Visión Antataura
Vol.3, No.1: 39-56
Junio-Noviembre, 2019
Panamá
ISSN 2520-9892

La Regla de L'Hôpital: Versión Discreta

L'Hôpital Rule: Discrete Version

Ángela Franco[1] *y Eric Hidalgo*[2]

[1]Maestría en Matemática Educativa; Profesora, Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento de Matemática; angela06franco@hotmail.com
[2]Maestría en Matemática Pura y en Matemática Educativa; Profesor, Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Campus Central, Departamento de Matemática; ehidalgog@gmail.com

Resumen: El propósito principal de este artículo es probar que, bajo ciertas condiciones, si para algún número $h > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = L \quad \text{(finito o infinito)}$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

lo cual permitirá establecer una versión discreta de la regla de L'Hôpital; herramienta poderosa para probar la convergencia de sucesiones de números reales. También se utilizará esta versión de la regla de L'Hôpital para deducir el Teorema de Stolz-Cesàro. Finalmente, se presentará una serie de ejemplos para ilustrar la utilidad de esta versión de la regla de L'Hôpital.

Palabras clave: Forma indeterminada, regla de L'Hôpital, sucesiones, convergencia, versión discreta, variable discreta.

Abstract: The main purpose of this paper is to prove that under some conditions, if for a real number $h > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = L \quad \text{(finite or infinite)}$$

then

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

which will allow us to establish a discrete version of the L'Hôpital rule; a powerful tool to show the convergence of sequence of real numbers. We will also use this version of the L'Hôpital rule to infer the Stolz-Cesàro theorem. Finally, we will present a series of examples to illustrate the utility of this version of the L'Hôpital rule.

Key words: Indeterminate form, L'Hôpital rule, sequences, convergence, discrete versión, discrete variable.

Fecha de recepción: 5 de septiembre de 2018 *Fecha de aceptación: 27 de marzo de 2019*

1. Introducción

La regla de L'Hôpital o regla de L'Hôpital-Bernoulli es una regla que usa derivadas para ayudar a calcular límites de funciones que están en forma indeterminadas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Esta regla recibe su nombre en honor al matemático francés del siglo XVII Guillaume François Antoine, marqués de L'Hôpital (1661-1704), quien la dio a conocer en su obra *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), el primer libro de texto escrito sobre cálculo diferencial, aunque actualmente se sabe que la regla se debe a Johann Bernoulli (1667-1748) (Dunhamm, 2005; Smorynski, 2017).

Guillaume François Antoine, más conocido como el Marqués de L'Hôpital, interesado en el aquel tiempo novedoso cálculo diferencial, contrató a Johann Bernoulli para que le enseñara los secretos del nuevo cálculo a cambio de una generosa cantidad económica.

Las clases continuaron por correspondencia cuando Johann tuvo que volver a Basilea, bajo la promesa de no comentar con nadie los contenidos de las lecciones. Johann aprovechó la ocasión para recopilar las cartas con la idea de confeccionar un curso de cálculo diferencial. Pero, el estudiante se adelantó al profesor. Haciendo uso de las lecciones de Johann, L'Hôpital publicó en 1696 el primer libro de texto sobre cálculo diferencial "*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*". Es en este libro donde aparece por primera vez la regla de L'Hôpital. En la introducción, L'Hôpital reconoce su deuda con Johann Bernoulli y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) cuando él escribe "Yo he hecho uso libre de sus descubrimientos, por lo tanto francamente les regreso cualquiera cosa que quieran reclamar como propias (Boyer, 2011; Sánchez y Valdés, 2001).

El irritable Johann, que en efecto reclamó la regla como suya no quedó satisfecho con este gesto de L'Hôpital y en una carta enviada a Leibniz años después, se queja de que L'Hôpital había comprado el talento de otros. Pero, como dijo el buen historiador Dirk Struik "Deje que el buen marqués mantenga su regla elegante, él pagó por esta (Duham, 2005). Para evitar perder gloria por segunda vez, Johann escribió un tratado extenso sobre cálculo integral que fue publicado bajo su nombre en 1742.

Las primeras evidencias sobre la originalidad de las reclamaciones de Johann Bernoulli aparecieron en 1922, cuando se encontró en la biblioteca de Basilea un ejemplar del curso de cálculo diferencial de Johann que este nunca llegó a publicar.

