Visión Antataura
Vol.7, No.2: 66-83
Diciembre, 2023 – Mayo, 2024
Panamá
ISSN L 2520-9892

Funciones extrañas en el análisis real: funciones del tipo Thomae

Strange functions in real analysis: Thomae type functions

Ángela Y. Franco[1]

[1]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática, Panamá; angela.franco@up.ac.pa; https://orcid.org/0000-0002-7085-6870

Fecha de recepción: 24 de agosto de 2023 *Fecha de aceptación: 14 de octubre de 2023*

DOI https://doi.org/10.48204/j.vian.v7n2.a4563

Resumen: El comportamiento patológico de las funciones extrañas ha sido de gran ayuda en el desarrollo y fundamentación del cálculo diferencial e integral y, en general, del análisis real. Además, es una útil fuente de ejemplos y contraejemplos que ayudan a comprender las definiciones rigurosas de los conceptos básicos del análisis matemático. Es por esa razón que el objetivo de este artículo es estudiar las propiedades de la función de Thomae y presentar algunas generalizaciones para garantizar la diferenciabilidad en un conjunto considerablemente grande de puntos.

Palabras clave: funciones extrañas, continuidad, diferenciabilidad, integrabilidad, conjunto denso, medida de Lebesgue.

Abstract: The pathological behavior of strange functions has been of great help in the development and foundation of differential and integral calculus and, in general, of real analysis. In addition, it is a useful source of examples and counterexamples that help understand the rigorous definitions of the basic concepts of mathematical analysis. It is for this reason that the objective of this article is to study the properties of the Thomae function, and present some generalizations to guarantee differentiability on a considerably large set of points.

Keywords: strange functions, continuity, differentiability, integrability, dense set, Lebesgue measure.

1. Introducción

En el siglo XIX el análisis real estaba en su etapa formativa (transición del cálculo al análisis). Los matemáticos investigaban sobre la posibilidad de clasificar las funciones usando los conceptos de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad. Sin embargo, estas ideas fueron desafiadas por un número de funciones que eran atípicamente malas, extrañas y contraintuitivas. De hecho, los matemáticos de esa época pensaban que una función continua sólo podía ser no diferenciable en una colección pequeña de puntos aislados; sin embargo, ha resultado que muchas de las funciones continuas son no diferenciables en todos los puntos (Dunham, 2018; Edward, 1994).

Otra idea errónea que tenían los matemáticos sobre el comportamiento de la derivada de una función es que eran Riemann integrable. También se pensaba que si una función diferenciable era estrictamente creciente (decreciente), entonces su derivada tenía que ser positiva (negativa). Estos y otros muchos errores sobre el cálculo diferencial e integral fueron corregidos con la aparición de las funciones extrañas o patológicas en el análisis real (Bartle, 2011; Folland, 2007; Natanson, 2016; Olmsted, 2009).

El comportamiento patológico de las funciones extrañas ha sido de gran ayuda en el desarrollo y fundamentación del cálculo diferencial e integral y, en general del análisis real. Además, es una útil fuente de ejemplos que ayudan a entender definiciones rigurosas de los conceptos básicos del análisis matemático. Entre los primeros matemáticos que construyeron estos tipos de funciones extrañas se pueden mencionar B. Bolzano (1781 - 1848), P. Dirichlet (1805 - 1859), K. Weierstrass (1815 - 1897), B. Riemann (1826 - 1866), G. Darboux (1842 - 1917), G. Cantor (1845 - 1918), G. Peano (1858 - 1932), V. Volterra (1860 - 1940) y B. van der Waerden (1903 - 1996), (Gelbaum, 2003), (Kharazishvili, 2018), (Varona, 2009).

Debido al gran impacto que han tenido las funciones extrañas o patológicas en la fundamentación del análisis matemático, en este artículo se presentan varias funciones extrañas, se estudian sus propiedades con respecto a los conceptos de continuidad, diferenciación e integración y se presentan algunas generalizaciones.

