*:* La noción de ultrafiltro no es exactamente análoga a la de subsucesión, pero en la formulación de la compacidad, sirve para el mismo propósito.

3.5.4 Teorema*:* Un espacio topológico es compacto si y sólo si cada ultrafiltro en X converge a un punto en X (Aull y Lowen, 1997).

Referencias Bibliográficas

Aull, C.E. & Lowen, R. (1997). *Handbook of the History of General Topology*. *Volumen I*. First Edition. New York: Kluwer Academic Publishers.

Aull, C.E. & Lowen, R. (1998). *Handbook of the History of General Topology*. *Volumen II*. First Edition. New York: Kluwer Academic Publishers.

Bartle, R.G., Sherbert, D.R. (2011). *Introduction to Real Analysis*. Fourth Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Gray, J. (2015). *The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century*. First Edition. London: Springer-Verlag.

Kelley, J. (1955). *General Topology*. New Jersey: D. Van Nostrand, Princeton.

Kleiner, I. (2012). *Excursions in the History of Mathematics*. First Edition. Boston: Birkhäuser.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought: From Ancient to Modern Times*. Oxford: Oxford Univ. Press.

Munkres, J.R. (2002). *Topología*. Segunda Edición. Madrid: Pearson Educación, S.A.

Raman, M.J. (1997). *Understanding compactness: a historical perspective*. Berkeley: University of California.

Searcoid, M. (2007). *Metric Spaces*. First Edition. London: Springer-Verlag.

Shirali, S., Vasudeva, H.L. (2006). *Metric Spaces*. First Edition. London: Springer-Verlag.