Si se compara el curso de Johann con el libro de L'Hôpital, resulta evidente que la esencia de ambos es la misma. Pero, la prueba definitiva fue la aparición en 1955 de las primeras correspondencias entre Johann Bernoulli y L'Hôpital. Aquí se descubrió la sorprendente propuesta que el marqués de L'Hôpital hizo a Johann Bernoulli en una carta fechada el 17 de marzo de 1694. Aunque la respuesta de Johann no se conserva, se entiende que aceptó el trato. En las siguientes cartas, Johann escribe a L'Hôpital respondiendo a sus preguntas. Precisamente una de ellas contiene la regla de L'Hôpital (Ash, Berele y Catouis, 2012).

Una versión estándar de la regla de L'Hôpital afirma que si f y g generan la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ en el infinito, y si $g'(x) \neq 0$ en una vecindad de ∞, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ implica que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, donde L es un número real extendido (Bartle, 2014; Morgan, 2005).

En este artículo se prueba una versión de la regla de L'Hôpital para el caso de funciones discretas, la cual es una herramienta de gran utilidad para estudiar la convergencia de sucesiones reales. Posteriormente, como un corolario, se deduce el Teorema Stolz-Cesàro. Finalmente, se presenta una serie de ejemplos que ilustran la utilidad de los resultados probados.

2. Versión Discreta de la Regla de L'Hôpital

En esta sección se presenta una versión de la regla de L'Hôpital para el caso de funciones discretas. Se prueba que bajo ciertas condiciones, si para algún número real h>0,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = L \quad \text{(finito o infinito)}$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

lo cual servirá como herramienta para el estudio de convergencia de sucesiones.

Teorema 1: Sean $\emptyset, \psi$: $[\mathrm{a}, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones y $h > 0$. Supongamos que

$i)$ $\lim_{x\to\infty} \emptyset(x) = \lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$

$ii)$ Existe un $x_0 > a$ tal que $\Delta\psi(x) = \psi(x+h) - \psi(x)$ no cambia de signo para $x \geq x_0$

$iii)$ $\lim_{x\to\infty} \frac{\Delta\emptyset(x)}{\Delta\psi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\emptyset(x+h) - \emptyset(x)}{\psi(x+h) - \psi(x)} = L \quad \text{(finito o infinito)}$

Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\emptyset(x)}{\psi(x)} = L$$

Demostración: Debe suponerse, primeramente, que $\Delta\psi(x) > 0$ para todo $x \geq x_0$.
Entonces se considera el caso $|L| < \infty$. Por (iii), para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \geq x_0$ tal que

$$\left|\frac{\Delta\emptyset(x)}{\Delta\psi(x)} - L\right| < \varepsilon$$

siempre que $x \geq N$. Luego,

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\emptyset(x+h) - \emptyset(x)}{\psi(x+h) - \psi(x)} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto,

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\emptyset(x+h+h) - \emptyset(x+h)}{\psi(x+h+h) - \psi(x+h)} = \frac{\emptyset(x+2h) - \emptyset(x+h)}{\psi(x+2h) - \psi(x+h)} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

De igual manera,

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\emptyset(x+3h) - \emptyset(x+2h)}{\psi(x+3h) - \psi(x+2h)} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\emptyset(x+kh) - \emptyset(x+(k-1)h)}{\psi(x+kh) - \psi(x+(k-1)h)} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

para $k = 1,2,3 \cdots$. Como por hipótesis $\Delta\psi(x) > 0$ para todo $x \geq x_0$, de la desigualdad anterior se tiene que

$$\emptyset(x+kh) - \emptyset(x+(k-1)h) < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)[\psi(x+kh) - \psi(x+(k-1)h)]$$

Así,

$$\emptyset(x+h) - \emptyset(x) < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)[\psi(x+h) - \psi(x)]$$

$$\emptyset(x+2h) - \emptyset(x+h) < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)[\psi(x+2h) - \psi(x+h)]$$

$$\emptyset(x+3h) - \emptyset(x+2h) < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)[\psi(x+3h) - \psi(x+2h)]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\emptyset(x+nh) - \emptyset(x+(n-1)h) < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)[\psi(x+nh) - \psi(x+(n-1)h)]$$

Sumando miembro a miembro estas desigualdades se obtiene

$$\emptyset(x+nh) - \emptyset(x) < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)[\psi(x+nh) - \psi(x)] \tag{1}$$

De forma análoga se obtiene que

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)[\psi(x+nh) - \psi(x)] < \emptyset(x+nh) - \emptyset(x) \tag{2}$$

