Visión Antataura
Vol.8, No.1: 64-83
Junio – Noviembre, 2024
Panamá
ISSN L 2520-9892

Expresiones exactas de las funciones trigonométricas de ángulos construibles con regla y compás

Exact expression for trigonometric functions of constructible angles with ruler and compass

Ángela Yaneth Franco[1], José Ángel González[2]

[1]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Escuela de Matemática, Panamá; angela.franco@up.ac.pa; https://orcid.org/0000-0002-0538-1688
[2]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Escuela de Matemática, Panamá; joseangel.gonzalez@up.ac.pa; https://orcid.org/0000-0001-6875-6224

Fecha de recepción: 17 de febrero de 2024 *Fecha de aceptación: 12 de abril de 2024*

DOI https://doi.org/10.48204/j.vian.v8n1.a5228

Resumen: El concepto de número construible con regla y compás nació en la antigua civilización griega con la historia de la imposibilidad de la construcción con regla y compás de la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo y la trisección de un ángulo. En este artículo se presentan las propiedades básicas del conjunto $F_{cst} = \{z \in \mathbb{C}: z \text{ es construible}\}$ de los números complejos construibles. Se caracterizan los números construibles y se modelan los problemas griegos clásicos, para probar que ellos son insolubles. Finalmente, se caracterizan los ángulos construibles y se determinan expresiones exactas para las funciones seno y coseno de ángulos construibles.

Palabras clave: Números construibles, ángulos construibles, números de Fermat, números algebraicos, función de Euler.

Abstract: The concept of constructible number with ruler and compass was born in the ancient Greek Civilization, with the history of the impossibility to construct with ruler and compass the doubling of the cube, the squaring of the circle, and the trisection of an angle. This article presents the basic properties of the set.$F_{cst} = \{z \in \mathbb{C}: z \text{ is constructible}\}$ of constructible complex numbers. Constructible numbers are characterized and classical Greek problems are modeled to prove that they are unsolvable. Finally, constructible angles are characterized, and exact expressions for the sine cosine functions of constructible angles are determined.

Keywords: Algebraic numbers, constructible angles, constructible numbers, Euler's function, Fermat numbers.

1. Introducción

La idea de construcciones con regla y compás nació en la antigua civilización griega, y consistía en la construcción de longitudes, ángulos (figura formada por dos rectas que se cortan) y otras figuras geométricas; usando solo la regla idealizada (una regla infinita con un solo eje y sin marcas) que nada más puede ser usada para trazar la recta entre dos puntos, previamente, dados y el compás. El compás solo puede ser usado para construir una circunferencia con centro dado y que pasa por un punto dado (el compás no puede ser levantado para dibujar una circunferencia centrada en otro punto con el mismo radio de la circunferencia previamente dada). De igual manera, dados dos puntos a una distancia d, la regla no puede ser usada para marcar un punto en otra recta a una distancia d de un punto dado en esta recta (Suzuki, 2008; Dunham, 1990; Sutton, 2009).

Los matemáticos de la antigua civilización griega descubrieron cómo construir sumas, diferencias, productos, cocientes y raíces cuadradas de longitudes dadas. Ellos también pudieron construir la mitad de un ángulo dado y polígonos regulares de 3, 4 y 5 lados. Sin embargo, a pesar de la gran habilidad de muchos matemáticos brillantes, ellos no pudieron construir un tercio de un ángulo dado, excepto en casos particulares, ni un cuadrado con la misma área de un círculo dado, o el polígono regular de siete (7) lados, o el lado de un cubo cuyo volumen es el doble del volumen de un cubo dado. Se tuvo que esperar hasta los siglos XVIII y XIX, que se desarrollara la teoría de cuerpos, para responder estas preguntas (Trillo, 2019; Batista, 2013; Gilbert, 2002).

El objetivo de este artículo es presentar los resultados básicos de la teoría de cuerpos, para modelar las construcciones con regla y compás desde un punto de vista algebraico y, darles respuesta a los problemas griegos clásicos. Finalmente, se buscarán expresiones exactas para las funciones seno y coseno de ángulos construibles con regla y compás.

