Visión Antataura
Vol. 9, No. 1: 36 - 47
Junio – Noviembre 2025
Panamá
ISSN L 2520-9892

El teorema fundamental del cálculo: su inverso y generalización

The fundamental theorem of calculus: its inverse and generalization

Jorge E. Hernández U.[1], Ángela Y. Franco[2]

[1]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Panamá; jorgeelizerhernandezurieta@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-1153-1918
[2]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Panamá; angela.franco@up.ac.pa; https://orcid.org/0000-0002-0538-1688

Fecha de recepción: 11-01-25 *Fecha de aceptación: 18-03-25*

DOI https://doi.org/10.48204/j.vian.v9n1.a7533

Resumen: La importancia histórica del teorema fundamental del cálculo no reside en la capacidad de realizar las operaciones de diferenciación e integración, sino en la constancia de que estos dos procesos distintos en apariencia están estrechamente relacionados. Por esta razón, el objetivo del presente artículo es analizar el teorema fundamental del cálculo, para determinar la pertinencia de las hipótesis. Esta permitirá enunciar resultados más generales que este teorema. También se analizará la viabilidad del inverso del teorema fundamental del cálculo.

Palabras clave: continuidad, diferenciación, integración, teorema fundamental del cálculo, primitiva de una función.

Abstract: The historical importance of the fundamental theorem of calculus lies not in the ability to perform the operations of differentiation and integration, but in the evidence that these two seemingly distinct processes are closely related. For this reason, the objective of this article is to analyze the fundamental theorem of calculus to determine the relevance of the hypotheses. This will allow us to state more general results than this theorem. The viability of the converse of the fundamental theorem of calculus will also be analyzed.

Keywords: continuity, differentiation, integration, fundamental theorem of calculus, primitive of a function.

1. Introducción

El Teorema Fundamental del Cálculo tiene sus orígenes a mediados del siglo XVII cuando el matemático Jame Gregory (1638 - 1675) demuestra y publica el enunciado del teorema fundamental del cálculo. Posteriormente, el matemático Isaac Barrow (1630 – 1677) demostró una versión más generalizada de este teorema; mientras que el estudiante de Barrow, Issac Newton (1642 – 1727), completó el desarrollo de la teoría del cálculo diferencial e integral. El matemático Gottfried Leibniz (1646 -1716) sistematizó el

conocimiento del cálculo infinitesimal e introdujo la notación utilizada en la actualidad (Bressoud, 2011), (Dunham, 2005), (Edward, 1994), (Boyer, 2010).

El Teorema Fundamental del Cálculo se refiere a la relación inversa que existe entre los procesos de diferenciación e integración y establece que, si se puede encontrar una primitiva para el integrando, entonces se puede calcular la integral definida evaluando la primitiva en los extremos del intervalo y restarlos. Sin embargo, la relevancia histórica del teorema fundamental del cálculo no es la capacidad de calcular las operaciones de diferenciación e integración, sino en la constancia de que estos dos procesos distintos en apariencia (cálculo de velocidad y cuadratura o cálculo de áreas geométricas) están en estrecha relación (Gelbaum, 2003), (Folland, 2007). Por esta razón, el objetivo del presente artículo es analizar el teorema fundamental del cálculo, para determinar la pertenencia de la hipótesis, lo cual permitirá enunciar resultados más generales que este teorema. También se analiza la viabilidad del inverso del teorema fundamental del cálculo.

2. **Materiales y métodos**

El Teorema Fundamental del Cálculo provee una conexión entre los procesos de diferenciación e integración, indicando que son procesos inversos; a saber,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x) \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

lo cual se satisface en la teoría de integración de Cauchy. Sin embargo, el teorema fundamental del cálculo pierde sentido y utilidad en la teoría de integración de Riemann, ya que la derivada $f'(t)$ de una función diferenciable puede ser acotada sin ser Riemann integrable en el intervalo $[a,b]$.

Con el objetivo de establecer resultados más generales, se analizan las hipótesis del teorema fundamental del cálculo y se presentan ejemplos que ponen en evidencia los alcances y limitaciones de las hipótesis, lo cual abre el camino para analizar la posibilidad de generalizar el teorema fundamental del cálculo; así como presentar un inverso de este teorema.