De (1) y (2) se tiene que

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)[\psi(x+nh) - \psi(x)] < \emptyset(x+nh) - \emptyset(x) < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)[\psi(x+nh) - \psi(x)]$$

y

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\emptyset(x+nh) - \emptyset(x)}{\psi(x+nh) - \psi(x)} < L + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

para todo $n = 1, 2, 3, \cdots$. Como

$$\lim_{x\to\infty} \emptyset(x) = \lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$$

de (3) se deduce que

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\emptyset(x)}{\psi(x)} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $x \geq N$. Así pues

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\emptyset(x)}{\psi(x)} = L$$

Véase ahora el caso $L = \infty$. Por (iii), para cada $M > 0$ existe un entero positivo $N \geq x_0$ tal que

$$\frac{\emptyset(x+h) - \emptyset(x)}{\psi(x+h) - \psi(x)} > M$$

siempre que $x \geq N$. Como $\Delta\psi(x) > 0$ para todo $x \geq x_0$,

$$\emptyset(x+h) - \emptyset(x) > M[\psi(x+h) - \psi(x)]$$

es decir,

$$\Delta\emptyset(x) > M\Delta\psi(x) > 0$$

para todo $x \geq N \geq x_0$. Luego,

$$\Delta\emptyset(x) > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta\emptyset(x)} = 0^+$$

Usando el resultado del caso $|L| < \infty$, se obtiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{\emptyset(x)} = 0^+$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\emptyset(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{\psi(x)}{\emptyset(x)}} = 0^+$$

El caso $L = -\infty$ se deduce del caso $L = \infty$ tomando $\emptyset^*(x) = -\emptyset(x)$.

Finalmente, el caso $\Delta\psi(x) < 0$ se deduce de todo lo anterior, tomando $-\psi(x)$ en lugar de $\psi(x)$.

Corolario 1: Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que

$i)$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$ii)$ Existen enteros positivos h y N_0 tales que $\Delta b_n = b_{n+h} - b_n$ no cambia de signo, para todo $n \geq N_0$

$iii)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+h} - a_n}{b_{n+h} - b_n} = L$ (finito o infinito)

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Demostración: Bajo las hipótesis del Corolario, existen funciones $\emptyset, \psi: [1, \infty) \to \mathbb{R}$ tales que

1) $\emptyset(n) = a_n$, $\psi(n) = b_n$

2) $\lim_{x\to\infty} \emptyset(x) = \lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$

3) $\Delta\psi(x) = \psi(x+h) - \psi(x)$ no cambia de signo para $n \geq N_0$

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{\Delta\emptyset(x)}{\Delta\psi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\emptyset(x+h) - \emptyset(x)}{\psi(x+h) - \psi(x)} = L$

Luego, por el Teorema 1,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\emptyset(x)}{\psi(x)} = L$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Corolario 2: (Teorema de Stolz-Cesàro 1)

Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que

$i)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$ii)\ \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente decreciente

$iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \quad \text{(finito o infinito)}$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata del Corolario 1.

Teorema 2: Sean $\emptyset, \psi$: $[\mathrm{a}, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones acotadas en cada subintervalo finito de $[\mathrm{a}, \infty)$ y h>0. Supóngase que

$i)\ \lim_{x\to\infty} \psi(x) = \infty$

$ii)$ Existe un $x_0 > a$ tal que $\Delta\psi(x) = \psi(x+h) - \psi(x)$ no cambia de signo para $x \geq x_0$

$iii)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\Delta\emptyset(x)}{\Delta\psi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\emptyset(x+h) - \emptyset(x)}{\psi(x+h) - \psi(x)} = L \quad \text{(finito o infinito)}$

Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\emptyset(x)}{\psi(x)} = L$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\Delta\psi(x) > 0$ para todo $x \geq x_0$.

Considérese, primeramente, el caso $|L| < \infty$. Similarmente, al Teorema 1, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \geq x_0$ tal que

$$\left| \frac{\emptyset(x+nh) - \emptyset(x)}{\psi(x+nh) - \psi(x)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

para todo $x \geq N$ y $n = 1,2,3,\cdots$.

Por otro lado, note que para cada $x \geq N$ existe un $r_x \in [N, N+h)$ y un entero $j \geq 0$ tal que $x = r_x + jh$.

