Visión Antataura
Vol.7, No.1: 168-184
Junio – Noviembre, 2023
Panamá
ISSN L 2520-9892

Espacios métricos parciales

Partial metric spaces

Lezcano, José[1]; Hernández, Jorge[2]

[1]Ministerio de Educación, Instituto Puerto Armuelles, Panamá; jose.lezcano4@utp.ac.pa, https://orcid.org/0000-0002-9033-2222
[2]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Escuela de Matemáticas, Panamá; jorge.hernandez8@utp.ac.pa, https://orcid.org/0000-0003-1153-1918
DOI: https://doi.org/10.48204/j.vian.v7n1.a3933

Fecha de recepción: 17 de febrero de 2023 *Fecha de aceptación: 10 de abril de 2023*

Resumen: En el presente trabajo, se modifica el axioma de separación de los espacios métricos para introducir los espacios métricos parciales, en los cuales la autodistancia no es necesariamente cero. Se define una relación de orden en estos espacios. Se desarrollan una serie de ejemplos que ilustran los conceptos introducidos y a la vez sirven como contraejemplos para mostrar la independencia de las definiciones presentadas.

Palabras clave: Métricas, espacios métricos, métricas parciales (pmétricas), espacios métricos parciales, autodistancia diferente de cero, orden parcial, conjunto parcialmente ordenado.

Summary: In this work the separation axiom of metric spaces is modified to introduce partial metric spaces, in which the selfdistance is not necessarily zero. An order relationship is defined in these spaces. A series of examples illustrating the concepts introduced was developed to serve as counterexamples demonstrating the independence of the definitions presented.

Keywords: Metric, metric space, partial metric (pmetric), partial metric space, nonzero selfdistance, partial order, partial orden set.

1. Introducción

Las métricas parciales y los espacios métricos parciales fueron introducidos por el matemático inglés Steve Mathews en el 8° Coloquio Británico para la Teoría de la Ciencia Computacional en 1992. También en ese año, Michael Bukatin en su disertación doctoral trata sobre las métricas parciales. Posteriormente, en 2009 Steve Mathews, Ralph Kopperman, Homeira Pajooheshel presentan un artículo en The American Mathematical Monthly titulado Partial Metric Spaces.

Al igual que en los espacios métricos, los espacios métricos parciales están formados por un conjunto no vacío y una función. A esta función se le conoce con el nombre de pmétrica, la cual toma dos puntos del conjunto y la lleva a un número real no negativo.

En los espacios métricos parciales, la pmétrica de un punto a el mismo no es necesariamente cero. Esto provoca una reacción en cadena, pues para homologar los axiomas de métrica hay que realizar cambios sustanciales en los mismos.

Se mostrará cómo, a partir de espacios métricos parciales, se pueden construir espacios métricos. Además, cómo a partir de espacios métricos se pueden construir espacios métricos parciales. Además se mostrarán, algunos ejemplos de espacios que cumplan estas situaciones.

2. Metodología

Introducidos por Rene Maurice Frechet en su tesis doctoral, los espacios métricos dieron origen a un vasto campo de estudio. Generalizando los espacios métricos se da origen a los espacios métricos parciales, ajustando el axioma de separación. Dando así origen a un nuevo campo de estudio.

Se definen los conceptos de métrica, seudométrica, ponderación y métrica parcial. Posteriormente, se muestra como a partir de espacios métricos, usando la métrica inducida se pueden construir una métrica parcial, por ende un espacio métrico parcial. De igual forma, se pueden construir a través de una métrica parcial una métrica y por lo tanto un espacio métrico.

Se prueba que en los espacios métricos parciales se puede establecer una relación de orden parcial, es decir; los espacios métricos parciales son conjuntos parcialmente ordenados.

Para validar los resultados, se muestran ejemplos para cada uno.

3. Desarrollo del tema: Espacios métricos parciales

- **Definición 1:** Sea X un conjunto no vacío y $d: X \times X \to \mathbb{R}$ una función. d es una métrica sobre X si satisface los siguientes axiomas

M₁) $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in X$ (positividad).