En primer lugar, se presenta un ejemplo de una función $f:[0,1]\to ¡$ acotada en el intervalo $[0,1]$ y continua en $(0,1]$ y, por ende, integrable en $[0,1]$. Además, la función primitiva $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ es tal que $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in[0,1]$. Sin embargo, la función f no es continua en $[0,1]$. Esto prueba que el inverso del teorema fundamental del cálculo (primera parte) no es verdadero.

Para el problema de extensión, se presenta una función integrable $f:[0,1]\to ¡$ que es discontinua en todo número racional de $(0,1]$. Además, su integral indefinida

$F(x)=\int_0^x f(t)dt=0$ es diferenciable en $[0,1]$, pero

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right)=0\neq f(x)$$

para todo $x\in(0,1]\mathrm{I}$ ¤ . Esto prueba que la función f no satisface el teorema fundamental del cálculo.

- **El teorema fundamental del cálculo**

Después de muchos esfuerzos de los matemáticos por más de 500 años, en el siglo XVIII emergen nuevas técnicas que proveen a los investigadores de las ciencias y tecnología con las herramientas necesarias para explicar muchos fenómenos. A través del cálculo diferencial e integral astrónomos pudieron finalmente determinar distancias de objetos en el espacio y órbitas planetarias. Los ingenieros pudieron calcular el movimiento de objetos en tres dimensiones, el trabajo realizado por una fuerza, presión y fuerza de un fluido, etc. En general, con el descubrimiento del cálculo diferencial e integral y el teorema fundamental del cálculo, que relaciona estos dos procesos, la visión del mundo cambió para siempre.

El Teorema Fundamental del Cálculo es una herramienta extremadamente poderosa que establece la relación entre la teoría de diferenciación y la teoría de integración y, además ofrece una manera de evaluar integrales definidas sin usar las sumas de Riemann o

el cálculo de áreas. Este teorema se divide en dos partes. La primera parte tiene que ver con las propiedades de la integral cuando ella es tratada como una función:

Suponga que $f:[a,b]\to ¡$ es una función Riemann integrable en $[a,b]$. Luego la función f es Riemann integrable en todo subintervalo de $[a,b]$. En particular, la función

$$F:[a,b]\to ¡$$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

está bien definida y es llamada la **integral indefinida** de f con **punto base** a, (Bartle, 2011), (Folland, 2007).

- **Teorema Fundamental del Calculo (Primera Parte):**

Sea $f:[a,b]\to ¡$ una función integrable en $[a,b]$. Entonces la integral indefinida de f

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

es continua en $[a,b]$. Además, si f es continua en $x_0\in[a,b]$ entonces F es diferenciable en x_0 y $F'(x_0)=f(x_0)$.

Demostración:

Suponga que f es continua en x_0, entonces

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt$$

Suponga que $h>0$. Entonces, por el teorema del valor medio para integrales en el intervalo $[x_0,x_0+h]$, se tiene que existe un $x_h\in(x_0,x_0+h)$ tal que

$$\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt=h\cdot f(x_h)$$

Luego,

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt=\lim_{h\to 0} f(x_h)$$

Como f es continua en x_0 y $\lim_{h\to 0} x_h = x_0$, se tiene que $F'(x_0)=f(x_0)$.

Suponga que $h<0$. Entonces, por el teorema del valor medio para integrales en el intervalo $[x_0+h,x_0]$, se tiene que existe en $x_h\in(x_0+h,x_0)$ tal que

$$\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt=(-h)f(x_h)$$

Luego, similar al caso anterior, se tiene que

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt\right)=\lim_{h\to 0} f(x_h)=f(x_0)$$

En conclusión, $F'(x_0)=f(x_0)$.

Del teorema anterior se tiene que, si f es continua en $[a,b]$ entonces F es diferenciable en $[a,b]$ y $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in[a,b]$, o sea

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)\ ,\ x\in[a,b]$$

El siguiente resultado es una consecuencia de la regla de la cadena para derivadas y el teorema anterior (Bartle, 2011), (Gordon, 2002).

Corolario: Sean $a(x)$ y $b(x)$ dos funciones diferenciables y f una función continua en el intervalo $[a(x),b(x)]$. Entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right)=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$$

La segunda parte del teorema fundamental del cálculo, conocido también como regla de Newton – Leibniz o regla de Barrow, es una propiedad de las funciones continuas que permite calcular fácilmente el valor de la integral definida a partir de las primitivas de la función.