Por lo tanto,

$$\left|\frac{\emptyset(x)-\emptyset(r_x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}-L\right| = \left|\frac{\emptyset(r_x+jh)-\emptyset(r_x)}{\psi(r_x+jh)-\psi(r_x)}-L\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5)$$

para todo $x \geq N$. Además,

$$\frac{\emptyset(x)}{\psi(x)} = \frac{\emptyset(x)-\emptyset(r_x)+\emptyset(r_x)}{\psi(x)}$$

$$= \frac{\dfrac{\emptyset(x)-\emptyset(r_x)+\emptyset(r_x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}}{\dfrac{\psi(x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}}$$

$$= \frac{\dfrac{\emptyset(x)-\emptyset(r_x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}+\dfrac{\emptyset(r_x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}}{\dfrac{\psi(x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}}$$

Por consiguiente

$$\frac{\emptyset(x)}{\psi(x)}-L = \frac{\dfrac{\emptyset(x)-\emptyset(r_x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}+\dfrac{\emptyset(r_x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}}{\dfrac{\psi(x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}}-L$$

$$= \frac{\dfrac{\emptyset(x)-\emptyset(r_x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}+\dfrac{\emptyset(r_x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}-L\left[\dfrac{\psi(x)-\psi(r_x)+\psi(r_x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}\right]}{\dfrac{\psi(x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}}$$

$$= \left[\frac{\emptyset(x)-\emptyset(r_x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}-L+\frac{\emptyset(r_x)-L\psi(r_x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}\right]\left[\frac{\psi(x)-\psi(r_x)}{\psi(x)}\right]$$

$$= \left[\frac{\emptyset(x)-\emptyset(r_x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}-L\right]\left[1-\frac{\psi(r_x)}{\psi(x)}\right]+\left[\frac{\emptyset(r_x)-L\psi(r_x)}{\psi(x)}\right]$$

de donde

$$\left|\frac{\emptyset(x)}{\psi(x)}-L\right| \leq \left|\frac{\emptyset(x)-\emptyset(r_x)}{\psi(x)-\psi(r_x)}-L\right|+\left|\frac{\emptyset(r_x)-L\psi(r_x)}{\psi(x)}\right| \qquad (6)$$

ya que $0 < \frac{\psi(r_x)}{\psi(x)} < 1$.

Como $\emptyset(x)$ y $\psi(x)$ son acotadas en el intervalo $[N, n+h)$ y $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \infty$, existe un $N^* > N$ tal que

$$\left|\frac{\emptyset(r_x) - L\psi(r_x)}{\psi(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

para todo $x \geq N^*$. Finalmente, de (5), (6) y (7) se tiene que

$$\left|\frac{\emptyset(x)}{\psi(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $x \geq N^*$. Así pues,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\emptyset(x)}{\psi(x)} = L$$

Considérese ahora el caso $L = \infty$. Sea $M > 0$, entonces existe un $N \geq x_0$ tal que

$$\frac{\Delta\emptyset(x)}{\Delta\psi(x)} = \frac{\emptyset(x+h) - \emptyset(x)}{\psi(x+h) - \psi(x)} > M$$

para todo $x \geq N$. Como $\Delta\psi(x) > 0$ para todo $x \geq x_0$, se tiene que $\Delta\emptyset(x) > M\psi(x) > 0$ para todo $x \geq N$.

Por otro lado, para todo número natural n y para todo $x \geq N$ se tiene que

$$\frac{\emptyset(x+nh) - \emptyset(x)}{\psi(x+nh) - \psi(x)}$$

Como $x = r_x + jh$, para algún $r_x \in [N, N+h)$, $j \geq 1$, se tiene que

$$\frac{\emptyset(x) - \emptyset(r_x)}{\psi(x) - \psi(r_x)} = \frac{\emptyset(r_x + jh) - \emptyset(r_x)}{\psi(r_x + jh) - \psi(r_x)} > M$$

Luego,

$$\emptyset(x) > M[\psi(x) - \psi(r_x)] + \emptyset(r_x)$$

Esto implica que

$$\lim_{x\to\infty} \emptyset(x) \geq M \lim_{x\to\infty} [\psi(x) - \psi(r_x)] + \emptyset(r_x) = \infty$$

ya que la función ψ es acotada en $[N, N+h)$ y $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \infty$.