M₂) Sean $x, y \in X$, entonces

$$x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$$
$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$
(separación)

M₃) d(x, y) = d(y, x) para todo $x, y \in X$ (simetría)

M₄) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$ (desigualdad triangular)

El par (X, d) constituido por el conjunto no vacío X y una métrica d sobre X, se llama espacio métrico (Samet et al., 2013; Bukatin et al., 2009; kopperman, et al., 2004; Kopperman, s.f; Matthews, 1994; Matthews, 2008; Matthews, s.f)

- **Definición 2:** Sea X un conjunto no vacío y $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. ρ es una **seudométrica** o **semimétrica** si satisface los siguientes axiomas.

  M₁) $p(x, y) \geq 0,$ para todo $x, y \in X.$

  $M_2^*)$ $p(x, x) = 0,$ para todo $x \in X.$

  M₃) $p(x, y) = p(y, x),$ para todo $x, y \in X.$

  M₄) $p(x, y) \leq p(x, z) + p(y, z),$ para todo $x, y, z \in X.$

El par (X, p) constituido por el conjunto no vacío X y una seudométrica p sobre X, se llama **espacio seudométrico** (Matthews, 2008).

- **Definición 3:** Sea X un conjunto no vacío y $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. ρ es una **pmétrica** si satisface los siguientes axiomas

  MP₀) $0 \leq \rho(x, x) \leq \rho(x, y),$ para todo $x, y \in X$

  MP₂) Si $\rho(x, x) = \rho(x, y) = \rho(y, y),$ entonces x = y para todo $x, y \in X$

  MP₃) $\rho(x, y) = \rho(y, x),$ para todo $x, y \in X$

  MP₄) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) - \rho(z, z)$ entonces x = y para todo $x, y, z \in X$.

Al par (X, ρ) se le llama espacio métrico parcial (Matthews, s.f; Bukatin, et al., 2009; Matthews, 2008).

- **Observaciones:**

  1. Supongamos que $\rho(x, y) = 0.$ Luego por MP₀

$$\rho(x,x)=0 \quad \text{y} \quad \rho(y,y)=0$$

de donde

$$\rho(x,x)=\rho(x,y)=\rho(y,y)=0$$

Por lo tanto, por MP_2 se tiene que x = y. Así pues, las pmétricas satisfacen los axiomas M_1, M_3 y M_4 de métrica y además, si $\rho(x,y)=0$ entonces x = y. Lo único que no satisfacen las pmétricas es la autodistancia igual a cero; o sea que $\rho(x,x)\geq 0$ pero no necesariamente $\rho(x,x)=0$

2. Toda métrica es una pmétrica.

3. Las seudométricas no satisfacen el axioma M_2 de métricas ni el axioma MP_2 de pmétricas.

- **Ejemplo:** Sea S un conjunto con más de un elemento y S^* el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de S, o sea

$$S^*=\left\{(x_0,x_1,\ldots,x_n): \quad n\in\mathbb{N}, \quad x_1,x_2,\ldots,x_n\in S\right\}$$

Definamos la función

$$p_S:\left(S^*\cup S^W\right)\times\left(S^*\cup S^W\right)\to\mathbb{R}$$

$$p_S\left(\{x_n\},\{y_n\}\right)=\begin{cases} 1 & , \quad \text{si } x_0\neq y_0 \\ 2^{-k} & , \quad x_i=y_i \text{ para todo } i<k,\ x_k\neq y_k \\ 0 & , \quad x_k=y_k,\ \text{para todo } k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Note que si $p_S\left(\{x_n\},\{y_n\}\right)=0$ entonces $\{x_n\},\{y_n\}\in S^W$. Además, si $\{x_n\}\in S^*$ entonces $p_S\left(\{x_n\},\{y_n\}\right)>0$ Por lo tanto, $p_S\left(\{x_n\},\{x_n\}\right)>0$ para todo $\{x_n\}\in S^*$.

Entonces p_S es una pmétrica sobre $S^*\cup S^W$ (Bukatin, et al., 2009).

