

## Cuadriláteros Perfectos

### Perfect Quadrilaterals

*Alicia M. Delgado de Brandao<sup>1</sup>, Yanina del Carmen Rodríguez Reyes<sup>2</sup>, Ubaldino Sandoval Moreno<sup>3</sup>, Temístocles Zeballos Mitre<sup>4</sup>, Ángela Y. Franco<sup>5</sup>*

<sup>1</sup>Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Panamá; [aliciadelgado0719@gmail.com](mailto:aliciadelgado0719@gmail.com); <https://orcid.org/0000-0003-4999-554X>

<sup>2</sup>Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Panamá; [rryanina06@gmail.com](mailto:rryanina06@gmail.com); <https://orcid.org/0000-0003-4757-950X>

<sup>3</sup>Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Panamá; [ubasando@gmail.com](mailto:ubasando@gmail.com); <https://orcid.org/0000-0003-2171-9703>

<sup>4</sup>Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Panamá; [temizeballos@gmail.com](mailto:temizeballos@gmail.com); <https://orcid.org/0000-0002-1557-5769>

<sup>5</sup>Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Panamá; [angela06franco@hotmail.com](mailto:angela06franco@hotmail.com); <https://orcid.org/0000-0002-0538-1688>

Fecha de recepción: 05-03-25

Fecha de aceptación: 29-04-25

DOI <https://doi.org/10.48204/j.vian.v9n1.a7537>

**Resumen:** En este artículo, se investiga la existencia de cuadriláteros perfectos como una generalización de los triángulos perfectos. Se definen los conceptos de cuadrilátero racional, cuadrilátero cíclico, se ilustran y demuestran algunas de sus propiedades. Posteriormente, se presentan los aportes de Brahmagupta y Kummer más importantes relacionados al estudio de los cuadriláteros racionales. Finalmente, se presenta el concepto de cuadrilátero perfecto y se demuestra, con la ayuda del álgebra computacional, la existencia de sólo once cuadriláteros cíclicos perfectos.

**Palabras clave:** cuadrilátero racional, cuadrilátero cíclico, cuadrilátero perfecto.

**Abstract:** This article explores the existence of perfect quadrilaterals as a generalization of perfect triangles. We define the concepts of rational quadrilaterals and cyclic quadrilaterals, illustrating and proving several of their properties. Subsequently, we present the significant contributions of Brahmagupta and Kummer related to the study of rational quadrilaterals. Finally, we introduce the concept of perfect quadrilaterals and demonstrate, with the aid of computational algebra, the existence of only eleven perfect cyclic quadrilaterals.

**Keywords:** rational quadrilateral, cyclic quadrilateral, perfect quadrilateral.

## 1. Introducción

El estudio de los cuadriláteros de lados y área racional ha fascinado a los matemáticos durante siglos, en algunas culturas el énfasis en la geometría ha sido desde el punto de vista numérico motivado por la geometría sagrada.

La teoría matemática desarrollada en torno a la búsqueda de cuadriláteros con parámetros que cumplan determinadas restricciones, ya sea que las longitudes de dichos parámetros sean números racionales y que, además, las áreas sean números enteros o racionales; es amplia y enriquecedora, teoría que pertenece actualmente a la parte de la matemática llamada geometría aritmética.

Cuando se restringen los valores de las longitudes de los lados de los cuadriláteros y su área a números racionales o enteros y, además, se exige la igualdad de la multiplicidad del área y el perímetro, aparecen los conceptos de cuadriláteros racionales y cuadriláteros perfectos. Conceptos que se generalizan a otras figuras geométricas y en otras dimensiones.

## 2. Metodología

Los cuadriláteros racionales ocupan un espacio significativo en la investigación matemática. Restringiendo el campo de estudio a los números enteros positivos y a los cuadriláteros cíclicos aparece el concepto de cuadrilátero perfecto.

Primeramente, se introducen los conceptos de cuadrilátero racional y cuadrilátero cíclico; con sus respectivos ejemplos, propiedades y teoremas.

Seguidamente, se presentan los aportes de Brahmagupta y Kummer al estudio de los cuadriláteros racionales; para validar los resultados, se presentan ejemplos en los casos más importantes.

Finalmente, se realiza un análisis detallado sobre la existencia de cuadriláteros perfectos; haciendo énfasis en las diferentes posibilidades y utilizando, en algunos cálculos y gráficos, el apoyo del álgebra computacional.