- **Teorema fundamental del Cálculo (segunda parte)**

Sea $f:[a,b]\to ¡$ una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Si G es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Demostración:

Sea $\mathrm{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2, ..., t_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Denote

$$I_1 = [t_0, t_1], \quad I_2 = [t_1, t_2], ..., \quad I_n = [t_{n-1}, t_n]$$

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in I_i\} \quad , \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in I_i\}$$

y

$$L(f, \mathrm{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \quad , \quad U(f, \mathrm{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

Por el teorema del valor medio aplicado a la función G en el intervalo I_i, existe un $x_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que

$$G(t_i) - G(t_{i-1}) = G'(x_i)(t_{i-1} - t_i) = f(x_i)(t_i - t_{i-1})$$

como

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \le f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \le M_i(t_i - t_{i-1})$$

se tiene que

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq G(t_i) - G(t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1})$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(G(t_i) - G(t_{i-1})\right) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

o sea,

$$L(f, \mathrm{P}) \leq G(b) - G(a) \leq U(f, \mathrm{P})$$

para toda partición P de $[a,b]$. Como f es integrable en $[a,b]$, se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Observación: Si en este teorema se supone que la función f es continua en $[a,b]$, entonces la integral indefinida de f

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es una primitiva de f . Luego,

$$\left(F - G\right)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

para todo $x \in [a,b]$. Por lo tanto, existe una constante C tal que

$$G(x) = F(x) + C$$

para todo $x \in [a,b]$. Como $F(a) = 0$, se tiene que $G(a) = C$. Por consiguiente,

$$G(b) = F(b) + G(a)$$

de donde

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = G(b) - G(a)$$

- **El inverso del teorema fundamental del cálculo**

El teorema fundamental del cálculo (primera parte) afirma que para una función continua f definida en el intervalo cerrado $[a,b]$, la función integral indefinida F definida en $[a,b]$ por

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

es continua (uniformemente) en $[a,b]$, diferenciable en $[a,b]$ y $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in[a,b]$.

La pregunta es si el inverso de este teorema es verdadero; o sea que, si para una función integrable f definida en el intervalo $[a,b]$ tal que la función integral indefinida F es diferenciable en $[a,b]$, esto implica que f es continua en $[a,b]$. Para responder a esta pregunta se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1: Sea $f:[0,1]\to$ ¡ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}2x\,sen\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), x\neq 0\\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad ,x=0\end{cases}$$

Note que la función f es acotada en el intervalo $[0,1]$ y continua en $(0,1]$, por lo tanto, f es integrable en $[0,1]$.

Además

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$$

Es claro que F es diferenciable en el intervalo $(0,1]$. Además,

$$\left|\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right| = \left|x\ sen\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$$

Esto implica que F es diferenciable en $x=0$ y $F'(0)=0=f(0)$.

Por consiguiente, $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in[0,1]$.

Sin embargo, la función f no es continua en $[0,1]$ ya que $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ no existe. Así, el inverso del teorema fundamental del cálculo (primera parte) no es verdadero.

Por otro lado, como la función f es integrable en $[0,1]$ y la integral indefinida F de f es una primitiva de f en $[0,1]$, por el teorema fundamental del cálculo (segunda parte) se tiene que

$$\int_0^1 f(x)dx = F(1)-F(0) = sen(1)$$

- **Generalización del teorema fundamental del cálculo**

Una pregunta interesante es, si son necesarias las hipótesis planteadas en el teorema fundamental del cálculo. Para responder a esta pregunta considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2: Sea $f:[0,1]\to ¡$ la función de Carl Johannes Thomae (1840 - 1921)

$$f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad x=0 \quad , \ x=1 \\ \dfrac{1}{q} & , \quad x=\dfrac{p}{q}\in ¤ \quad , \ (p,q)=1 \ , q>0 \\ 0 & , x\in I_r = ¡ - ¤ \end{cases}$$

La función f es continua en todo número irracional de $[0,1]$ y discontinua en todo número racional de $(0,1]$. Además f es integrable en $[0,1]$,

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt = 0$$

para todo $x\in[0,1]$ y

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right)=0\neq f(x)$$

para todo $x\in(0,1]$ I ¤ .

Así pues, la función de Thomae es integrable, su integral indefinida es diferenciable, pero no satisface el teorema fundamental del cálculo (primera parte). Mas aún, no existe una primitiva G de f en $[0,1]$.