- **Observaciones:**

1. Note que

$$p_S\big/_{S^w\times S^w}=d_S$$

Por lo tanto, el subespacio métrico parcial $\left(S^W,p_S\right)$ es un espacio métrico; o sea que

$$\left(S^W,p_S\right)=\left(S^W,d_S\right)$$

2. Como $p_S(\{x_n\},\{x_n\}) > 0$ para todo $\{x_n\} \in S^*$. p_S no es una métrica sobre $S^* \cup S^W$.

- **Ejemplo:** Sea $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ y definamos la función

$$p_{max} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$p_{max}(a,b) = \max\{a,b\}$$

Probemos que p_{max} es una pmétrica (Matthews, s.f).

MP$_0$) Sean $a,b \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$0 \le a = \max\{a,a\} \le \max\{a,b\}$$

Por lo tanto

$$0 \le p_{max}(a,a) \le p_{max}(a,b)$$

MP$_2$) Sean $a,b \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$p_{max}(a,a) = p_{max}(a,b) = p_{max}(b,b)$$

luego

$$a = \max\{a,b\} = b$$

Por lo tanto, a = b.

MP$_3$) De la definición se deduce que

$$p_{max}(a,b) = p_{max}(b,a)$$

MP$_4$) Sean $a,b \in \mathbb{R}^+$

* Supongamos que $p_{max}(a,b) = a$, entonces

$$p_{max}(a,b) \le p_{max}(a,c)$$
$$p_{max}(c,b) - p_{max}(c,c) \ge 0$$

por lo tanto

$$p_{max}(a,b) \le p_{max}(a,c) + p_{max}(c,b) - p_{max}(c,c)$$

* Igual resultado se obtiene si se supone que $p_{max}(a,b) = b$.

Así pues p_{max} es una pmétrica sobre $\mathbb{R}^+$ y $(\mathbb{R}^+, p_{max})$ es un espacio métrica parcial.

- **Ejemplo:** Sea $\mathfrak{I}$ la colección de los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$; es decir

$$\mathfrak{I} = \{[a,b]: \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b\}$$

Definamos la función

$$\rho : \mathfrak{I} \times \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$$
$$\rho([a,b],[c,d]) = \max\{b,d\} - \min\{a,c\}$$

Entonces ρ es una métrica sobre $\mathfrak{I}$ y $(\mathfrak{I}, \rho)$ es un espacio métrico parcial (Bukatin et al., 2009; Matthews, 2008).

- **Ejemplo:** Sea (X, ρ) un espacio métrico parcial y sea

$$\rho^{\wedge} : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$\rho^{\wedge}(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

Usando el resultado de que:

si $a,\ b,\ c,\ d \geq 0$ son tales que

$$a \leq b + c - d, \quad d \leq b \quad y \quad d \leq c$$

entonces

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} - \frac{d}{1+d}$$

se prueba que $\rho^{\wedge}$ es una pmétrica sobre X (Matthews, 2008).

- **Definición:** Sea (X, d) un espacio métrico. Una **función de ponderación** sobre X es una función

$$|\cdot| : X \to \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes propiedades

i) $0 \leq |x|$, para todo $x \in X$.

ii) $|x| - |y| \leq d(x,y)$ para todo $x, y \in X$ (Bukatin, et al., 2009; Kopperman, 2004; Matthews, 2008).

- **Observación:** Todo espacio métrico (X, d) tiene infinitas ponderaciones. En particular, para todo $k \geq 0$, la función constante

$$|\cdot| : X \to \mathbb{R}$$
$$|x| = k$$

es una ponderación sobre X.

El siguiente ejemplo ilustra la forma de construir espacios métricos parciales a partir de los espacios métricos.

- **Ejemplo:** Sea (X, d) un espacio métrico y $|\cdot| : X \to \mathbb{R}$ una ponderación sobre X. Definamos la función

$$\rho_d : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$\rho_d(x, y) = \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2}$$

Entonces ρ_d es una pmétrica sobre X, además

$$\rho_d(x, x) = |x|$$

para todo $x \in X$ (Matthews, s.f).