## 3. Cuadrilátero racional

**Definición 1:** Un cuadrilátero cuyos lados, diagonales y área son expresados por números racionales recibe el nombre de cuadrilátero racional (Dickson, 1971).

**Observación 1:** La fórmula de Herón para el área de un triángulo nos permite calcular el área de un cuadrilátero si conocemos la longitud de los lados y una diagonal (dividiendo el cuadrilátero en dos triángulos) (Delgado, 2023).

En general, el área de un cuadrilátero se calcula a través de la fórmula

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}, \text{ donde } a, b, c, d \text{ son las longitudes de}$$

los lados,  $s$  es el semiperímetro y  $\theta_1, \theta_2$  son dos ángulos opuestos del cuadrilátero.

#### 4. Cuadrilátero cíclico

**Definición 2:** Un cuadrilátero que se puede inscribir en una circunferencia recibe el nombre de cuadrilátero cíclico (Pamfilos, 2024).

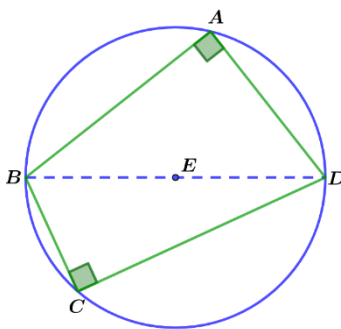
**Observación 2:** Si el cuadrilátero es cíclico entonces su área se calcula a través de la fórmula

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \text{ donde } a, b, c, d \text{ son las longitudes de los lados y } s \text{ es el semiperímetro.}$$

**Ejemplo 1:** Si tenemos un cuadrilátero  $ABCD$  con ángulos rectos en  $A$  y en  $C$ , entonces el cuadrilátero  $ABCD$  es cíclico, ya que el circuncentro del triángulo rectángulo  $BAD$  es el punto medio  $E$  de la hipotenusa  $BD$  y el circuncentro del triángulo  $BCD$ , también es el punto medio  $E$ . Luego, los cuatro puntos  $A, B, C, D$  pertenecen a la circunferencia con centro en  $E$  y radio  $BE$ .

**Figura 1**

*Cuadrilátero  $ABCD$  con ángulos rectos en  $A$  y en  $C$ .*



Este caso especial en donde dos ángulos internos opuestos de un cuadrilátero miden  $90^\circ$  cada uno, se puede generalizar como se muestra en el siguiente teorema.

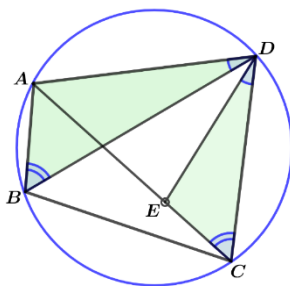
**Teorema 1:** En todo cuadrilátero convexo cíclico, sus ángulos opuestos son suplementarios. Inversamente, si en un cuadrilátero convexo dos ángulos opuestos son suplementarios, entonces el cuadrilátero es cíclico (Pamfilos, 2024).

**Teorema 2:** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo. El cuadrilátero  $ABCD$  es cíclico sí y sólo sí  $\angle CBD \cong \angle CAD$ .

**Teorema (Ptolomeo) 3:** En todo cuadrilátero convexo cíclico  $ABCD$ , el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de sus lados opuestos:  $|AC||BD| = |AB||CD| + |BC||DA|$  (Pamfilos, 2024).

**Demostración:** Dibujar  $DE$ , de modo que el ángulo  $\angle EDC \cong \angle ADB$ .

**Figura 2**  
*Cuadrilátero convexo cíclico  $ABCD$*



Entonces los triángulos  $\triangle DEC$  y  $\triangle DAB$  son semejantes y tienen ángulos iguales respectivamente en  $D$ ,  $B$  y  $C$ . De esta semejanza se sigue

$$\frac{|AB|}{|EC|} = \frac{|BD|}{|DC|} \Leftrightarrow |AB||DC| = |BD||EC|$$

También los triángulos  $\triangle DAE$  y  $\triangle DBC$  son semejantes, teniendo ángulos iguales respectivamente en  $D$ ,  $A$  y  $B$ . De esta semejanza se sigue

$$\frac{|AE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} \Leftrightarrow |AD||BC| = |BD||AE|$$

