Visión Antataura
Vol.8, No.2: 9 - 28
Diciembre 2024 – Mayo 2025
Panamá
ISSN L 2520-9892

Los números de Bernoulli y el problema de Basilea

The Bernoulli numbers and the Basel problem

Edilberto José Adames Pineda[1], Ángela Yaneth Franco[2]

[1]Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Escuela de Matemática, Panamá; edilberto.adames@up.ac.pa; https://orcid.org/0000-0003-1454-1492
[2]Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Escuela de Matemática, Panamá; angela06franco@hotmail.com; https://orcid.org/0000-0002-7085-6870

Fecha de recepción: 29-07-2024 *Fecha de aceptación: 27-09-2024*

DOI https://doi.org/10.48204/j.vian.v8n2.a6566

Resumen: Los números de Bernoulli han desempeñado un papel importante en diferentes áreas de la matemática, incluyendo el cálculo diferencial e integral, el análisis real y complejo, la teoría de números y la topología. El objetivo de este artículo es presentar el origen de los números de Bernoulli como herramienta para el cálculo de cuadratura y, en particular, para expandir las funciones trigonométricas e hiperbólicas en serie de potencia. Posteriormente, se usarán los números de Bernoulli para calcular valores de la función Zeta de Riemann, de lo cual se deduce la solución del problema de Basilea. También se determina la suma de algunas series numéricas.

Palabras clave: Números de Bernoulli, la función Zeta de Riemann, series de potencia, suma de potencias enteras, sucesión recursiva.

Abstract: Bernoulli numbers have played an important role in different areas of mathematics, including differential and integral calculus, real and complex analysis, number theory, and topology. The objective of this article is to explain the origin of Bernoulli numbers as a tool for quadrature calculus and, in particular, for power series expansion of hyperbolic and trigonometric functions expanding. Subsequently, Bernoulli numbers will be used to calculate values of the Riemann Zeta function, from which the solution to the Basel problem is deduced. The sum of some numerical series is also determined.

Keywords: Bernoulli numbers, the Riemann Zeta function, power series, sum of integer powers, recurrence sequence.

1. Introducción

Los números de Bernoulli fueron descubiertos por el matemático suizo Jacob Bernoulli (1654–1705) y el matemático japonés Seki Takakaza (1642 –1708). Ambos matemáticos encontraron estos números en su afán de calcular la suma de potencias de números enteros positivos (Apostol, 2008), (Williams, 2023).

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots n^m$$

Desde este descubrimiento, los números de Bernoulli han desempeñado un papel importante en diferentes áreas de la matemática, incluyendo la expansión en series de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, la fórmula de suma de Euler–Maclaurin, la evaluación de la función Zeta de Riemann, la teoría de números, el análisis real, la topología, el último teorema de Fermat y, otros problemas de interés diversos.

La suma $S_m(n)$ y, por ende, los números de Bernoulli, fueron de vital importancia en el desarrollo del cálculo diferencial e integral, pues están relacionados con la cuadratura

$$\int_0^a x^m dx$$

para el área S bajo la parábola generalizada $y = x^m$ en el intervalo $[0, a]$, con m un número entero positivo.

El objetivo de este trabajo es definir los números de Bernoulli, para determinar una fórmula general de la suma de potencias de números enteros positivos

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots n^m$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}^+$. También se estudian las propiedades de los números de Bernoulli y se usan para determinar la expansión en serie de potencia de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, y, la evaluación de la función Zeta de Riemann. Finalmente, se resuelve el problema de Basilea y se calcula la suma de algunas series.

2. Metodología

Los números de Bernoulli son importantes y un poco misteriosos en varias áreas de la matemática, como en el cálculo diferencial e integral, el análisis real, la teoría de números, la geometría diferencial y el cálculo de Fourier. Ellos aparecen por primera vez en la obra Ars Conjectandi, publicada en 1713 por Jacob Bernoulli cuando estudiaba la suma consecutiva de potencias de números enteros positivos

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots n^m$$

donde m y n son dos números enteros positivos dados.