2. Metodología

En 1872 el matemático alemán Karl Weierstrass presentó a la consideración de la comunidad matemática de su época un ejemplo de una función continua que es no diferenciable en todo punto de ¡ , contradiciendo la idea intuitiva de la mayor parte de sus contemporáneos que pensaban que las funciones continuas eran diferenciables, excepto en algunos puntos. Este evento abrió el camino a otras muchas funciones con comportamientos patológicos, las cuales se denominan Funciones Extrañas. De hecho, la suma de una función diferenciable y la función de Weierstrass es nuevamente continua pero no diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}$, por lo que hay tantas funciones extrañas como funciones diferenciables. De hecho, se puede probar que las funciones continuas son en general no diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}$.

Una de las primeras funciones extrañas es la función de Dirichlet $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$D(x)=\begin{cases} 0 & , \; x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \\ 1 & , \; x\in\mathbb{Q} \end{cases}$$

la cual es discontinua en todo punto de $\mathbb{R}$. Posteriormente, en el año 1875 Carl J. Thomae modificó la función de Dirichlet de la siguiente manera:

$$T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$T(x)=\begin{cases} 0 & , \; x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{n} & , x\in\mathbb{Q}, \; x=\dfrac{m}{n} \quad ,(m,n)=1, \; n>0 \\ 1 & , \; x=0 \end{cases}$$

La metodología para lograr el objetivo de este artículo es primeramente presentar algunos conceptos y resultados de la teoría de aproximación racional de los números reales, con el fin de estudiar las propiedades de la función de Thomae referente a la continuidad, diferenciación e integrabilidad.

Posteriormente, se estudian las propiedades de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad de las potencias reales $T_k(x)=\left(T(x)\right)^k, k\in\mathbb{R}$, de la función de Thomae. Finalmente, se define la función de Thomae modificada:

$$T_{\{a_n\}}(x)=\begin{cases} 0 & , \; si \; x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \\ a_q & , \; si \; x=\dfrac{p}{q} \quad , \; (p,q)=1, \; q>0 \\ 1 & , \; si \; x=0 \end{cases}$$

donde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos y se estudian sus propiedades referente a la continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad. En particular, se resaltan las funciones de Thomae modificadas $T_{\left\{\frac{1}{n^2}\right\}}$ y $T_{\left\{\frac{1}{n^3}\right\}}$.

3. Preliminares

En esta sección se presentan algunos conceptos y resultados que son importantes para el logro de los objetivos planteados (Bartle, 2011; Folland, 2007; Natanson, 2016)

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función . Denote

$$Cont(f)=\{x\in\mathbb{R} : f \text{ es continua en } x\} \quad , \quad Disc(f)=\mathbb{R}-Cont(f)$$

$$Dif(f)=\{x\in\mathbb{R} : f \text{ es diferenciable en } x\} \quad , \quad Ndif(f)=\mathbb{R}-Dif(f)$$

Estos conjuntos tienen las siguientes propiedades:

i) $Cont(f)$ es un conjunto G_δ, es decir, es una intersección enumerable de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.

ii) $Disc(f)$ es un conjunto F_σ, es decir, es una unión enumerable de conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$.

iii) $Dif(f)$ es una intersección enumerable de conjuntos F_σ.

- **Teorema 1:** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función monótona, entonces $Disc(f)$ es a lo sumo enumerable. Recíprocamente, si S es un subconjunto enumerable de $[a,b]$, entonces existe una función monótona $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $S=Disc(f)$.

- **Teorema 2:** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función.

i) Si f es monótona y $f([a,b])$ es un intervalo, entonces f es continua.

ii) Si f es monótona y satisface la propiedad del valor intermedio, entonces f es continua.

iii) Si f es continua e inyectiva, entonces f es estrictamente monótona.

- **Definición 1:** Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$. E tiene medida cero y se denota por $m(E)=0$, si para todo $\varepsilon>0$ existe una sucesión de intervalos $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}1\left(I_n\right)<\varepsilon$$

donde $l\left(I_n\right)$ es la longitud del intervalo I_n. El valor $\sum_{n=1}^{\infty} l\left(I_n\right)$ es **llamado la longitud total** de los intervalos $I_1, I_2, ...$; sin el requerimiento que estos intervalos sean disjuntos dos a dos.