Sumando las dos ecuaciones por partes se tiene:

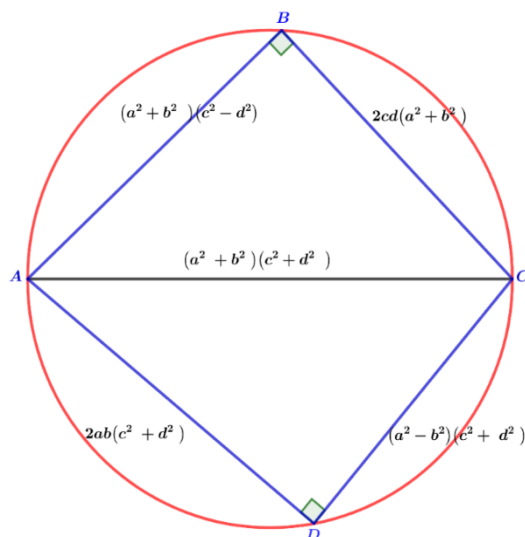
$$|AB||DC| + |AD||BC| = |BD||EC| + |BD||AE| = |BD|(|EC| + |AE|) = |BD||AC|.$$

### 5. Aportes de Brahmagupta a la construcción de cuadriláteros racionales

Brahmagupta construyó cuadriláteros cíclicos racionales a través de la yuxtaposición de dos triángulos rectángulos racionales. La primera construcción consiste en yuxtaponer dos triángulos rectángulos racionales después de igualar sus hipotenusas. El procedimiento es el siguiente (Sujatha et al., 2011):

**Figura 3**

*Primera construcción del cuadrilátero cíclico racional ABCD*



Se parte de dos triángulos rectángulos racionales, con parametrización  $(c^2 - d^2, 2cd, c^2 + d^2)$  y  $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ . Luego, se igualan las hipotenusas; para lo cual se multiplica la primera terna pitagórica por  $(a^2 + b^2)$  y la segunda terna pitagórica se multiplica por  $(c^2 + d^2)$ ; de donde se obtienen los dos triángulos rectángulos racionales  $((a^2 + b^2)(c^2 - d^2), 2cd(a^2 + b^2), (a^2 + b^2)(c^2 + d^2))$  y  $((c^2 + d^2)(a^2 - b^2), 2ab(c^2 + d^2), (a^2 + b^2)(c^2 + d^2))$ .

Ahora, se yuxtaponen ambos triángulos rectángulos racionales formando el cuadrilátero  $ABCD$  que se muestra en la Figura 3, el cual tiene como lados:

$$AB = (a^2 + b^2)(c^2 - d^2), \quad BC = 2cd(a^2 + b^2), \quad CD = (c^2 + d^2)(a^2 - b^2)$$

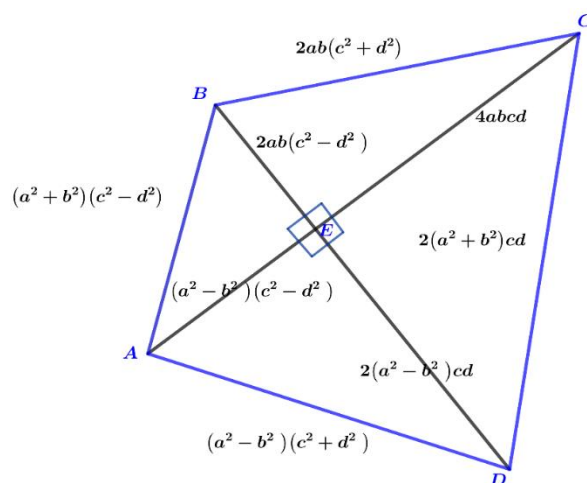
$$DA = 2ab(c^2 + d^2).$$

El diámetro  $AC$  tiene longitud  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$  y como el cuadrilátero es cíclico, del Teorema de Ptolomeo se deduce que la otra diagonal también es racional.

La segunda construcción se obtiene escalando dos triángulos rectángulos racionales con ternas  $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$  y  $(c^2 - d^2, 2cd, c^2 + d^2)$  y uniéndolos a lo largo de  $BE$  y  $ED$  para obtener un cuadrilátero, como se muestra en la figura 4.