En este trabajo, primeramente, se calcula el valor de $S_m(n)$ para distintos valores de m, lo cual permita visualizar un patrón que ayude a determinar una fórmula general para el valor de $S_m(n)$ y, a su vez definir los números de Bernoulli. Después de haber determinado una fórmula para $S_m(n)$ en términos de los números de Bernoulli, se usarán estos números para expandir en serie de potencia las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

Posteriormente, se calcula el valor de la función Zeta de Riemann para los números $z = 2k$ con k un número entero positivo. Finalmente, se resuelve el problema de Basilea y se calcula la suma de algunas series numéricas.

3. Desarrollo

- **Los números de Bernoulli**

Las fórmulas

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

fueron usadas por Arquímedes de Siracusa (287–212 AC). En 1610, Johan Faulhaber (1580–1635) logró avances significativos en el problema del cálculo de la suma de potencias sucesivas de números enteros positivos, calculando $S_m(n)$ para $m = 2,3, \dots ,10$ y, en su obra Académica Algebrae publicada en 1631, él presentó fórmulas para$S_m(n)$ hasta $m = 23$. Por lo tanto, era del conocimiento de Jacob Bernoulli que

$$S_1(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

$$S_2(n-1) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$S_3(n-1) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$S_4(n-1) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

Veamos una fórmula recursiva para el cálculo de los $S_m(n-1)$. En efecto, el siguiente resultado es conocido como la fórmula de Fermat y, se prueba por inducción matemática (Dunham, 2018), (Edward, 1994), (Hardy, 2008).

Teorema 1(Fórmula de Fermat): Sean n y k números enteros positivos. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)\ldots(i+k-1)}{k!} = \frac{n(n+1)\ldots(n+k)}{(k+1)!}$$

Denote

$$i(i+1)\ldots(i+k-1) = i^k + a_1 i^{k-1} + a_2 i^{k-2} + \cdots + a_{k-1} i$$

donde las constantes $a_1 a_2, \ldots, a_{k-1}$ dependen de k. Entonces, del Teorema 1 se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)\ldots(n+k)}{(k+1)!} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)\ldots(i+k-1)}{k!} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k!}[i^k + a_1 i^{k-1} + \cdots + a_{k-1} i] \\ &= \frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{n} i^k + a_1 \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + \cdots + a_{k-1} \sum_{i=1}^{n} i\right]\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n(n+1)\ldots(n+k)}{k+1} - \left[a_1 \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + \cdots + a_{k-1} \sum_{i=1}^{n} i\right]$$

o sea

$$S_k(n) = \frac{n(n+1)\ldots(n+k)}{k+1} - [a_1 S_{k-1}(n) + a_2 S_{k-2}(n) + \cdots + a_{k-1} S_1(n)]$$

para $k \geq 2$, la cual es una fórmula recursiva para el cálculo de $S_m(n)$

Por otro lado, note que

$$\begin{aligned}(n+1)^{m+1} - 1 &= (2^{m+1} - 1^{m+1}) + (3^{m+1} - 2^{m+1}) + \cdots + ((n+1)^{m+1} - n^{m+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [(i+1)^{m+1} - i^{m+1}] = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} i^j\right] \\ &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} \sum_{i=1}^{n} i^j \qquad (fórmula\ de\ Pascal) \\ &= n + \sum_{j=1}^{m} \binom{m+1}{j} \sum_{i=1}^{n} i^j\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(n+1)^{m+1}-n-1=\sum_{j=1}^{m}\binom{m+1}{j}S_j(n)$$
$$=\binom{m+1}{1}S_1(n)+\binom{m+1}{2}S_2(n)+\cdots+\binom{m+1}{m}S_m(n)$$

Cambiando n por $n-1$, se obtiene

$$n^{m+1}-n=\sum_{j=1}^{m}\binom{m+1}{j}S_j(n-1)\quad (fórmula\ de\ Pascal)$$

Jacob Bernoulli escribió las expresiones de $S_m(n-1)$ de la siguiente manera

$$S_1(n-1)=\frac{1}{2}\left[n^2-2\left(\frac{1}{2}\right)n\right]$$

$$S_2(n-1)=\frac{1}{3}\left[n^3-3\left(\frac{1}{2}\right)n^2+3\left(\frac{1}{6}\right)n\right]$$

$$S_3(n-1)=\frac{1}{4}\left[n^4-4\left(\frac{1}{2}\right)n^3+6\left(\frac{1}{6}\right)n^2\right]$$

$$S_4(n-1)=\frac{1}{5}\left[n^5-5\left(\frac{1}{2}\right)n^4+10\left(\frac{1}{6}\right)n^3-5\left(\frac{1}{30}\right)n\right]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