El ejemplo anterior lleva a la siguiente pregunta:

¿Qué condiciones se le debe imponer a la función G' para garantizar la veracidad del teorema fundamental del cálculo? En esa dirección, el matemático Jean Gaston Darboux (1842 – 1917) presentó el siguiente resultado (Olmsted, 2009), (Gordon 2002).

- **Teorema de Darboux:** Sea $G:[a,b]\to$ ¡ una función diferenciable en $[a,b]$. Si G' es integrable en $[a,b]$ entonces

$$\int_a^b G'(x)dx=G(b)-G(a)$$

3. Conclusiones

1. Si la derivada G' de una función diferenciable G es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces por el teorema fundamental del cálculo (segunda parte) se tiene que

$$\int_a^b G'(x)dx=G(b)-G(a)$$

Sin embargo, la derivada de una función diferenciable no tiene por qué ser integrable. En efecto, sea $g:[-1,1]\to$ ¡ la función definida por

$$g(x)=\begin{cases}x^2 sen\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$$

g es diferenciable en $[-1,1]$ y

$$G(x)=g'(x)=\begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & ,\ x\neq 0 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases}$$

Como la función G no es acotada en $[-1,1]$, ella no es integrable en $[-1,1]$.

2. La función integral indefinida $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ de una función integrable $f:[a,b]\to ¡$ no necesariamente es una primitiva de la función f. Un ejemplo típico de esta situación es la función de Thomae, (Liu, 2014).
3. El teorema fundamental del cálculo (segunda parte) es también verdadero si se supone que f es integrable en $[a,b]$, $G'(x)=f(x)$ para todo $x\in[a,b]-E$ y G es continua en $[a,b]$, donde E es un conjunto finito (Bartle, 2011), (Folland, 2007).
4. La continuidad de la derivada de una función diferenciable no se puede tomar como un hecho cierto. Por ejemplo, la función $f:[-1,1]\to ¡$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2 sen\frac{1}{x} & ,\ x\neq 0 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases}$$

es derivable y

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\ sen\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & ,\ x\neq 0 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases}$$

Sin embargo, la función f' no es continua en $x=0$.

De hecho, el matemático Vito Volterra (1860 – 1940) presentó en 1881 un ejemplo de una función diferenciable con derivada acotada, pero que no era Riemann integrable. Por lo tanto, la pregunta $\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$ no es verdadera. (Dunham, 2005), (Edward, 1994), (Boyer, 2010).

Referencias bibliográficas

Bartle, R.G. y Sherbert, D.R. (2011). *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons-Inc. USA. https://mashadi.staff.unri.ac.id/files/2018/10/BUKU-REAL-ANALYSIS.pdf

Boyer, C.B. y Merzbach, C.B. (2010). *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons-Inc. USA. https://atiekubaidillah.wordpress.com/wp-content/uploads/2013/03/a-history-of-mathematics-3rded.pdf

Bressoud, D.M. (2011). Historical Reflections on Teaching the Fundamental Theorem of Integral Calculus. *The American Mathematical Monthly. Vol.118(*2). 99-115. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.4169/amer.math.monthly.118.02.099

Dunham. W. (2005). *Calculus Gallery Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton University Press. http://www.jstor.org/stable/j.ctt1287kvm

Edward, C.H. (1994). *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag. https://archive.org/details/historicaldevelo0000edwa/mode/1up

Folland, G. B. (2007). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley. https://apachepersonal.miun.se/~andrli/Bok.pdf

Gelbaum, B. R. y Olmsted, J.M.H. (2003). *Counterexamples in Analysis*. Dover Publications, Inc. https://faculty.ksu.edu.sa/sites/default/files/_olmsted_1.pdf

Gordon, R.A. (2002). *Real Analysis. A First Course*. Addison Wesley. https://archive.org/details/realanalysisfirs0000gord/page/n2/mode/1up

Liu, K. (2014). A Generalization of The Fundamental Theorem of Calculus. *Real Analysis Exchange 39*(1). 239-260. https://doi.org/10.1007/BF03041922

Olmsted, J. M. H. (2009). *Advanced Calculus. American Mathematical Society.* https://people.math.harvard.edu/~shlomo/docs/Advanced_Calculus.pdf