- **Propiedades**

1. Si E es finito, entonces $m(E)=0$.
2. Si E es enumerable, entonces $m(E)=0$. En particular $m(\mathbb{Q})=0$.
3. Si $F \subset E$ y $m(E)=0$, entonces $m(F)=0$.
4. $m(\mathbb{Q} \cap I)=0$, para todo intervalo I.
5. Si $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $m(E_n)=0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $m(E)=0$.

- **Teorema 3:** (Criterio de la integrabilidad de Lebesgue). Sea $f:\left[a,b\right] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. f es Riemann integrable en $\left[a,b\right]$ sí y solo si, $m(Disc(f))=0$.
- **Teorema 4:** Sea $f:\left[a,b\right] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable, entonces $Cont(f')$ es denso en $\left[a,b\right]$.
- **Teorema 5:** Sea $f:\left[a,b\right] \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona, entonces $m(Ndif(f))=0$.

Los siguientes conceptos y resultados de la teoría de aproximación racional de los números reales son de vital importancia para el desarrollo de este artículo (Varona, 2009).

- **Definición 2:** Un número real a es algebraico (sobre $\mathbb{Q}$), si existe un polinomio $p(x) \in \mathbb{Q}\left[x\right]$ no nulo tal que $p(a)=0$.
- **Teorema 6 (Hurwitz):** Sea α un numero irracional. Entonces existen infinitos números racionales $\frac{p}{q}$ con $(p,q)=1, q>0$ tal que

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q^2}<\frac{1}{q^2}$$

- **Teorema 7 (Roth):** Sea α un número irracional algebraico. Entonces, para todo $\varepsilon>0$, la desigualdad

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

tiene solamente una cantidad finita de soluciones racionales $\frac{p}{q}$, o sea que

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

para todo número racional $\frac{p}{q}$, excepto para una cantidad finita.

- **Teorema 8:** Sea a un número real. Entonces existen números transcendentes α para los cuales la desigualdad

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{a}}$$

tiene infinitas soluciones racionales $\frac{p}{q}$.

4. La Función de Thomae

Un ejemplo de una función acotada que no es Riemann integrable en cualquier intervalo fue presentado por Dirichlet. Esta función está definida por:

$$D(x)=\begin{cases}0 & , \ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\\ 1 & , \ x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

y es discontinua en todo punto $x\in\mathbb{Q}$. Posteriormente, en el año 1875, Thomae modificó la función de Dirichlet de la siguiente manera:

$$T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$T(x)=\begin{cases}0 & , \ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\\ \dfrac{1}{n} & , x\in\mathbb{Q}, \ x=\dfrac{m}{n} \quad ,(m,n)=1, \ n>0\\ 1 & , \ x=0\end{cases}$$

Sea $x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ con $(p,q)=1$ y $q>0$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números irracionales que converge a x; entonces $T(x_n)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y la sucesión $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $T(x)=\dfrac{1}{q}$. Esto implica que T no es continua en $\mathbb{Q}$.

Sea ahora $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ y $\varepsilon>0$. Por la propiedad arquimedeana, existe un número natural N_o, tal que $\dfrac{1}{N_o}<\varepsilon$. Sea K un número natural , $1\leq K\leq N_o-1$. Como números racionales consecutivos con denominador K difieren en $\dfrac{1}{K}$ y el intervalo $(x-1,x+1)$ tiene una longitud 2 , hay a lo sumo $2K$ números racionales en $(x-1,x+1)$ con denominador K. Por lo tanto, hay a lo sumo $2\cdot 1+2\cdot 2+...+2(N_o-1)$ números racionales en el intervalo $(x-1,x+1)$ con denominador menor que N_o.

Tome un número δ con $0<\delta<|x-\gamma|$, donde γ es el número racional con denominador menor que N_o en $(x-1,x+1)$ más cercano a x. Por consiguiente,

$$|T(y)-T(x)|=T(y)\leq\frac{1}{N_o}<\varepsilon$$

para todo $y\in(x-\delta,x+\delta)$. Esto implica que f es continua en x.

De todo lo anterior se tiene que

$$Cont(T)=\mathbb{R}-\mathbb{Q} \quad \text{y} \quad Disc(T)=\mathbb{Q}$$

Pero ¿qué se puede decir de la diferenciabilidad de T ?.