Como

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Delta\psi(x)}{\Delta\emptyset(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\Delta\emptyset(x)}{\Delta\psi(x)}}=0^{+}$$

Aplicando lo demostrado en el caso finito, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Delta\emptyset(x)}{\Delta\psi(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\Delta\psi(x)}{\Delta\emptyset(x)}}=\infty$$

Finamente, reemplazando $\emptyset(x)$ por $-\emptyset(x)$, se deduce el caso $L=-\infty$.

Corolario 3: Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que

$i)$ $\lim\limits_{x\to\infty} b_n=\infty$

$ii)$ Existen enteros positivos h y N_0 tal que $\Delta b_n=b_{n+h}-b_n$ no cambia de signo para todo $n\geq N_0$

$iii)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Delta a_n}{\Delta b_n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_{n+h}-a_n}{b_{n+h}-b_n}=L$ (finito o infinito)

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$$

Demostración: Bajo la hipótesis del corolario, existen funciones $\emptyset,\psi$: $[1,\infty)\to\mathbb{R}$ acotadas en cada subintervalo finito de $[1,\infty)$ tal que

1) $\emptyset(x)=a_n,\ \psi(x)=\ b_n$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\ \psi(x)=\infty$

3) $\Delta\psi(x)=\ \psi(x+h)-\psi(x)$ no cambia de signo para $x\geq N_0$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\Delta\emptyset(x)}{\Delta\psi(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\emptyset(x+h)-\emptyset(x)}{\psi(x+h)-\psi(x)}=L$

Luego, por el Teorema 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\emptyset(x)}{\psi(x)}=L$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$$

Corolario 4: (Teorema de Stolz-Cesàro 2)

Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que

$i)$ $\lim\limits_{x\to\infty} b_n=\infty$

$ii)$ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente

$iii)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Delta a_n}{\Delta b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L$ (finito o infinito)

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata del Corolario 3 (Kaczor y Nowak, 2000).

Corolario 5: Sea $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ una función acotada en cada subintervalo finito de $[a,\infty)$

$a)$ Si $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]=L$ (finito o infinito)

Entonces

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=L$$

$b)$ Si $inf\{f(x): x\in[a,\infty)\}=c>0$ y

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=L \quad \text{(finito o infinito)}$$

Entonces

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=L$$

Demostración

$a)$ Considérense las funciones $\emptyset,\psi$: $[\mathrm{a},\infty)\to\mathbb{R}$ definidas por $\emptyset(x)=f(x)$ y $\psi(x)=x$

y tómese $h = 1$. Entonces, $\emptyset$ y ψ están acotadas en cada subintervalo finito de $[a, \infty)$ y

$i)$ $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \infty$

$ii)$ $\Delta\psi(x) = \psi(x+1) - \psi(x) = 1 > 0$, para todo $x \geq a$

$iii)$ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\Delta\emptyset(x)}{\Delta\psi(x)} = \lim_{x\to\infty} [f(x+1) - f(x)] = L$

Luego, por el Teorema 2 se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\emptyset(x)}{\psi(x)} = L = \lim_{x\to\infty} [f(x+1) - f(x)]$$

$b)$ Para este caso se consideran las funciones $\emptyset$, ψ: $[\mathrm{a}, \infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\emptyset(x) = \ln(f(x)) \quad \text{y} \quad \psi(x) = x$$

y tómese $h = 1$. Entonces, $\emptyset$ y ψ están acotadas en cada subintervalo finito de $[a, \infty)$ y

$i)$ $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \infty$

$ii)$ $\Delta\psi(x) = \psi(x+1) - \psi(x) = 1 > 0$, para todo $x \geq a$

$iii)$ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\Delta\emptyset(x)}{\Delta\psi(x)} = \lim_{x\to\infty} [\ln(f(x+1)) - \ln(f(x))] = \lim_{x\to\infty} \ln\left[\dfrac{f(x+1)}{f(x)}\right] = \ln(L)$

Luego, por el Teorema 2, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\emptyset(x)}{\psi(x)} = \ln(L)$$

o sea

$$\lim_{x\to\infty} \ln[f(x)]^{\frac{1}{x}} = \ln(L)$$

de donde,

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{x}$$

Corolario 6: Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales

$a)$ Si $\lim_{x\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = L$ (finito o infinito)

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = L$$

$b)$ Si $a_n \geq c > 0$ para todo $n \geq 1$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \qquad \text{(finito o infinito)}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

Demostración: Esto una consecuencia inmediata del Corolario 5.

3. Aplicaciones

Como una aplicación de la versión discreta de la regla de L'Hôpital, en esta sección se estudiará la convergencia de sucesiones de números reales.