En este paso Jacob Bernoulli observó que todos los coeficientes enteros en cada término son coeficientes binomiales de la fila $m+1$ en el triángulo de Pascal. Así,

$$S_1(n-1)=\frac{1}{2}\left[\binom{2}{0}n^2-\binom{2}{1}\frac{1}{2}\ n\right]$$

$$S_2(n-1)=\frac{1}{3}\left[\binom{3}{0}n^3-\binom{3}{1}\frac{1}{2}n^2+\binom{3}{2}\frac{1}{6}n\right]$$

$$S_3(n-1)=\frac{1}{4}\left[\binom{4}{0}n^4-\binom{4}{1}\frac{1}{2}n^3+\binom{4}{2}\frac{1}{6}n^2+\binom{4}{3}0n\right]$$

$$S_4(n-1)=\frac{1}{5}\left[\binom{5}{0}n^5-\binom{5}{1}\frac{1}{2}n^4+\binom{5}{2}\frac{1}{6}n^3+\binom{5}{3}0n^2+\binom{5}{4}\frac{1}{30}n\right]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Observando el patrón que conecta estas fórmulas, Jacob Bernoulli conjetura la siguiente fórmula compacta

$$S_m(n-1)=\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}b_j n^{m-j+1}=\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{j!}\cdot\frac{m!}{(m-j+1)!}n^{n-k+1}$$

donde b_j son unos números misteriosos independiente de m.

Mostrando la utilidad de su fórmula, Jacob Bernoulli afirmó que había calculado $S_{10}(1000)$ en menos de la mitad de un cuarto de hora.

Teorema 2: Sean m y n números enteros positivos con $n \geq 2$. La suma $S_m(n-1)$ es un polinomio de grado $m+1$ sin término constante y, por lo tanto, tiene la forma

$$S_m(n-1) = \sum_{j=0}^{m} C_{m,j}\, n^{m-j+1}$$

donde $C_{m,j} \in \mathbb{R}$ para $j = 0,1,2, \dots, m$

Demostración

Como $S_1(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$, el teorema es verdadero para $m = 1$. Sea $j \in \mathbb{R}$ y suponga que el teorema es verdadero para todo $m \leq j$. Suponga que $m = j+1$, entonces por la fórmula de Pascal se tiene que

$$\begin{aligned} n^{m+1} - n = n^{j+2} - n &= \sum_{i=1}^{j+1} \binom{j+2}{i} S_i(n-1) \\ &= \sum_{i=1}^{j} \binom{j+2}{i} S_i(n-1) + \binom{j+2}{j+1} S_{j+1}(n-1) \\ &= \sum_{i=1}^{j} \binom{j+2}{i} S_i(n-1) + (j+2) S_{j+1}(n-1) \end{aligned}$$

De donde,

$$S_{j+1}(n-1) = \frac{1}{j+2}\left[n^{m+1} - n - \sum_{i=1}^{j} \binom{j+2}{i} S_i(n-1)\right]$$

Como los $S_i(n-1)$ son polinomios de grado $i+1$ en la variable n y sin término constante, se tiene que $S_m(n-1) = S_{j+1}(n-1)$ es un polinomio de grado $m+1 = j+2$ en la variable n y sin término constante.

Así, por el principio de inducción matemática, el teorema es verdadero para todo número entero positivo m.