Es claro que T no es diferenciable en todo número racional, o sea, $\mathbb{Q}\subset Ndif(T)$, ya que $Disc(T)=\mathbb{Q}$. Sea $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Note que para todo número natural n existe un número entero j_n tal que

$$\left|\frac{j_n}{n}-x\right|\leq\frac{1}{n}$$

Luego, por definición de T, se tiene que $T\left(\dfrac{j_n}{n}\right)\geq\dfrac{1}{n}$.

Note que

$$\left|\frac{T\left(\frac{j_n}{n}\right)-T(x)}{\frac{j_n}{n}-x}\right| = \frac{T\left(\frac{j_n}{n}\right)}{\left|\frac{j_n}{n}-x\right|} \geq \frac{\frac{1}{n}}{\left|\frac{j_n}{n}-x\right|} \geq 1$$

para todo número natural n. Luego como $\lim_{n\to\infty}\frac{j_n}{n} = x$, se tiene que

$$\lim_{z\to x}\frac{T(z)-T(x)}{z-x} \neq 0$$

Por otro lado, sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números irracionales tales que $\lim_{n\to\infty} z_n = x$.

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T(z_n)-T(x)}{z_n-x} = \lim_{n\to\infty}\frac{0}{z_n-x} = 0$$

Por consiguiente, $T'(x)$ no existe y, por ende $¡ - ¤ \subset Ndif(T)$

De todo lo anterior se tiene que $Ndif(T) = ¡$; o sea que T es no diferenciable en todo punto x de $¡$.

¿Qué se puede decir de la integrabilidad de f en el intervalo $[0,1]$?

Sea $P = \{x_0 = 1, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ una partición del intervalo $[0,1]$ y $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, para todo $i \in ¥$. Como $I_i \cap (¡ - ¤) \neq \varnothing$ se tiene que

$$L(f,p) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

donde $m_i = \inf[f(x) : x \in I_i] = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Luego, por la propiedad arquimedeana, existe un número natural N_o tal que $\frac{1}{N_o} < \frac{\varepsilon}{2}$. Considere el subconjunto $A_{N_o} = \left\{x \in [0,1] : T(x) \geq \frac{1}{N_o}\right\}$. Note que si $x \in A_{N_o}$, entonces $x = \frac{i}{j} \in ¤$ con $i, j \in ¥$, $i, j \leq N_o$. Por consiguiente, A_{N_o} es un conjunto finito y $\left|A_{N_o}\right| \leq N_o{}^2 =: N$.

Sea P_ε una partición del intervalo $[0,1]$ tal que

$$\|P_\varepsilon\| = \max\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\} < \frac{\varepsilon}{4N}$$

Denote $A = \{i : A_{N_o} \cap [x_{i-1}, x_i] \neq \varnothing\}$ y $B = \{i : A_{N_o} \cap [x_{i-1}, x_i] = \varnothing\}$

Luego $|A| \leq 2N$ y, si $M_i = \sup\{T(x) : x \in I_i = [x_{i-1}, x_i]\}$,entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq U(T, P_\varepsilon) &= \sum_i M_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i\in B} M_i \Delta x_i + \sum_{i \in A} M_i \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i\in B} \frac{\varepsilon}{2} \Delta x_i + \sum_{i\in A} \Delta x_i \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_i \Delta x_i + \sum_{i \in A} \frac{\varepsilon}{4N} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4N}|A| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4N}(2N) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Así pues,

$$0 \leq U(T, P_\varepsilon) - L(T, P_\varepsilon) = U(T, P_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto, la función T es integrable en $[0,1]$, y

$$\int_0^1 T(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} U(T, P_\varepsilon) = 0$$

Como la función T es no negativa en el intervalo $[0,1]$, se tiene que

$$f(x) := \int_0^x T(t)dt = 0$$

para todo $x \in [0,1]$; sin embargo, la función $f(x)$ no es una primitiva de la función $T(x)$. Además, si $a < b$, entonces

$$\int_a^b T(x)dx = 0$$

- **Observación:** Como $Disc(T)=\mathbb{Q}$ y $m(\mathbb{Q})=0$, la integrabilidad de la función T en el intervalo $[a,b]$ se pudo deducir del Teorema 3.