2. Metodología

Para lograr el objetivo planteado en este trabajo, se define el concepto de construcción geométrica con regla y compás y se estudian las propiedades básicas del conjunto

$$F_{cst} = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ es construible}\}$$

de los números complejos construibles. Se prueba que F_{cst} es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ cerrado por raíces cuadradas y se presentan caracterizaciones de los números construibles. Posteriormente, se modelan, algebraicamente, los cuatro problemas griegos clásicos y se prueba que estos problemas son insolubles con regla y compás. Finalmente, después de caracterizar los ángulos construibles, se determinan expresiones exactas para las funciones seno y coseno de ángulos construibles, usando las identidades fundamentales de la trigonometría.

3. Resultados y discusión

Construcciones con regla y compás

El concepto de número construible nace en la antigua civilización griega con la historia de la imposibilidad de la construcción con regla y compás de tres problemas: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo. Junto a estos tres problemas clásicos se encuentra el problema de construir con regla y compás polígonos regulares (lo que equivale a construir ángulos $\theta = \frac{2\pi}{n}$ radianes); aunque los griegos sabían construir polígonos regulares con n lados, donde $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$; $n = 3$; $n = 5$; *o* n es el producto de dos o tres de esos números. En 1796, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) probó que el polígono de $n = 17$ lados es construible.

En 1837, Pierre Wantzel (1814-1848) probó algebráicamente que los problemas de la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo son imposibles de resolver con regla y compás y, además determinó cuáles de los polígonos regulares son construibles. Más precisamente, Wantzel probó que el polígono regular de n lados es construibles si y solo si, n es el producto de una potencia de dos y cualquier cantidad de números de Fermat primos diferentes (o sea de la forma $F_K = 2^{2^k} + 1$). Finalmente, en 1882 Carl Louis Ferdinand Von Lindermann (1852-1939) probó, rigurosamente, la imposibilidad de la cuadratura del círculo, además probó que π es un número trascendente (Dunham, 1990; Hartshorne, 2000; Sutton, 2009; Gilbert, 2002).

En lo que sigue se identificará el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ con el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, con la identificación

$$z = (a,b) = a + ib$$

Con esta identificación, puntos en el plano son números complejos y, construir un punto es lo mismo que construir un número complejo. A continuación, se precisa lo que significa construir (con regla y compás) un punto o un número complejo:

Construcción de rectas y circunferencias con regla y compás

R: Dado dos puntos o números complejos diferentes $z_1,\ z_2,$ se puede construir o trazar la recta que pasa a través de ellos.

C: Dado un punto z_1 y dos puntos distintos $z_2,\ z_3,$ se puede construir o trazar la circunferencia con centro en z_1 y radio $r = |z_2 - z_3|$

Observación: Aunque la regla no se puede usar para marcar distancias y el compás no puede trasladar medidas (o sea que el compás debe cerrarse después de ser levantado del papel), dado dos puntos construibles a una distancia d y una recta l con un punto construible P en l, se puede construir un punto Q en l a una distancia d de P. También, sí se puede construir una circunferencia de radio r, dado un punto construible P, se puede construir la circunferencia de radio r centrada en P.

La intersección de rectas y circunferencias construibles producen nuevos puntos, los cuales se llamarán puntos construibles (con regla y compás), como sigue:

P_{ll} = El punto de intersección de dos rectas construibles diferentes

P_{lc} = El o los puntos de intersección de una recta y una circunferencia construibles

P_{cc} = El o los puntos de intersección de dos circunferencias construibles diferentes

Definición: El punto $z \in \mathbb{C}$ es construible si existe una sucesión finita de construcciones con regla y compás con las condiciones (R) y (C) y puntos P_{ll}, P_{lc} y P_{cc} que comienzan con 0 y 1 y terminan con z. El conjunto de los puntos construibles se denota por:

$$F_{cst} = \{z \in \mathbb{C}: z \text{ es construible}\}$$

En el siguiente teorema se presentan las características algebraicas del conjunto K_{cst} de los números construibles (Howie, 2006; Trillo, 2019; Batista, 2013).

Teorema 1: El Conjunto K_{cst} de todos los números construible es un cuerpo. Además,

i) $z = a + bi \in K_{cst}$ si y solo si $a, b \in K_{cst}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$

ii) $z = re^{i\theta} \in K_{cst}$ si y solo si $r, \theta \in K_{cst}$, donde θ está medido en radianes

iii) Si $z \in K_{cst}$, entonces $\overline{z}, \sqrt{z} \in K_{cst}$

iv) K_{cst} es el subcuerpo más pequeño de $\mathbb{C}$ que posee la propiedad (iii); es decir, K_{cst} es la intersección de todos los subcuerpos de $\mathbb{C}$ que poseen la propiedad(iii).