**Figura 4**

*Segunda construcción del cuadrilátero cíclico racional  $ABCD$*



### Procedimiento

1. Se multiplica la hipotenusa del primer triángulo por cada cateto del segundo y esto genera dos lados opuestos del cuadrilátero.

$$(a^2 + b^2)(c^2 - d^2) = AB$$

$$(a^2 + b^2)(2cd) = CD.$$

2. Se multiplica la hipotenusa del segundo triángulo por cada cateto del primero y esto genera los otros dos lados opuestos del cuadrilátero.

$$(c^2 + d^2)(a^2 - b^2) = DA$$

$$(c^2 + d^2)(2ab) = BC$$

A continuación, se comprueba que el cuadrilátero anterior es cíclico, verificando que la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de las diagonales:

$$\begin{aligned}
 (AB)(CD) + (DA)(BC) &= (a^2 + b^2)(c^2 - d^2)(a^2 + b^2)(2cd) + (c^2 + d^2)(a^2 - b^2)(c^2 + d^2)(2ab) \\
 &= (2cd)(a^2 + b^2)^2(c^2 - d^2) + (2ab)(c^2 + d^2)^2(a^2 - b^2) \\
 &= (2cd)\left[(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2\right](c^2 - d^2) + (2ab)\left[(c^2 - d^2)^2 + (2cd)^2\right](a^2 - b^2) \\
 &= (2cd)(c^2 - d^2)\left[(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2\right] + (2ab)(a^2 - b^2)\left[(c^2 - d^2)^2 + (2cd)^2\right] \\
 &= (2cd)(c^2 - d^2)(a^2 - b^2)^2 + (2cd)(c^2 - d^2)(2ab)^2 + (2ab)(a^2 - b^2)(c^2 - d^2)^2 \\
 &\quad + (2ab)(a^2 - b^2)(2cd)^2 \\
 &= (2cd)(c^2 - d^2)(a^2 - b^2)(a^2 - b^2) + (2cd)(c^2 - d^2)(2ab)(2ab) + \\
 &\quad (2ab)(a^2 - b^2)(c^2 - d^2)(c^2 - d^2) + (2ab)(a^2 - b^2)(2cd)(2cd) \\
 &= (2cd)(c^2 - d^2)(a^2 - b^2)(a^2 - b^2) + (2ab)(c^2 - d^2)(2cd)(2ab) \\
 &\quad + (2ab)(a^2 - b^2)(c^2 - d^2)(c^2 - d^2) + (2cd)(a^2 - b^2)(2ab)(2cd) \\
 &= (2cd)(c^2 - d^2)(a^2 - b^2)(a^2 - b^2) + (2ab)(c^2 - d^2)(4abcd) \\
 &\quad + (2ab)(a^2 - b^2)(c^2 - d^2)(c^2 - d^2) + (2cd)(a^2 - b^2)(4abcd) \\
 &= (2ab)(c^2 - d^2)(4abcd) + (2ab)(c^2 - d^2)(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \\
 &\quad + (2cd)(a^2 - b^2)(4abcd) + (2cd)(a^2 - b^2)(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \\
 &= \left[(2ab)(c^2 - d^2) + (2cd)(a^2 - b^2)\right]\left[4abcd + (a^2 - b^2)(c^2 - d^2)\right] \\
 &= BD \cdot AC
 \end{aligned}$$

En la verificación anterior se utilizan las igualdades:

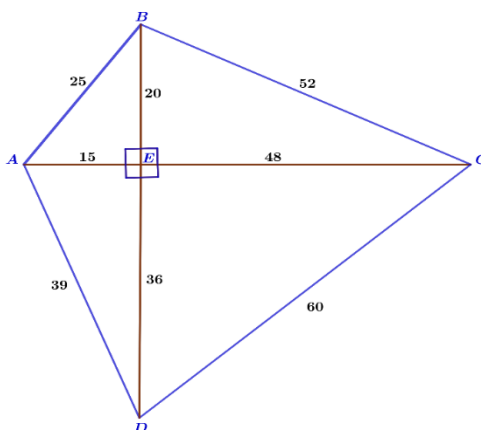
$$\begin{aligned}
 (a^2 + b^2)^2 &= (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 \\
 (c^2 + d^2)^2 &= (c^2 - d^2)^2 + (2cd)^2.
 \end{aligned}$$

Al inspeccionar las diagonales, queda claro que esta construcción es diferente a la primera.