5. Potencias de Thomae

Para cada número real k defina la función $T_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por

$$T_k(x)=\left(T(x)\right)^k$$

$$=\begin{cases} 0 \quad , & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q^k} \quad , x\in\mathbb{Q},\ & x=\dfrac{p}{q}\ ,\quad (p,q)=1,\ q>0 \\ 1 \quad , & x=0 \end{cases}$$

Note que, si $k<0$, entonces $T(\mathbb{Q})\subset\left\{x\in\mathbb{C}\ /\ x\geq 1\right\}$ y $T(\mathbb{R}-\mathbb{Q})=\left\{0\right\}$. Por lo tanto,

$$Cont(T_k)=\phi \text{ y } Disc(T_k)=\mathbb{R}$$

Si $k=0$, entonces $T_k=D$. Además, si $k>0$, entonces

$$Cont\left(T_k\right)=\mathbb{R}-\mathbb{Q} \qquad \text{y} \qquad Disc\left(T_k\right)=\mathbb{Q}$$

Por lo tanto, $Ndif\left(T_k\right)=\mathbb{R}$, para todo $k\leq 0$.

Suponga que $0<k\leq 2$. Sea x un número irracional. Luego por el Teorema 6, toda vecindad de x contiene un número racional $\dfrac{p}{q}$ tal que

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$$

Por lo tanto,

$$\left|T_k(x)-T_k\left(\frac{p}{q}\right)\right|=T_k\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q^k}=\frac{q^{2-k}}{q^2}>q^{2-k}\left|x-\frac{p}{q}\right|$$

De donde

$$\left|\frac{T_k(x)-T_k\left(\frac{p}{q}\right)}{x-\frac{p}{q}}\right| > \frac{q^{2-k}\left|x-\frac{p}{q}\right|}{\left|x-\frac{p}{q}\right|} = q^{2-k} \geq 1$$

Además, toda vecindad de x contiene un número irracional z, de donde

$$\left|\frac{T_k(x)-T_k(z)}{x-z}\right| = \frac{0}{|x-z|} = 0$$

Todo esto implica que

$$T_k'(x) = \lim_{z\to x}\frac{T_k(x)-T_k(z)}{x-z}$$

no existe. Así, $Ndif(T_k)=\mathbb{R}$; o sea que T_k es no diferenciable en todo punto x de $\mathbb{R}$.

Suponga ahora que $k>2$. Sea x un número irracional algebraico y considere el cociente diferencial

$$\Delta = \frac{T_k(x+h)-T_k(x)}{h} = \frac{T_k(x+h)}{h}$$

Tome un $\varepsilon>0$ tal que $2+\varepsilon<k$. Sea h lo suficientemente pequeño tal que $x+h$ nunca es igual a uno de los finitos números racionales excepcionales mencionados en el Teorema 7. Luego:

Si $x+h\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, entonces $T_k\left(x+h\right)=0$ y $\Delta=0$.

Si $x+h=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, con $(p,q)=1,\ q>0$, entonces

$$|\Delta| = \left|\frac{T_k\left(x+h\right)}{h}\right| = \left|\frac{1}{hq^k}\right| = \left|\frac{1}{\left(\frac{p}{q}-x\right)q^k}\right|$$

$$= \frac{1}{q^k}\frac{1}{\left|x-\frac{p}{q}\right|} < \frac{1}{q^k}\cdot q^{2+\varepsilon} = \frac{1}{q^{k-2-\varepsilon}}$$

lo cual se puede hacer arbitrariamente pequeño, escogiendo q lo suficientemente grande $\left(k-2-\varepsilon>0\right)$. Como q se hace grande cuando h se hace pequeño, se tiene que

$$\lim_{h\to 0}\Delta = 0$$

Por consiguiente, T_k es diferenciable en x y $T_k'(x)=0$.

Como el conjunto de los números irracionales algebraicos es denso en $\mathbb{R}$, se tiene que $Dif\left(T_k\right)$ es un conjunto denso de $\mathbb{R}$. Además, como $\mathbb{Q}\subset Ndif(T_k)$, $Ndif(T_k)$ es también un conjunto denso de $\mathbb{R}$.