En el siguiente teorema se utiliza la teoría de cuerpos para caracterizar los elementos de K_{cst} (Trillo, 2019; Howie, 2006; Batista, 2013)

Teorema 2: $z \in K_{cst}$ si y solo si existe una sucesión de subcuerpos $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n$ de $\mathbb{C}$ tal que

$$Q = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{n-1} \subset K_n \subset \mathbb{C}$$

$z \in K_n$ y $[K_i : K_{i-1}] \leq 2$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, donde $[K_i : K_{i-1}]$es la dimensión de K_i como espacio vectorial sobre K_{i-1}.

De este teorema se deduce el siguiente resultado:

Corolario 1: Si $z \in K_{cst}$, entonces $[Q(z) : Q] = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, todo número construible es algebraico sobre Q.

Definición: Un ángulo de medida θ (en grados o radianes) es construible si se pueden construir dos rectas que se interceptan tal que, el ángulo entre ella es θ.

Como

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

se tiene que el ángulo θ es construible si y solo si $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ son construible. Luego como

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}, \quad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

se tiene que (Francis, 1978)

$$\theta \in K_{cst} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta, \cos\theta \in K_{cst} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta \in K_{cst} \Leftrightarrow \cos\theta \in K_{cst}$$

Teorema 3: Si $\theta = 20^{o} (= \frac{\pi}{9} rad)$, entonces θ no es construible

Demostración

De la fórmula del triple ángulo para coseno se tiene que

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$$

o sea,

$$\cos(60^{o}) = 4\cos^3(20^{o}) - 3\cos(20^{o})$$

De donde

$$4\cos^3(20^{o}) - 3\cos(20^{o}) = \frac{1}{2}$$

y

$$8\cos^3(20^{o}) - 6\cos(20^{o}) - 1 = 0$$

Tomando $a = \cos(20^{o})$, se tiene

$$8a^3 - 6a - 1 = 0$$

Por lo tanto, $x = 2\cos(20^{o})$ es raíz del polinomio

$$p(x) = x^3 - 3x - 1 \in Q[x]$$

Como $p(x)$ no posee raíces en Q, se tiene que $p(x)$ es irreducible en $Q[x]$. Esto implica que $p(x)$ es el polinomio mínimo mónico para el cual a es raíz. Por lo tanto, $[Q(a):Q] = 3$. Luego, por el Corolario 1, $a = \cos(20^{o})$ no es construible y, por ende, $\theta = 20^{o}\left(= \frac{\pi}{9} rad\right)$ no es construible.

Observación:

1. Del Teorema 3 se deduce que no todo ángulo construible se puede trisecar, lo que prueba la imposibilidad de la trisección de un ángulo construible arbitrario (dividir un ángulo en tres partes iguales).

2. El problema de la cuadratura de un círculo consiste en construir un cuadrado con la misma área de un círculo dado. Si se supone que el círculo dado tiene radio 1, entonces se debe construir un cuadrado con longitud de sus lados $\sqrt{\pi}$, lo cual es imposible, ya que $\sqrt{\pi}$ no es un número algebraico (ver con el Corolario 1).

3. El problema de la duplicación del cubo consiste en construir un cubo con el doble del volumen de un cubo dado. Si se supone que los lados del cubo dado miden 1, entonces se necesita construir un cubo cuya longitud de sus lados sea $\sqrt[3]{2}$. Pero como $[Q(\sqrt[3]{2}):Q]=3$, por el Corolario 1, $\sqrt[3]{2}$ no es construible.

En el siguiente teorema se caracterizan los polígonos regulares construibles (Howie, 2006), (Batista, 2013; Gilbert, 2002; Sutton, 2009).

Teorema 4 (Gauss-Wantzel): El polígono regular de n lados $(n\geq 3)$ es construible si y solo si la factorización de n en factores primos tiene la forma

$$n=2^r\cdot p_1\cdot p_2\cdots p_k$$

donde r y k son números enteros no negativos y $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son números primos distintos tales que $p_1-1, p_2-1, \ldots, p_k-1$ son todos potencias de dos.

Teorema 5: Sea m un número entero, $m>1$. Si $\mathrm{F}=2^m+1$ es un número primo, entonces m es una potencia de 2; o sea que F es un número de Fermat primo $\left(\mathrm{F}=2^{2^k}+1\right)$

Demostración:

El número m se escribe de forma única como

$$m=2^q(2r+1)$$

con q,r enteros no negativos.