MP$_0$) Sean $x, y \in X$, entonces

$$\rho_d(x, x) = \frac{d(x, x) + |x| + |x|}{2} = |x|$$

Por lo tanto, como $|x| \leq d(x, y) + |y|$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho_d(x, x) = |x| & \\ &= \frac{|x| + |x|}{2} \\ &\leq \frac{|x| + d(x, y) + |y|}{2} \\ &= \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2} \\ &= \rho_d(x, y) \end{aligned}$$

MP$_2$) Sean $x, y \in X$ tales que

$$\rho_d(x, x) = \rho_d(x, y) = \rho_d(y, y)$$

entonces

$$|x| = \frac{d(x,y)+|x|+|y|}{2} = |y|$$

de donde

$$d(x, y) = 0$$

por lo tanto, x = y.

MP3) Sean $x, y \in X,$ entonces

$$\rho_d(x,y) = \frac{d(x,y)+|x|+|y|}{2} = \frac{d(y,x)+|y|+|x|}{2} = \rho_d(y,x)$$

MP4) Sean $x, y, z \in X,$ entonces

$$\begin{aligned}
\rho_d(x,y) &= \frac{d(x,y)+|x|+|y|}{2} \\
&\leq \frac{d(x,z)+d(y,z)+|y|+|x|}{2} \\
&= \frac{d(x,z)+|x|+|z|+d(y,z)+|y|+|z|-2|z|}{2} \\
&= \frac{d(x,z)+|x|+|z|}{2} + \frac{d(z,y)+|y|+|z|}{2} - |z| \\
&= \rho_d(x,z)+\rho_d(y,z)-\rho_d(z,z)
\end{aligned}$$

De todo lo anterior se tiene que (X, ρ_d) es un espacio métrico parcial y $\rho_d(x,x) = |x|.$

- **Observación:** Si la ponderación $|\cdot|$ sobre X no es la función nula entonces (X, ρ_d) no es un espacio métrico. Si $|\cdot|$ es la función nula, entonces $\rho_d = \frac{1}{2}d$ es una métrica sobre X.
- **Ejemplo:** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y d la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|.$ Note que la función norma es una ponderación sobre el espacio métrico (X, d). Por lo tanto, (X, ρ_d) en un espacio métrico parcial, donde

$$\rho_d(x,y) = \frac{\|x-y\|+\|x\|+\|y\|}{2}$$

En el ejemplo anterior se construyó un espacio métrico parcial a partir de un espacio métrico dado. El proceso se puede revertir; o sea que se puede construir un espacio métrico a partir de un espacio métrico parcial de tal manera que los dos procesos sean cíclicos. Veamos este hecho en el siguiente ejemplo.

- **Ejemplo:** Sea (X, d) un espacio métrico parcial. Definamos las funciones

$$d_p : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

y

$$|\cdot| : X \to \mathbb{R}$$
$$|x| = p(x, x)$$

Luego

$$d_p(x, y) = 2p(x, y) - |x| - |y|$$

Probemos que d_p es una métrica sobre X (Matthews, s.f).

M₁) Sean $x, y \in X$ entonces

$$p(x, y) - p(x, x) \geq 0 \quad \text{y} \quad p(x, y) - p(y, y) \geq 0$$

por lo tanto

$$0 \leq 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = d_p(x, y)$$

M₂) Sean $x, y \in X$

* Si x = y, entonces

$$d_p(x, y) = 2p(x, x) - p(x, x) - p(x, x) = 0$$

* Supongamos que $d_p(x, y) = 0$, entonces

$$2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 0$$

Como $p(x, x) \leq p(x, y)$, se tiene que

$$2p(x, y) - p(x, y) - p(y, y) \leq 0$$

de donde

$$p(x, y) \leq p(y, y)$$

Igualmente,

$$2p(x, y) - p(x, y) - p(x, x) \leq 0$$

y

$$p(x,y) \le p(x,x)$$

Luego por MP_0 se tiene que

$$p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$$

Por lo tanto, por MP_2 se tiene que $x = y$.