Por otro lado, tome $k=2+2\varepsilon$ con $\varepsilon>0$ y $x\in\left(\mathbb{R}-\mathbb{Q}\right)\cap\left[0,1\right]$. Entonces

$$\left|\frac{T_k(x)-T_k\left(\frac{p}{q}\right)}{x-\frac{p}{q}}\right| = \frac{T_k\left(\frac{p}{q}\right)}{\left|x-\frac{p}{q}\right|} \qquad ,(p,q)=1,\ q>0$$

$$=\frac{\frac{1}{q^k}}{\left|x-\frac{p}{q}\right|}$$

Suponga que

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

entonces

$$\left|\frac{T_k(x)-T_k\left(\frac{p}{q}\right)}{x-\frac{p}{q}}\right|\leq\frac{\frac{1}{q^{2+2\varepsilon}}}{\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}}=\frac{1}{q^{\varepsilon}}$$

Denote

$$E_q=\bigcup_{p=1}^{q-1}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^{2+\varepsilon}},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}\right) \qquad \text{y} \qquad E=\bigcap_{t=1}^{\infty}\bigcup_{q=t}^{\infty}E_q$$

Como

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q^{\varepsilon}}=0$$

T_k es derivable en todo $x\in(0,1)-(\mathbb{Q}\cup E)$ y $T_k'(x)=0$.

Note que la medida de Lebesgue de E_q es

$$m\left(E_q\right)=(q-1)\left(\frac{2}{q^{2+\varepsilon}}\right)=\frac{2(q-1)}{q^{2+\varepsilon}}<\frac{2}{q^{1+\varepsilon}}$$

y $\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+\varepsilon}}<\infty$. Por lo tanto, $m(E)=0$.

Como $m\left(\mathbb{Q}\cup E\right)=0$, se tiene que T_k es diferenciable en todo punto del intervalo $\left[0,1\right]$, excepto en un conjunto de medidas cero. Finalmente, como T_k es una función periódica, se tiene que T_k es diferenciable en $\mathbb{R}$, excepto en un conjunto de medidas cero.

6. Función de Thomae Modificada

Sea $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos. La función de Thomae modificada con respecto a la sucesión $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ se define por

$$T_{\{a_n\}}(x)=\begin{cases} 0 & , \; si \; x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \\ a_q & , \quad si \; x=\dfrac{p}{q} \quad , \; (p,q)=1, \; q>0 \\ 1 & , \quad si \; x=0 \end{cases}$$

Note que, si $a_n=\frac{1}{n^k}$, entonces $T_{\{a_n\}}=T_k$. Además, si $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a cero, entonces

$$Con\left(T_{\{a_n\}}\right)=\mathbb{R}-\mathbb{Q} \quad \text{y} \quad Disc\left(T_{\{a_n\}}\right)=\mathbb{Q}\,.$$

Para ver que tan grande es el conjunto $Ndif\left(T_{\{a_n\}}\right)$, se probará un teorema para las funciones que son cero en los números irracionales y positiva en los números racionales.

- **Teorema 9:** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que

$$f(x)>0 \text{ para } x\in\mathbb{Q} \quad \text{y} \quad f(x)=0 \text{ para } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

Entonces $Ndif(f)\cap\left(\mathbb{R}-\mathbb{Q}\right)$ es un conjunto denso no enumerable de $\mathbb{R}$.

- **Demostración:**

Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Sea $x_1 \in \mathbb{Q}$ y tome $I_1 = \left[x_1 - f(x), x_1 + f(x_i)\right]$, entonces

$$f(x_i) \geq |x_1 - x|, \text{ para todo } x \in I_1 .$$

Sea J_1 un intervalo cerrado con más de un punto tal que

$$J_1 \subset I_1,\ r_1 \notin J_1 \text{ y } \ell\left(J_1\right) < 1 .$$

Sea $x_2 \in \overset{o}{J_1} \cap \mathbb{Q}$ y tome $I_2 = J_1 \cap \left[x_2 - f(x_2), x_2 + f(x_2)\right]$. Entonces I_2 es un intervalo cerrado con más de un punto tal que

$$I_2 \subset I_1,\ \ell(I_2) < 1,\ \ x_2 \in I_2 \cap \mathbb{Q},\ \ r_1 \notin I_2 \text{ y } f(x_2) \geq |x_2 - x|, \text{ para todo } x \in I_2 .$$