Teorema 3: Sean $C_{m,j} \in \mathbb{R}$ para $m \in \{2,3, \dots\}$ y $j \in \{0,1,2, \dots\}$ tales que

$$S_m(n-1) = \sum_{j=0}^{m} C_{m,j}\, n^{m-j+1}$$

Entonces, los coeficientes $C_{m,j}$ satisfacen las siguientes condiciones:

- $C_{m,0} = \dfrac{1}{m+1}$
- $C_{m,j} = -\frac{1}{m+1}\sum_{i=m-j}^{m-1}\binom{m+1}{i} C_{i,i+j-m}$, $j \in \{1,2,\dots,m-1\}$
- $C_{m,m} = -\dfrac{1}{m+1}\left[\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m+1}{i} C_{i,i}\right)+1\right]$

Además, estas tres condiciones definen los $C_{m,j}$ de forma única

Demostración

De la fórmula de Pascal y el Teorema 2 se tiene que

$$n^{m+1} - n = \sum_{i=1}^{m}\left[\binom{m+1}{i}\sum_{j=0}^{i} C_{i,j}\, n^{i-j+1}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{i}\binom{m+1}{i} C_{i,j}\, n^{i-j+1}$$

Tomando $k = j + m - i$, se obtiene

$$n^{m+1} - n = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=m-i}^{m}\binom{m+1}{i} C_{i,k-m+i}\, n^{m+1-k}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=m-i}^{m-1}\binom{m+1}{i} C_{i,k-m+i}\, n^{m+1-k} + \binom{m+1}{i} C_{i,i}\, n\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\binom{m+1}{i} C_{i,i}\, n + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=m-i}^{m-1}\binom{m+1}{i} C_{i,k-m+i}\, n^{m+1-k}$$

Intercambiando el orden de los índices, se obtiene

$$n^{m+1} - n = \sum_{i=1}^{m}\binom{m+1}{i} C_{i,i}\, n + \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=m-k}^{m}\binom{m+1}{i} C_{i,k-m+i}\, n^{m+1-k}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} C_{i,i}\, n + \sum_{k=1}^{m-1} \left[\sum_{i=m-k}^{m} \binom{m+1}{i} C_{i,k-m+i} \right] n^{m+1-k} + \binom{m+1}{m} C_{m,0} n^{m+1}$$

Comparando los coeficientes de las potencias en ambos lados se obtiene que

- $C_{m,0} = \dfrac{1}{m+1}$

- $(m+1)\, C_{m,k} = -\sum_{i=m-k}^{m-1} \binom{m+1}{i} C_{i,k-m+i}$

Para todo $k \in \{1,2,\dots,m-1\}$

- $(m+1) C_{m,m} = -\sum_{i=1}^{m-1} \binom{m+1}{i} C_{i,i} - 1$

Finalmente, sean $b_{m,0}, b_{m,1}, \dots, b_{m,m}$ números tales que

$$S_m(n-1) = \sum_{j=0}^{m} b_{m,j}\, n^{m-j+1}$$

Luego, por lo probado anteriormente, los $b_{m,j}$ satisfacen las tres condiciones del teorema. Por consiguiente $b_{m,j} = C_{m,j}$ y

$$\sum_{j=0}^{m} C_{m,j}\, n^{m-j+1} = \sum_{j=0}^{m} b_{m,j}\, n^{m-j+1} = S_m(n-1).$$

En lo que sigue se probará que los coeficientes $C_{m,j}$ tienen la forma

$$C_{m,j} = \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{j} b_j \quad , \quad j = 0,1,\dots,m$$

donde b_j es una constante con respecto a la columna j. Pero, si esto es cierto, entonces por el Teorema 3 se tiene que

$$\frac{1}{m+1} \binom{m+1}{m} b_m = C_{m,m} = -\frac{1}{m+1} \left[\sum_{i=1}^{m-1} \binom{m+1}{i} C_{i,i} + 1 \right]$$

$$= -\frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m+1}{i}\frac{1}{i+1}\binom{i+1}{i}b_i + 1\right]$$

$$= -\frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m+1}{i}b_i + 1\right]$$

de donde, tomando $b_0 = 1$, se obtiene

$$b_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}b_i$$

lo que motiva la siguiente definición (Apostol, 2008), (Hardy, 2008)

Definición: Los números de Bernoulli son los números racionales $b_0, b_1, b_3, \ldots$ definidos, recursivamente, por

$$b_0 = 1\,, \qquad b_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}b_i\,, \qquad m = 1,2,3,\ldots$$

$$S_m(n-1) = \sum_{j=0}^{m} C_{m,j}\, n^{m-j+1}$$

Sustituyendo el valor de $C_{m,j}$ dado anteriormente, se obtiene el siguiente teorema, en el cual se prueba lo indicado anteriormente, ya que, los $C_{m,j}$ son únicos por el Teorema 3.