Así pues

$$d_p(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

M_3) Sean $x, y \in X$, entonces

$$d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) = 2p(y,x) - p(y,y) - p(x,x) = d_p(y,x)$$

M_4) Sean $x, y, z \in X$, entonces

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &\le 2p(x,z) + 2p(z,y) - 2p(z,z) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= \left(2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z)\right) + \left(2p(z,y) - p(z,z) - p(y,y)\right) \\ &= d_p(x,z) + d_p(z,y) \end{aligned}$$

Así pues d_p es una métrica sobre X.

Probemos ahora que la función $|\cdot|$ es una ponderación sobre X.

* Sea $x \in X$, entonces

$$0 \le p(x,x) = |x|$$

* Sea $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} |x| - |y| &= p(x,x) - p(y,y) \\ &= 2p(x,x) - p(x,x) - p(y,y) \\ &\le 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= d_p(x,y) \end{aligned}$$

Así pues, $|\cdot|$ es una ponderación sobre X y

$$d_p(x,y) = 2p(x,y) - |x| - |y|$$

Note que

$$p(x,y) = \frac{d_p(x,y) + |x| + |y|}{2}$$

Luego, por el ejemplo anterior

$$p_{d_p} = p \quad y \quad p_{p_d} = d.$$

O sea que los procesos de estos dos ejemplos son cíclicos.

- **Teorema:** Sea (X, p) un espacio métrico parcial. Definamos la relación binaria $"\prec_p"$ sobre X por

$$x \prec_p y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y)$$

Entonces $\prec_p$ es una relación de orden parcial sobre X, llamada la relación de orden parcial inducida por la pmétrica sobre X (Bukatin, et al., 2009. Matthews, s.f).

- **Demostración:**
- **Reflexiva**

Como p(x, x) = p(x, x), se tiene que $x \prec_p x$ para todo $x \in X$.

- **Antisimétrica**

Sean $x, y \in X$ tales que $x \prec_p y$, $y \prec_p x$, entonces

p(x, x) = p(x, y), p(y, y) = p(y, x)

Por lo tanto,

p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)

Luego por MP_2 se tiene que x = y.

- **Transitiva**

Sean $x, y, z \in X$ tales que $x \prec_p y$, $y \prec_p z$; entonces

p(x, x) = p(x, y) , p(y, y) = p(y, z)

Por MP_4 se tiene que

$$\begin{aligned} p(x,z) &\le p(x,y) + p(y,z) - p(y,y) \\ &= p(x,y) \\ &= p(x,x) \end{aligned}$$

Luego como $p(x,x) \le p(x,z)$, se tiene que

p(x, x) = p(x, z)

Por consiguiente, $x \prec_p z$

De todo lo anterior se tiene que $(X, \prec_p)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

- **Ejemplo:** Consideremos el espacio métrico parcial $\left(\mathbb{R}^+, p_{\max}\right)$.

  Entonces

$$\begin{aligned} x \prec_p y &\Leftrightarrow p_{\max}(x,x) = p_{\max}(x,y) \\ &\Leftrightarrow \max\{x,x\} = \max\{x,y\} \\ &\Leftrightarrow x = \max\{x,y\} \\ &\Leftrightarrow y \leq x \end{aligned}$$

  O sea que $\prec_p$ es exactamente el orden inverso usual de $\mathbb{R}^+$.

- **Ejemplo:** En el espacio métrico parcial $\left(S^* \cup S^W, p_S\right)$ la relación de orden parcial $\prec_{p_S}$ esta definida por

$$\begin{aligned} \{x_n\} \prec_{p_S} \{y_n\} &\Leftrightarrow p_S\left(\{x_n\},\{x_n\}\right) = p_S\left(\{x_n\},\{y_n\}\right) \\ &\Leftrightarrow \{y_n\} \text{ es parte inicial de } \{x_n\} \end{aligned}$$

- **Teorema:** Sea (X, d) un espacio métrico, $\varnothing \in X$ y $|\cdot|: X \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$|x| = d(x,\varnothing)$$

  Entonces $|\cdot|$ es una ponderación sobre X y $|\varnothing| = 0$ (Bukatin, et al., 2009).