Continuando en forma recursiva, después de haber determinado el intervalo cerrado con más de un punto I_n y x_n, se construye el intervalo cerrado con más de un punto I_{n+1} tal que

$$I_{n+1} \subset I_n,\ \ell\left(I_{n+1}\right) < \frac{1}{n},\ \ x_{n+1} \in I_{n+1} \cap \mathbb{Q},\ \ f\left(x_{n+1}\right) \geq \left|x_{n+1} - x\right| \text{ para todo } x \in I_{n+1} \text{ y } r_i \notin I_{n+1}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Como $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de intervalos cerrados encajado con $\lim\limits_{n\to\infty} \ell\left(I_n\right) = 0$, se tiene que existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$. Además, como $r_j \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ para todo $j \in \mathbb{N}$, se tiene que $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Por otro lado, como $a \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\left|\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right| = \frac{f(x_n)}{|x_n - a|} \geq \frac{|x_n - a|}{|x_n - a|} = 1$$

Además, si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{0}{x - a} = 0$$

Por consiguiente, f no es diferenciable en a.

Denote por A el conjunto de los puntos a que se obtienen de esta manera. Sea J un intervalo abierto no vacío y tome $x_1 \in J \cap \mathbb{Q}$; además, tome el intervalo cerrado I_1 con más de un punto tal que $I_1 \subset J \cap \left[x_1 - f(x_1), x_1 + f(x_1)\right]$. De la construcción anterior se tiene que $I_n \subset J$ para todo n. Luego, si $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$, entonces $a \in J$ y $J \cap A \neq \varnothing$.

Esto implica que A es un conjunto denso.

Suponga que A es un conjunto enumerable y sea $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de A. En la construcción de la sucesión de intervalos cerrados encajados $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ incluya la restricción $b_i \notin I_{n+1}$ para $i = 1, 2, ..., n$. Entonces si $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$, se tiene que $a \notin A = \{b_1, b_2, ...\}$ y f no es diferenciable en a, lo que contradice la definición del conjunto A. Por consiguiente, A es un conjunto denso no enumerable y $A \subset Ndif(f) \cap \left(\mathbb{R} - \mathbb{Q}\right)$.

Así pues, $Ndif(f) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ es un conjunto denso no enumerable de $\mathbb{R}$.

Como una consecuencia del teorema anterior, se tiene el siguiente resultado

Corolario 1: Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos que converge a cero. Entonces $Ndif\left(T_{\{a_n\}}\right) \cap \left(\mathbb{R} - \mathbb{Q}\right)$ es un conjunto denso no enumerable de $\mathbb{R}$.

Por otro lado, en el siguiente teorema se probará que existen funciones de Thomae modificadas que son diferenciables en un conjunto enumerable.

- **Teorema 10:** Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números irracionales. Entonces existe una función de Thomae modificada que es diferenciable en el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- **Demostración:**

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina la función $g_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por

$$g_n(q) = \min\left\{\left|\frac{p}{q} - a_n\right| : (p, q) = 1\right\}$$

y la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por

$$g(q) = \min\{g_i(q) : i = 1, 2, ..., q\}$$

Note que $g(q) \leq g_i(q)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, q$; $\lim_{q \to \infty} g_n(q) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{g(n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos convergente a cero.