Teorema 4: Sean m un número entero, $m \geq 2$. Entonces

$$S_m(n-1) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}b_k\, n^{m-k+1}$$

donde $b_0, b_1, b_3, \ldots$ son los números de Bernoulli

Demostración

Por el Teorema 3 es suficiente probar que los coeficientes

$$d_{m,k} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{k}b_k \qquad , \qquad k = 0,1,\ldots,m$$

satisfacen las tres condiciones indicadas. En efecto

- $d_{m,0} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{0} b_0 = \frac{1}{m+1}$
- Sea $j \in \{1,2,\dots,m-1\}$. Se debe probar que

$$d_{m,j} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{j} b_j = -\frac{1}{m+1}\sum_{i=m-j}^{m-1}\binom{m+1}{i}\frac{1}{i+1}\binom{i+1}{i+k-m} b_{i+j-m}$$

En efecto, tomando $k = i + j - m$, la expresión anterior es equivalente a

$$\binom{m+1}{j} b_j = -\sum_{k=0}^{j-1}\binom{m+1}{k-j+m}\frac{1}{k-j+m+1}\binom{k-j+m+1}{k} b_k$$

Lo cual es equivalente a

$$\frac{(m+1)!}{j!\ (m+1-j)!} b_j = -\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(m+1)!}{(k-j+m)!\ (j-k+1)!}\cdot\frac{(k-j+m)!}{k!\ (m-1-j)!}$$

Simplificando, es equivalente a

$$\frac{1}{j!} b_j = -\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{(j-k+1)!\,k!}$$

$$b_j = -\frac{1}{j+1}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(j+1)!}{k!\,(j+1-k)!}$$

$$b_j = -\frac{1}{j+1}\sum_{k=0}^{j-1}\binom{j+1}{k} b_k$$

Lo cual es cierto por la definición de los números de Bernoulli. Así pues, los coeficientes $d_{m,k}$ satisfacen la segunda condición del Teorema 3.

- Finalmente, se debe probar que

$$d_{m,m} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{m} b_m = -\frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m+1}{i}\frac{1}{i+1}\binom{i+1}{i} b_i + 1\right]$$

Lo cual es equivalente a

$$b_m = -\frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m+1}{i} b_i + 1\right] = -\frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m+1}{i} b_i + b_0\right]$$

$$= -\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i} b_i$$

o sea,

$$b_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i} b_i$$

Lo cual es cierto por la definición de número de Bernoulli. Así pues, por el Teorema 3 se tiene que

$$S_m(n-1) = \sum_{k=0}^{m} d_{m,k}\, n^{m-k+1}$$

donde

$$d_{m,k} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{k} b_k$$

es decir,

$$S_m(n-1) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k} b_k\, n^{m-k+1} = \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!\,(m-k+1)!} b_k\, n^{m-k+1} \quad ,m = 1,2,\dots$$

donde

$$b_0 = 1\,, \qquad b_k = -\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j} b_j \;,\quad k = 1,2,\dots,m$$

son los números de Bernoulli.

A continuación, una lista de los primeros números de Bernoulli

$$b_0 = 1\;, \quad b_1 = -\frac{1}{2}\;, \quad b_2 = \frac{1}{6}\;, \quad b_3 = 0\;, \quad b_4 = -\frac{1}{30}\;, \quad b_5 = 0$$

$$b_6 = \frac{1}{42}\;, \quad b_7 = 0\;, \quad b_8 = -\frac{1}{30}\;, \quad b_9 = 0\;, \quad b_{10} = \frac{5}{66}\;, \quad b_{11} = 0$$

- **Los números de Bernoulli y las series de potencia**

De las definiciones de las funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas, se tiene que (Bressoud, 2007)

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Por lo tanto,

$$\cos z = \cosh(iz) \qquad , \qquad \operatorname{sen} z = -\operatorname{isinh}(iz)$$