Ejemplo 1: Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \qquad \text{(finito o infinito)}$$

Se prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = L$$

En efecto, se considera la sucesión $a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$$

Luego, por el Corolario 6, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = L$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = L$$

Ejemplo 2: Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \qquad \text{(finito o infinito)}$$

Se prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = L$$

En efecto, considérese la sucesión

$$a_n = x_1 x_2 \cdots x_n$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$$

Luego, por el Corolario 6, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = L$$

Ejemplo 3: Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesión de números reales tales que

$a)$ $y_n > 0$, para todo n≥ 1

$b)$ $\lim_{n\to\infty}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = \infty$

$c)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L \qquad \text{(finito o infinito)}$

Se prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = L$$

En efecto, considérense las sucesiones

$$a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \qquad \text{y} \qquad b_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

Entonces

$i)$ $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = \infty$

$ii)$ Para $h = 1$, se tiene que $\Delta b_n = b_{n+1} - b_n = y_{n+1} > 0$, para todo $n \geq 1$.

$iii)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = L$

Luego, por el Corolario 3, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}=L$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{y_1+y_2+\cdots+y_n}=L$$

Ejemplo 4: Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que

$a)$ $y_n>0$, para todo n≥ 1

$b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(y_1+y_2+\cdots+y_n)=\infty$

$c)$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=L$ (finito o infinito)

Se prueba que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{y_1+y_2+\cdots+y_n}=L$$

En efecto, considérense las sucesiones

$$a_n=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \quad \text{y} \quad b_n=y_1+y_2+\cdots+y_n$$

Entonces

$i)$ $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(y_1+y_2+\cdots+y_n)=\infty$

$ii)$ Para $h=1$, se tiene que $\Delta b_n=b_{n+1}-b_n=y_{n+1}>0$ para todo $n\geq 1$

$iii)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Delta a_n}{\Delta b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}y_{n+1}}{y_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=L$

Luego, por el Corolario 3, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}=L$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{y_1+y_2+\cdots+y_n}=L.$$

Ejemplo 5: Estúdiese la convergencia de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

En efecto, tómese

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad y \qquad b_n = \sqrt{n}$$

Entonces,

$i)$ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

$$ii) \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$= 2$$

Luego, por el Corolario 4, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\Delta a_{n+1}}{\Delta b_{n+1}} = 2$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 2$$

Ejemplo 6: Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que $x_n \geq 1$, para todo $n \geq 1$. Supóngase que existe un número real positivo p tal que

$$\lim_{n\to\infty} n^p x_n = L \qquad \text{(finito o infinito)}$$

Se prueba que $\lim_{n\to\infty} n^p[x_1x_2\cdots x_n]^{\frac{1}{n}} = Le^p$.

En efecto, considérese la sucesión

$$a_n = [x_1 x_2 \cdots x_n] n^{pn}$$

Entonces, $a_n \geq 1$ para todo $n \geq 1$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}](n+1)^{p(n+1)}}{[x_1 x_2 \cdots x_n] n^{pn}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} [x_{n+1}(n+1)^p] \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p$$

$$= Le^p$$

Luego, por el Corolario 6-b, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = Le^p$. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} n^p [x_1 x_2 x_3 \cdots x_n]^{\frac{1}{n}} = Le^p$$

Referencias bibliográficas

Ash, J.M., Berele, A. y Catoiu, S. (2012). Plausible and genuine extensions of L'Hôpital's Rule. *Mathematics Magazine,* 85(1), 52-60.

Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2014). *Introduction to real analysis*. USA: John Wiley and Sons.

Boyer, C.B. (2011). *A History of mathematics*. USA: John Wiley and Sons.

Dunham, W. (2005). *The calculus gallery: Masterpieces, form Newton to Lebesgue.* USA: Princeton University Press.

Gray, J. (2015). *Real and the complex: A history of analysis in the 19th century.* USA: Springer.

Kaczor, W. J. y Nowak, M.T. (2000). *Problem in mathematical analysis I*. USA: American Mathematical Society.

Little, C.H., Teo, K. L., and Van Brunt, B. (2010). *Real analysis via sequence and series*. USA: Springer.

Morgan, F. (2005). *Real analysis and applications*. USA: American Mathematical Society.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2001). *Los Bernoulli, geómetras y viajeros*. España: Editorial Nivola.

Smorynski, C. (2017). MVT: *A Most valuable theorems.* USA: Springer.