Suponga que $r\geq 1$, o sea que m no es una potencia de 2. Entonces,

$$\begin{aligned}2^m+1&=2^{2^q(2r+1)}+1\\&=\left(2^{2^q}\right)^{(2r+1)}+1\end{aligned}$$

Denote $s=2^{2^q}$. Entonces

$$2^m+1=s^{(2r+1)}+1=(s+1)\sum_{i=0}^{2r}(-1)^i s^{2r-i}$$

Note que

$$2 < s+1 < 2^m + 1$$

Como $r \geq 1$ se tiene que $2^m + 1$ no es un número primo, lo que es una contradicción. Por consiguiente, $r = 0$ y $m = 2^q$; o sea que $\mathrm{F} = 2^{2^q} + 1$ es un número de Fermat primo.

La función ϕ de Euler se define por:

$$\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\phi(n) = \#\{m \in \mathbb{N}: m \leq n \text{ y } (m,n) = 1\}$$

A continuación, se enumeran algunas de las propiedades de la función ϕ:

i) $\phi(1) = 1$

Si p es primo y $k \in \mathbb{N}$, entonces

ii) $\phi(p) = p - 1$ y $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = (p-1)p^{k-1} = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

iii) Si $(m,n) = 1$, entonces $\phi(m,n) = \phi(m)\phi(n)$

iv) Si $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ (factorización única), entonces

$$\phi(n) = (p_1 - 1)p_1^{k_1-1}(p_2 - 1)p_2^{k_2-1} \cdots (p_r - 1)p_r^{k_r-1}$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

v) Si $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, entonces $[Q(w):Q] = \phi(n)$

Teorema 6: Sea n un número natural, $n \geq 2$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $\phi(n)$ es una potencia de 2

ii) $n = 2^s p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$, donde $r, s \in \mathbb{Z}, r \geq 0$, $s \geq 0$y $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son números primos impares diferentes y tal que $p_i - 1$ es una potencia de 2 (o sea que p_i es un número de Fermat primo).

Utilizando las propiedades de la función ϕ de Euler y los Teoremas 4, 5 y 6, se puede enunciar el siguiente teorema.

Teorema 7: (Gauss-Wantzel): El polígono regular de n lados es construible si y solo si $\phi(n)$ es una potencia de dos.

Observación: Como

$$\phi(3)=2,\ \phi(4)=2,\ \phi(5)=4,\ \phi(6)=2,\ \phi(8)=4$$

por el Teorema 7, los polígonos regulares de 3,4,5,6 y 8 lados son construibles. Sin embargo, como

$$\phi(7)=6 \qquad \text{y} \qquad \phi(9)=6$$

los polígonos regulares de 7 y 9 lados no son construibles; por lo tanto, los ángulos $\theta=\frac{2\pi}{7}rad$ y $\theta=\frac{2\pi}{9}rad(=40°)$ no son construibles.

Expresiones exactas de las funciones seno y coseno de ángulos construibles

Dado un ángulo $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, entonces $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ y

$$\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta, \quad \cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{sen}\beta$$

Por lo que se supondrá que $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. Además, para calcular expresiones exactas de las funciones seno y coseno de ángulos construibles se usarán las siguientes identidades trigonométricas (Sathish, 2023).

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \quad , \quad \cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad , \quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad , \quad \cos\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \quad , \quad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}3\alpha=3\operatorname{sen}\alpha-4\operatorname{sen}^3\alpha \ , \ \cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos\alpha\left[1-4\operatorname{sen}^2\alpha\right]$$

$$\operatorname{sen}5\alpha=16\operatorname{sen}^5\alpha-20\operatorname{sen}^3\alpha+5\operatorname{sen}\alpha \ , \ \cos5\alpha=16\operatorname{sen}^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha$$