Considere la función de Thomae modificada $f = T_{\{g(n)^2\}}$.

$$f(x) = T_{\{g(n)^2\}}(x) = \begin{cases} 0 & , \ si\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ g(q)^2 & , \quad si\ x = \dfrac{p}{q} \quad (p,q) = 1, q > 0 \\ 1 & , \quad si\ x = 0 \end{cases}$$

Entonces

$$Cont(f) = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ y } Disc(f) = \mathbb{Q}$$

Sea $n_o \in \mathbb{N}$. Sean p, q números enteros tales que $(p,q) = 1$ y $q \geq n_o$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{f\left(\dfrac{p}{q}\right) - f\left(a_{n_o}\right)}{\dfrac{p}{q} - a_{n_o}} \right| &= \frac{f\left(\dfrac{p}{q}\right)}{\left|\dfrac{p}{q} - a_{n_o}\right|} = \frac{\left(g(q)\right)^2}{\left|\dfrac{p}{q} - a_{n_o}\right|} \\ &\leq \frac{\left(g(q)\right)^2}{g_{n_o}(q)} \leq \frac{\left(g_{n_o}(q)\right)^2}{g_{n_o}(q)} \\ &\leq g_{n_o}(q) \xrightarrow[q \to \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Como

$$\frac{f(x) - f(a_{n_o})}{x - a_{n_o}} = \frac{0}{x - a_{n_o}} = 0$$

Para todo $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y la cantidad de números racionales $\dfrac{p}{q}$ tales que $1 \leq q \leq N$ es finita, para todo número natural N; se tiene f es diferenciable en a_{n_o} y $f'(a_{n_o}) = 0$.

Así pues,

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset Dif(f) = Dif\left(T_{\{(g(n)^2)\}}\right) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

7. Conclusiones

1. La función de Thomae T es un ejemplo de una función con infinitas discontinuidades, no diferenciable en todo punto x de $\mathbb{R}$, pero integrable en todo intervalo cerrado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

2. La función de Thomae modificada $T_{\left\{\frac{1}{n^2}\right\}}$ es continua en $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, pero es no diferenciable en todo punto x de $\mathbb{R}$.
3. La función de Thomae modificada $T_{\left\{\frac{1}{n^3}\right\}}$ es continua en $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ y es diferenciable un todo número irracional algebraico, por lo tanto, $Dif\left(T_{\left\{\frac{1}{n^3}\right\}}\right)$ es un conjunto denso de $\mathbb{R}$ sin embargo, $Ndif\left(T_{\left\{\frac{1}{n^3}\right\}}\right)\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ es un conjunto denso no enumerable de $\mathbb{R}$.
4. Por el Corolario 1, no existe una función de Thomae modificada $T_{\{a_n\}}$ tal que $Dif\left(T_{\{a_i\}}\right)=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. De hecho, $Ndif\left(T_{\{a_i\}}\right)\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ es un conjunto denso no enumerable de $\mathbb{R}$. Sin embargo, si $k>2$, $T_{\left\{\frac{1}{n^k}\right\}}$ es diferenciable casi en todas partes, o sea, $m\left(Ndif\left(T_{\left\{\frac{1}{n^k}\right\}}\right)\right)=0$ (Darst, 1996).

Referencias bibliográficas

Darst, R.B. and Taylor G.D. (1996). *Differentiating Powers of an Old Friend*. The American *Mathematical Monthly, 103* (5). 415-416. https://doi.org/10.1080/00029890.1996.12004762

Dunham, W. (2018). *The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton University Press. USA.

Gelbaum, B.R. and Olmsted, J.M.H. (2003). *Counterexamples in analysis*. Dover Publications, Inc. USA.

Kharazishvili, A. (2018). *Strange Functions in Real Analysis*. CRC Press Taylor & Francis Group. USA.

Varona, J.L. (2009). Differentiability of a Pathological Function, Diophantine Approximation, and a Reformulation of the Thue – Sieguel – Roth Theorem. *Gazette of the Australian Mathematical Society 36* (5). 353 -361. https://austms.org.au/?s=Differentiability+of+a+Pathological+Function%2C+Diophantine+Approximation%2C+and+a+Reformulation+of+the+Thue+–+Sieguel+–+Roth+Theorem.+Gazette+of+the+Australian+Mathematical+Society+36+%285%29.+353+-361.

Edward, C.H. 1994. *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag. USA.

Folland, G. B. 2007. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley. USA.

Bartle, R.G. and Sherbert, D.R (2011). *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons – Inc. USA.

Olmsted, J.M.H. (2009). *Advanced Calculus. American Mathematical Society.* USA.

Natanson, I. R. 2016. *Theory of Functions of Real Variable*. Volume I. Dover Publications, Inc. USA.