Teorema 5: Sea $D = \mathbb{C} - \{2n\pi i : n \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$ y sea $f: D \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$f(z) = \begin{cases} 1 & , si\ z = 0 \\ \dfrac{z}{e^z - 1} & , si\ z \neq 0 \end{cases}$$

Entonces $f^{(n)}(0) = b_n$ para todo $n \in \{0,1,2,\dots\}$ y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \quad , \quad |z| < 2\pi$$

Demostración

Note que

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{\dfrac{z}{e^z - 1} - 1}{z} = -\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1 - z}{z(e^z - 1)} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, f es analítica en D y, el radio de convergencia de la serie de potencia centrada en $z_0 = 0$ de la función f es 2π.

Suponga que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k \quad , \quad |z| < 2\pi$$

Luego, como la serie es, absolutamente, convergente, se tiene que

$$z = (e^z - 1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} z^i\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{i!\,k!} z^{i+k}$$

Tomando $j = i + k$, se obtiene

$$z = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} \frac{b_{j-i}}{i!\,(j-i)!} z^j$$

Intercambiando las series, se obtiene

$$z = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j} \frac{b_{j-i}}{i!\,(j-i)!} z^j = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j} \frac{b_{j-i}}{j!}\binom{j}{i} z^j$$

Comparando los coeficientes de las potencias de z, se tiene que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n \quad , \quad |z|<2\pi$$

es equivalente a

$$b_0=1\,, \qquad \sum_{i=1}^{j}\frac{b_{j-i}}{j!}\binom{j}{i}=0\ , \qquad j\in\{2,3,\dots\}$$

es decir,

$$b_0=1\,, \qquad \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j-1}b_k\binom{j}{j-k}=0$$

donde $k=j-i$. Finalmente, tomando $m=j-1$, se obtiene que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n \quad , \quad |z|<2\pi$$

es equivalente a

$$b_0=1\,, \qquad \sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{m+1-k}b_k=0$$

o sea

$$b_0=1\,, \qquad \sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}b_k=0$$

lo cual es verdadero por la definición de números de Bernoulli. Así pues,

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n \quad , \quad |z|<2\pi$$

Luego, por la unicidad de los coeficientes de la serie de potencia de una función analítica, se tiene que

$$b_n=f^{(n)}(0) \quad , \quad n\in\{0,1,2,\dots\}$$

Teorema 6: Sea $n \in \mathbb{Z}, n > 2$ un número impar. Entonces $b_n = 0$

Demostración

Sea $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 2\pi\}$ y $g: D \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$g(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}$$

Entonces, por el Teorema 5 se tiene que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

Probaremos que g es una función par. En efecto,

$$g(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)}$$

y

$$g(-z) = \frac{-z(e^{-z} + 1)}{2(e^{-z} - 1)} = -\frac{z(e^z + 1)}{2(1 - e^z)} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)} = g(z)$$

Por consiguiente, g es una función par. Esto implica que

$$b_{2n+1} = 0 \quad , \quad n \in \{1,2,3, \dots\}$$

Teorema 7: Sea $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 2\pi\}$ y $g: D \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$g(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)}$$

Entonces

$$g(z) = \frac{z}{2} \coth\left(\frac{z}{2}\right) \quad , \quad z \in D$$

Demostración

En efecto, sea $z \in D$, entonces

$$g(z) = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)} = \frac{z e^{-\frac{z}{2}} (e^z + 1)}{2 e^{-\frac{z}{2}} (e^z - 1)} = \frac{z}{2} \left(\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} \right)$$

$$= \frac{z}{2} \left(\frac{\cosh\left(\frac{z}{2}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{z}{2}\right)} \right) = \frac{z}{2} \coth\left(\frac{z}{2}\right)$$

Teorema 8: Sea $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < \pi\}$. Entonces

$$z \coth z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad , \quad n \in D$$

Demostración

Por los Teoremas 5 y 7 se tiene que

$$z \coth z = g(2z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{k!} (2z)^k \quad , \quad |2z| < 2\pi$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^k b_k}{k!} z^k \quad , \quad |z| < \pi$$