Por otro lado, la identidad

$$\sqrt{a\pm b\sqrt{c}}=\sqrt{d}\pm\sqrt{e}$$

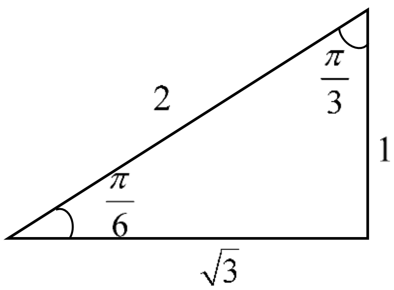
es satisfecha si

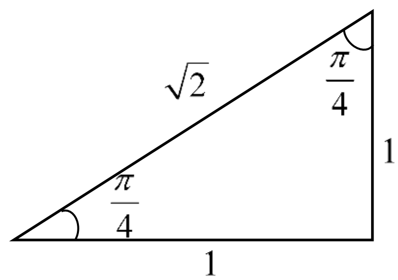
$$\begin{cases} a = d + e \\ b^2 c = 4de \end{cases}$$

lo cual implica que

$$d, e = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b^2 c}}{2}$$

Además, de los triángulos





se obtienen las siguientes expresiones para las funciones seno y coseno de los correspondientes ángulos construibles:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

El ángulo $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}\,\text{rad}(= 22.5°)$ es construible; además, por las fórmulas del medio ángulo, se obtiene

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Repitiendo este proceso, se obtiene

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2} \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{32}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}{2} \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{32}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

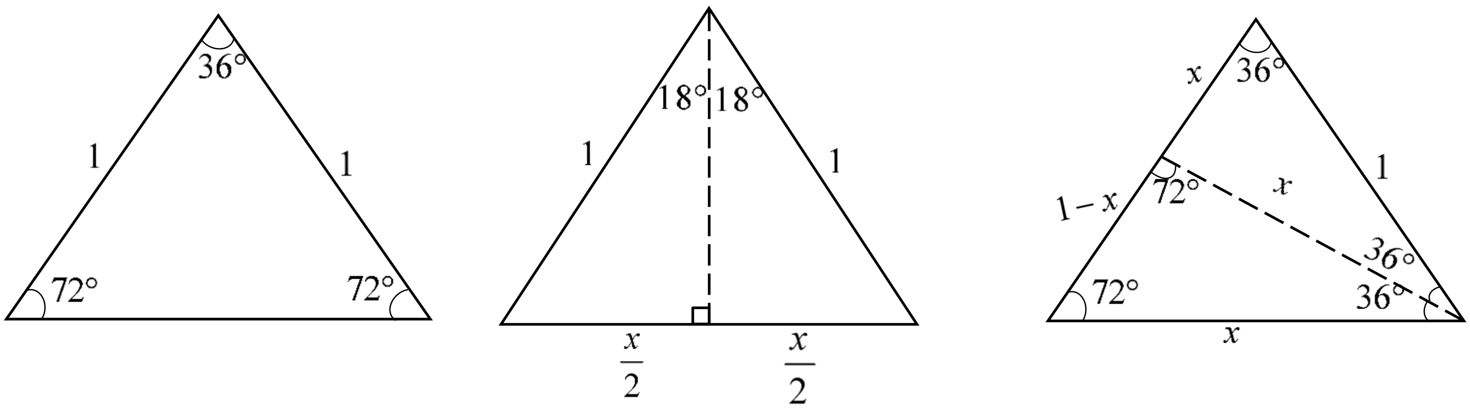
De igual manera, se obtiene

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

Sea $\alpha=\frac{\pi}{10}\text{rad}(=18^\circ)$. Considere el triángulo isósceles cuyo ángulo del vértice es $2\alpha=36^\circ$ y los lados congruentes son de longitud 1. (Bradie, 2002)



Luego

$$sen(18°) = \frac{1}{2}x$$

y de la semejanza de triángulos, se tiene que,

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$$

De donde

$$x^2 + x - 1 = 0$$

y

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Luego

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \operatorname{sen}\left(18^{o}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Por consiguiente,

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(18^{o}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Sea $\alpha = \frac{\pi}{5}\operatorname{rad}(=36°)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{10}\right)&=2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\\&=2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)\\&=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^{2}\left(10+2\sqrt{5}\right)}}{8}\\&=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\end{aligned}$$

De igual manera,

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{1-\operatorname{sen}^{2}\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2}}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Usando las fórmulas del doble ángulo, se obtiene que,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\quad,\quad\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Usando las fórmulas del triple ángulo se obtiene

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\quad,\quad\cos\left(\frac{2\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Usando las fórmulas del medio ángulo se obtiene

$$\operatorname{sen}\left(9^{\circ}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{20}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

$$\cos\left(9^{\circ}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

Sea $\alpha=\dfrac{\pi}{12}rad\left(=15^{\circ}\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{8-2\sqrt{12}}}{4}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\end{aligned}$$