- **Demostración:**

i. Sea $x \in X$, entonces

$$0 \leq d(x,\varnothing) = |x|$$

ii. Sean $x, y \in X$, entonces

$$|x| = d(x,\varnothing) \leq d(x,y) + d(y,\varnothing) = d(x,y) + |y|$$

  por lo tanto,

$$|x| - |y| \leq d(x,y)$$

  Así pues. $|\cdot|$ es una ponderación sobre X.

- **Observación:** Sea (X, d) un espacio métrico, $\varnothing \in X$ y $|\cdot|: X \to \mathbb{R}$ la función definida en el teorema anterior. Entonces la función

$$p_d : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$p_d(x, y) = \frac{d(x,y) + |x| + |y|}{2} = \frac{d(x,y) + d(x,\varnothing) + d(y,\varnothing)}{2}$$

es una pmétrica sobre X. Además

$$p_d(x, x) = d(x,\varnothing) = |x|$$
$$p_d(x,\varnothing) = d(x,\varnothing) = |x|$$

por lo tanto

$$p_d(x, x) = p_d(x,\varnothing)$$

lo que implica que $x \prec_{p_d} \varnothing$ para todo $x \in X$. Así pues $\varnothing$ es el último elemento del conjunto parcialmente ordenado $(X, \prec_{p_d})$ (Matthews, s.f).

Recíprocamente, sea (X, p) un espacio métrico parcial y $\varnothing \in X$ tal que $x \prec_p \varnothing$ para todo $x \in X$. Entonces

$$p(x,x) = p(x,\varnothing) \ , \quad \text{para todo } x \in X.$$

Por lo tanto, la función

$$d_p : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$d_p(x, y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) = 2p(x,y) - p(x,\varnothing) - p(y,\varnothing)$$

es una métrica sobre X, y la función

$$|\cdot| : X \to \mathbb{R}$$
$$|x| = p(x,x) = p(x,\varnothing)$$

es una ponderación sobre X.

- **Ejemplo:** Sean (X, d) un espacio métrico, $\varnothing \in X$ y a > 0 tal que

$$d(x,y) \le a, \quad \text{para todo } x, y \in X$$

Definamos la función

$$p : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$p(x,y) = a + \frac{d(x,y) - d(x,\varnothing) - d(y,\varnothing)}{2}$$

Probemos que p es una pmétrica sobre X.

MP_0) Sean $x, y \in X$ entonces

$$p(x,x) = a - d(x,\emptyset) \geq 0$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} p(x,y) - p(x,x) &= a + \frac{d(x,y) - d(x,\emptyset) - d(y,\emptyset)}{2} - a + d(x,\emptyset) \\ &= \frac{d(x,y) + 2d(x,\emptyset) - d(x,\emptyset) - d(y,\emptyset)}{2} \\ &= \frac{d(x,y) + d(x,\emptyset) - d(y,\emptyset)}{2} \\ &\geq \frac{d(y,\emptyset) - d(y,\emptyset)}{2} = 0 \end{aligned}$$

Así pues

$$0 \leq p(x,x) \leq p(x,y)$$

MP_2) Sean $x, y \in X$ tales que

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

entonces

$$a - d(x,\emptyset) = a + \frac{d(x,y) - d(x,\emptyset) - d(y,\emptyset)}{2} = a - d(y,\emptyset)$$

entonces

$$d\left(x,\emptyset\right) = d\left(y,\emptyset\right) \quad y \quad d(x,y) = 0$$

lo que implica que x = y.

MP_3) Sean $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} p(x,y) &= a + \frac{d(x,y) - d(x,\emptyset) - d(y,\emptyset)}{2} \\ &= a + \frac{d(y,x) - d(y,\emptyset) - d(x,\emptyset)}{2} \\ &= p(y,x) \end{aligned}$$