Como $b_3 = b_5 = b_7 = \cdots = 0$, tomando $k = 2n$, se tiene que

$$z \coth z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^n b_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^n b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad , \quad z \in D$$

Teorema 9: Sea $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < \pi\}$. Entonces

$$\cot z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad , \quad z \in D$$

Demostración

Sea $z \in D$. Entonces

$$\cot z = \frac{\cos z}{senz} = \frac{\cosh(iz)}{-i \operatorname{senh}(iz)} = i \coth(iz)$$

Luego, por el Teorema 8, se tiene que si $z \in D$, entonces

$$z \cot z = (iz)\cot(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n b_{2n}}{(2n)!} (iz)^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n b_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

Teorema 10: Sea $D = \left\{z \in \mathbb{C}: |z| < \frac{\pi}{2}\right\}$. Entonces

$$\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}4^n(4^n-1)b_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$$

Demostración

De la identidad

$$\tan z = \cot z - 2\cot(2z) \quad , \quad z \in D$$

y del Teorema 9 se tiene que si $z \in D$, entonces

$$z\tan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n b_{2n}}{(2n)!} (2z)^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n b_{2n}}{(2n)!} (1-4^n) z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}4^n b_{2n}}{(2n)!} (4^n-1) z^{2n}$$

Luego, como $\tan(0) = 0$, se tiene que

$$\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}4^n b_{2n}(4^n-1)}{(2n)!} z^{2n-1} \quad , z \in D$$

Teorema 11: Sea $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < \pi\}$. Entonces

$$z\csc z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2(2^{2n-1}-1)b_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

Demostración

De la identidad

$$\csc z = \cot z + \tan\left(\frac{z}{2}\right) \quad , \quad z \in D$$

y de los Teorema 9 y 10 se tiene que si $z \in D$, entonces

$$z\csc z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}4^n(4^n-1)b_{2n}}{(2n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n b_{2n}}{(2n)!} \left[1 - \frac{(4^n-1)}{2^{2n-1}}\right] z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(4^n-2)b_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2(2^{2n-1} - 1)}{(2n)!} z^{2n}$$

- **Los números de Bernoulli y la función Zeta de Riemann**

Con el uso del método de las fracciones parciales, Euler descubrió una interesante expansión de la función cotangente (Simmons, 1996). En efecto, observando que si

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{x-2}$$

entonces la constante C_1 se puede determinar multiplicando la expresión por $x - 1$ y reemplazando la x por 1 y, similarmente, para C_2; Euler extendió este análisis a la función

$$\cot \pi x = \frac{\cos \pi x}{\operatorname{sen} \pi x}$$

cuyo denominador tiene los ceros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Obteniendo que

$$\cot \pi x = \frac{a}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{x-n} + \frac{c_n}{x+n} \right)$$

donde

$$a = \frac{1}{\pi} \quad , \quad b_n = C_n = \frac{1}{\pi} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Por lo tanto,

$$\cot \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

De donde,

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}$$

Tomando $z = \pi x$ se obtiene

$$z \cot z = 1 + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{\frac{z^2}{\pi^2} - n^2} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 \pi^2 - z^2}$$

$$= 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{z^{2k}}{\pi^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) \right] = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) \frac{z^{2k}}{\pi^{2k}} \right]$$

Luego, como por el Teorema 9,

$$z \cot z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} [(-4)^n b_{2n}] \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Por la unicidad de la expansión en serie de potencia de la función $z \cot z$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2n)!} b_{2k}$$

para todo $k \in \{1,2,3, \dots\}$

Definición: La función zeta de Riemann, $\varsigma(z)$, está definida por

$$\varsigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

para todo $z \in \mathbb{C}, Re(z) > 1$, donde $k^z = e^{z\, lnk}$

Observaciones:

1. De las expansiones en serie de potencia de la función $z \cot z$, se tiene que

$$\varsigma(2m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{(-1)^{m+1} 2^{2m-1} \pi^{2m}}{(2m)!} b_{2m} = \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} |b_{2m}|$$

para todo $k \in \{1,2,3, \dots\}$

2. Los números de Bernoulli de índice par se alternan en signo
3. Para el caso $m = 1$, la función zeta de Riemann

$$\varsigma(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

Se conocen con el nombre de “Problema de Basilea”; propuesto por Pietro Mengoli (1626–1686) en 1650 en su obra Novae quadraturae arithmeticae seu de additione fractionum y, resuelto por Leonhard Euler (1707–1783) en 1734 (Harper, 2003), (Muzaffar, 2013), (William, 2023). Euler probó, usando los números de Bernoulli que

$$\varsigma(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

En efecto, como Euler probó que

$$\varsigma(2m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{(-1)^{m+1} 2^{2m-1} \pi^{2m}}{(2m)!} b_{2m}$$

Para $m = 1$, se tiene que $b_{2m} = b_2 = \frac{1}{6}$ y

$$\varsigma(2) = \frac{(-1)^2 \cdot 2 \cdot \pi^2}{2!} \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

4. Conclusiones

- Observando el comportamiento de las sumas $S_m(n-1)$ para valores particulares de m, Jacob Bernoulli conjeturó la fórmula

$$S_m(n-1) = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} b_j \, n^{m-j+1} = \sum_{j=0}^{m} \frac{b!}{j!} \cdot \frac{m!}{(m-j+1)!} n^{n-j+1}$$

donde los b_j son unos números racionales misteriosos independientes de m. Posteriormente, Jacob probó que estos números, llamados números de Bernoulli, están definidos, recursivamente, por

$$b_0 = 1 \,, \qquad b_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m+1}{i} b_i \quad , \qquad m = 1,2, \dots$$

- Los números de Bernoulli con índice impar mayor o igual a tres son ceros; o sea, $b_{2n+1} = 0$ para todo $n = 1,2,3, \dots$ [.] Además, los números de Bernoulli de índice par se alteran en signo.
- Al utilizar la expansión en serie de potencia de la función $z \cot z$, Euler dedujo la fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} b_{2k} \quad , \quad k = 1,2,3, \dots$$

la cual le permitió resolver el famoso problema de Basilea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

planteado por Pietro Mengoli.

Referencias Bibliográficas

Apostol, T.M. (2008). A Primer on Bernoulli Numbers and Polynomials. *Mathematics Magazine*, *81*(3), 178-190. https://www.jstor.org/stable/27643104

Bressoud, D.M. (2007). *A Radical Approach to Real Analysis*. The Mathematical Association of America. USA. https://www.abebooks.com/Radical-Approach-Real-Analysis-Mathematical-Association/31713566318/bd

Dunham, W. (2018). *The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton University Press. USA. https://doi.org/10.2307/j.ctv3dnpr8

Edward, C.H. (1994). *The Historical Development of the Calculus. Springer-Verlag*. USA. https://isidore.co/calibre/get/PDF/Edwards%2C%20C.%20H.%2C%20Jr_-The%20Historical%20Development%20of%20the%20Calculus_5448.pdf

Hardy, G.H. and Wright, E.M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press. London. https://blngcc.wordpress.com/wp-content/uploads/2008/11/hardy-wright-theory_of_numbers.pdf

Harper, J.D. (2003). Another Simple Proof of $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$. *The American Mathematical Monthly*, *110*(6), 540-541. https://www.researchgate.net/publication/266169382_Another_simple_proof_of_11_2_2_1_3_2_p_2_6

Muzaffar, H.B. (2013). A New Proof of a Classical Formula. *The American Mathematical Monthly*, *120*(4), 355-358. http://dx.doi.org/10.4169/amer.math.monthly.120.04.355

Simmons, G. (1996). *Calculus With Analytic Geometry*. Mc Graw-Hill. USA. https://refkol.ro/matek/mathbooks/ro.math.wikia.com%20wiki%20Fisiere_pdf_incarcate/Simmons_-_Calculus-With-Analytic-Geometry.pdf

Williams, K.S. (2023). Beyond the Basel Problem, Part I. *Mathematics Magazine, 96*(2), 163-173. https://doi.org/10.1080/0025570X.2023.2176099

Williams, K.S. (2023). Beyond the Basel Problem, Part II. *Mathematics Magazine*, *96*(3), 225-233. https://doi.org/10.1080/0025570X.2023.2199674