Sea $\alpha=\frac{2\pi}{15}rad\left(=24°\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{15}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\\ &= \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}\end{aligned}$$

Usando las fórmulas del medio ángulo, se obtiene que,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(12^{\circ}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{1-\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}{4}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\cos\left(12^{\circ}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) &= \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{1+\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}{8}}\\ &= \frac{\sqrt{18+2\sqrt{5}+2\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}{4}\end{aligned}$$

Sea $\alpha=\dfrac{\pi}{30}rad\left(=6^{\circ}\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{30}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right)\\ &=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{1}{2}\\ &=\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}-1-\sqrt{5}}{8}\\ &=\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{8}\end{aligned}$$

Tomando,

$$d=30-6\sqrt{5} \qquad , \qquad e=6+2\sqrt{5}$$

Se obtiene,

$$\begin{aligned}a&=d+e=36-4\sqrt{5}\\ b^2c&=4de=4\left(30-6\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)\\ &=4\left(180-36\sqrt{5}+60\sqrt{5}-60\right)\\ &=4\left(120+24\sqrt{5}\right)\\ &=16\left(30+6\sqrt{5}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a=36-4\sqrt{5}\ ,\quad b=4\ ,\quad c=30+6\sqrt{5}$$

y

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{30}\right)&=\frac{\sqrt{36-4\sqrt{5}-4\sqrt{30+6\sqrt{5}}}}{8}\\ &=\frac{\sqrt{9-\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}}{4}\end{aligned}$$

De igual manera,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{30}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}\\ &= \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}\end{aligned}$$

Tomando,

$$d = 18+6\sqrt{5} \qquad , \qquad e = 10-2\sqrt{5}$$

Se obtiene,

$$\begin{aligned}a &= d+e = 28+4\sqrt{5}\\ b^2c &= 4de = 4\left(18+6\sqrt{5}\right)\left(10-2\sqrt{5}\right)\\ &= 16\left(30+6\sqrt{5}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a = 28+4\sqrt{5}\ , \quad b = 4\ , \quad c = 30+6\sqrt{5}$$

y

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{30}\right) &= \frac{\sqrt{28+4\sqrt{5}+4\sqrt{30+6\sqrt{5}}}}{8}\\ &= \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}}{4}\end{aligned}$$

Sea $\alpha = \dfrac{\pi}{60} rad\left(=3^\circ\right)$. Entonces,

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{60}\right)=\frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{30}\right)}{2}$$

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}}{4}}{2}$$

$$=\frac{4-\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}}{8}$$

De donde,

$$\operatorname{sen}(3^\circ)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{60}\right)=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}}}{4}$$

De igual forma,

$$\cos(3^\circ)=\cos\left(\frac{\pi}{60}\right)=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}}}{4}$$

Note que $[Q\left(\cos\left(\frac{\pi}{60}\right)\right):Q]=Q$ divide a 2^4, por lo tanto, el ángulo $\theta=3^\circ\left(=\frac{\pi}{60}rad\right)$ es construible. Luego, usando las fórmulas del seno y coseno de la suma y resta de ángulos, se tiene que el ángulo $\theta=(3n)^\circ$ es construible para todo número natural n. Precisamente, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 8: Sea n un número natural y $\theta=n^\circ$. El ángulo θ es construible si y solo si n es un múltiplo de tres.

Demostración:

Del ejemplo anterior se tiene que si n es un múltiplo de tres, entonces el ángulo $\theta=n^\circ$ es construible. Recíprocamente, suponga que el ángulo $\theta=n^\circ$ es construible y que n no es un múltiplo de 3. Entonces, el máximo común divisor $(n,3)=1$. Luego, por la identidad de Bezout, existen números enteros $p,\ q$ tales que,

$$3p-nq=1$$

Como los ángulos $\theta_1 = (3p)^\circ$ y $\theta_2 = (nq)^\circ$ son construible, se tiene que el ángulo $\alpha = 1^\circ$ es construible. Esto implica que para todo número natural m, el ángulo $\beta = m^\circ$ es construible. Así el ángulo $\beta = 20^\circ$ es construible, lo que contradice el Teorema 3. Por consiguiente, n es un múltiplo de 3.