MP$_4$) Sean $x, y, z \in X,$ entonces

$$\begin{aligned}
p(x,z)+p(z,y)-p(z,z) &= a+\frac{d(x,z)-d(x,\varnothing)-d(z,\varnothing)}{2}+a+\frac{d(z,y)-d(z,\varnothing)-d(y,\varnothing)}{2}-a+d(z,\varnothing)\\
&= a+\frac{d(x,z)-d(x,\varnothing)-d(z,\varnothing)+d(z,y)-d(z,\varnothing)-d(y,\varnothing)+2\,d(z,\varnothing)}{2}\\
&= a+\frac{d(x,z)+d(z,y)-d(x,\varnothing)-d(y,\varnothing)}{2}\\
&\geq a+\frac{d(x,y)-d(x,\varnothing)-d(y,\varnothing)}{2}\\
&= p(x,y)
\end{aligned}$$

Así pues

$$p(x,y) \leq p(x,z)+p(z,y)-p(z,z)$$

De todo lo anterior se tiene que (X, p) es un espacio métrico parcial.

Note que

$$p(\varnothing,\varnothing) = a = p(x,\varnothing)$$

por lo tanto

$$\varnothing \prec_p x$$

Para todo $x \in X;$ o sea que $\varnothing$ es el primer elemento del conjunto parcialmente ordenado $(X, \prec_p)$.

Finalmente, note que

$$\begin{aligned}
d_p(x,y) &= 2p(x,y)-p(x,x)-p(y,y)\\
&= 2a+d(x,y)-d(x,\varnothing)-d(y,\varnothing)-a+d(x,\varnothing)-a+d(y,\varnothing)\\
&= d(x,y)
\end{aligned}$$

Por consiguiente $d_p = d$ y $(X, d_p) = (X, d)$.

- **Observación:** Si en ejemplo anterior consideramos la función de ponderación

$$\begin{aligned}
&|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}\\
&|x| = d(x,\varnothing)
\end{aligned}$$

entonces la función

$$p_d : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$p_d(x, y) = \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2} = \frac{d(x, y) + d(x, \varnothing) + d(y, \varnothing)}{2}$$

es una pmétrica sobre X y $x \prec_{p_d} \varnothing$, para todo $x \in X$. Así pues

* $\varnothing$ es el primer elemento del conjunto parcialmente ordenado $\left(X, \prec_p\right)$
* $\varnothing$ es el último elemento del conjunto parcialmente ordenado $\left(X, \prec_{p_d}\right)$
* $p \neq p_d$
* $d_p = d \quad y \quad d_{p_d} = d$

3. Conclusiones

Con lo demostrado en este artículo, podemos concluir:

- Los espacios métricos parciales son una generalización de los espacios métricos. Es decir, todo espacio métrico es un espacio métrico parcial; pero no todo espacio métrico parcial es un espacio métrico.
- Dado un espacio métrico, podemos construir a través de la métrica una pmétrica y por lo tanto un espacio métrico parcial.
- De igual forma, si tenemos un espacio métrico parcial, podemos construir a través de la pmétrica una métrica y por lo tanto un espacio métrico.

Referencias bibliográficas

Samet, B., Vetro, C., y Vetro, F. (2013). From metric spaces to partial metric spaces. 5. file:///C:/Users/50764/Downloads/1687-1812-2013-5.pdf

Bukatin, M., Kopperman, R., Matthews S., y Pajoohesh, H. (2009). Partial Metric Spaces. *The American Mathematical Monthly, 116*(8), 708–718. https://www.jstor.org/stable/40391197

Kopperman, R., Matthews S. y Pajoohesh, H. (2004). Partial metrizability in value quantales. *Applied General Topology, 5*(1), 115 – 127. https://doi.org/10.4995/agt.2004.2000

Kopperman, R. (s.f). Generalized Metrics A Topological Investigation. https://www.generalizedmetrics.com/

Matthews, S. (1994). Partial Metric Topology. *Annals of the New York Academy of Sciences, 728*, (183-197). https://www.dcs.warwick.ac.uk/pmetric/Ma94.pdf

Matthews, S. (2008, del 29 de Julio al 1 de agosto). Partial Metric Spaces A Fuss about Nothing [conferencia]. The 2008 Summer Conference Universitaria de la UNAM, Ciudad de México, México.

Matthews, S. (s.f). partialmetric.org. http://www.dcs.warwick.ac.uk/pmetric/