4. Conclusiones

De los resultados obtenidos en este artículo se deduce que, el número complejo z es construible si y solo si puede ser formado, a partir de los números racionales, en una cantidad finita de pasos usando solo las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas.

Como $[Q(\sqrt[3]{2}):Q]=3$, por el Corolario 1, $\sqrt[3]{2}$ no es un número construible; lo que implica la imposibilidad de la duplicación del cubo. De igual manera, como π no es un número algebraico, por el Corolario 1, π no es un número construible; lo que implica la imposibilidad de la cuadratura de un círculo de radio 1.

Como el ángulo $\theta_1 = 60^\circ$ es construible y el ángulo $\theta_2 = 20^\circ$ no es construible, en general, un ángulo construible no se puede trisecar. Más aún, un ángulo de medida y un número entero grados, se puede trisecar si y solo si él es un múltiplo de 9.

El ángulo $\theta = 3^\circ$ y cualquier múltiplo entero de él es construible; sin embargo, los ángulos $\theta_1 = 1^\circ$ y $\theta_2 = 2^\circ$ no son construibles.

Como el polígono regular de n lados es construible si y solo si el ángulo $\theta = \frac{2\pi}{n} rad$ es construible, por los Teoremas 4 y 6, el polígono regular de n lados es construible si y solo si la función de Euler $\phi(n)$ es una potencia de dos. Por consiguiente, como $\phi(7)=6$, el heptágono regular no es construible.

Como el número real π no es algebraico, por el Corolario 1, él no es construible; sin embargo, el ángulo $\theta = \pi\ rad (=180^\circ)$ es construible, ya que, $\operatorname{sen}\pi = 0$ y $\cos\pi = -1$.

A pesar de que $\theta = 1^\circ$ no es construible, usando las fórmulas de Euler y de De Moivre, se obtiene que

$$2\cos(1°) = (\cos(1°) + i\,\mathrm{sen}(1°)) + (\cos(1°) - i\,\mathrm{sen}(1°))$$
$$2\,\mathrm{sen}(1°) = (\cos(1°) + i\,\mathrm{sen}(1°)) - (\cos(1°) - i\,\mathrm{sen}(1°))$$

y

$$\cos(1°) \pm i\,\mathrm{sen}(1°) = \sqrt[90]{\cos(90°) \pm i\,\mathrm{sen}(90°)}$$

donde se ha tomado la raíz n-esima principal. Por lo tanto (Kowalski, 2016)

$$\mathrm{sen}(1°) = \frac{\sqrt[90]{\sqrt{-1}} - \sqrt[90]{-\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \quad , \quad \cos(1°) = \frac{\sqrt[90]{\sqrt{-1}} + \sqrt[90]{-\sqrt{-1}}}{2}$$

Referencias Bibliográficas

Batista, J.R. (2013). *Field Extensions and Galois Theory*. Cambridge University Press.

Bradie, B. (2002). Exact Values for the Sine and Cosine of 18°: A geometric approach. *The College Mathematics Journal, 33*(4), 318-319. https://doi.org/10.2307/1559057

Dunham, W. (1990). *Journey Through Genius: The Great Theorem of Mathematics.* Penguin. http://jwilson.coe.uga.edu/emt725/References/Dunham.pdf

Francis, R.L. (1978). A Note on Angle Construction. *The Two-Year College Mathematics Journal, 9*(2), 75-80. https://eric.ed.gov/?id=EJ180097

Gilbert, W.J. (2002). *Modern Algebra With Applications*. Wiley-Interscience.

Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-22676-7_2

Howie, J.M. (2006). *Field and Galois Theory*. Springer.

Kowolski, T. (2016). The Sine of a Single Degree. *The College Mathematics Journal*, *47*(5), 322-332. https://doi.org/10.4169/college.math.j.47.5.322

Indika, S. H. S. & Leemis, L. M. (2024). Exact Expressions for Trigonometric Functions. *The College Mathematics Journal*, *55*(1), 40–45. https://doi.org/10.1080/07468342.2023.2241316

Sutton, A. (2009). *Ruler and Compass: Practical Geometric Constructions*. Bloomsbury. USA.

Suzuki, J. (2008). A Brief History of Impossibility. *Mathematics Magazine*, *81*(1), 27-38. http://www.jstor.org/stable/27643077

Trillo, J.A. (2019). *Teoría de Cuerpos: Una introducción a las extensiones de cuerpos y a la teoría de Galois*. Editorial independiente.