**Observación 3:** Chaturveda Prithudaka Swami, (850 d.C.), el famoso comentarista de Brahmagupta, en su comentario de la obra de Brahmagupta da un ejemplo numérico que se muestra en la Figura 5; tomando los triángulos rectángulos con lados  $(3, 4, 5)$  y  $(5, 12, 13)$  (Colebrooke, 1817).

**Figura 5**

*Representación numérica del cuadrilátero cíclico racional ABCD*



Ahora, se presenta una proposición que exhibe cómo construir un cuadrilátero racional con diagonales racionales uniendo dos triángulos rectángulos racionales cualesquiera, que es muy similar al espíritu de la segunda construcción de Brahmagupta.

Primeramente, se presenta un lema que muestra cómo construir triángulos racionales con área racional mediante la unión de dos triángulos rectángulos racionales cualesquiera.

**Lema 1:** Sean  $\triangle VABE$  y  $\triangle VECF$  dos triángulos rectángulos con lados racionales. Luego, se reemplaza  $\triangle EFC$  por un triángulo semejante, si es necesario, se puede suponer que  $EF = EB$ . Entonces el triángulo  $ABC$  que se obtiene por la yuxtaposición de los dos triángulos rectángulos anteriores a lo largo de  $BE$  es un triángulo racional con área racional (Sujatha et al., 2011).

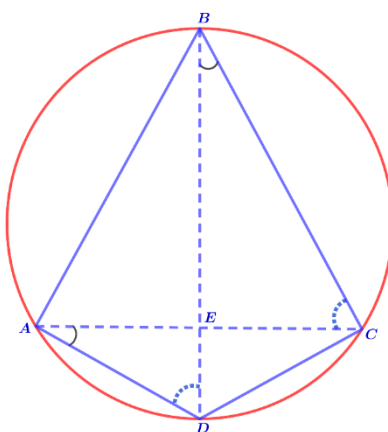
**Lema 2:** Todo triángulo con lados racionales y área racional se puede obtener yuxtaponiendo dos triángulos rectángulos con lados racionales (Sujatha et al., 2011).

**Teorema 4 (Brahmagupta):**

Sea  $ABC$  un triángulo racional que se obtiene uniendo los triángulos rectángulos  $ABE$ ,  $BEC$ . Sea  $BE$  el segmento que pertenece al segmento que corta a la circunferencia que circunscribe al triángulo  $ABC$  en  $D$ . Entonces  $ABCD$  es un cuadrilátero con lados racionales y diagonales racionales (Sujatha et al., 2011).

**Figura 6**

*Cuadrilátero con lados racionales y diagonales racionales  $ABCD$*



**Demostración:**

Los triángulos  $AED$  y  $BEC$  son semejantes, por lo tanto  $\frac{AD}{BC} = \frac{AE}{BE} = \frac{DE}{EC}$ .

Como  $BC$ ,  $BE$ ,  $EC$  son todos racionales, se tiene que  $AD$ ,  $DE$  son racionales;

$$\left( AD = \frac{AE \cdot BC}{BE}, \quad DE = \frac{AE \cdot EC}{BE} \right).$$

De manera similar,  $\triangle CED : \triangle BEA$ , y por lo tanto  $\frac{DC}{AB} = \frac{DE}{AE}$ , de modo que  $CD$  también es racional.

Resumiendo, se tiene que:

$AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  son racionales por hipótesis.

$AD$ ,  $DC$ ,  $ED$  son racionales por demostración.

$BE$  es racional por hipótesis, ya que el  $\triangle VABC$  es racional, por lo tanto, tiene área racional, así que  $BE$  tiene que ser un racional por ser la altura.

$BE + ED$  es racional por ser suma de dos racionales.

Por consiguiente, se puede concluir que  $ABCD$  es un cuadrilátero con lados y diagonales racionales.

## 6. Aportes de Kummer a la construcción de cuadriláteros racionales

Kummer, establece el siguiente lema.

**Lema 3:** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero tal que todos sus lados y diagonales sean racionales. Entonces  $BE$ ,  $ED$ ,  $AE$ ,  $EC$  determinados por la intercepción de las diagonales, son todos racionales (Sujatha et al., 2011).

La siguiente proposición de Kummer da una parametrización de cualquier triángulo racional con un ángulo cuyo coseno sea un racional dado.

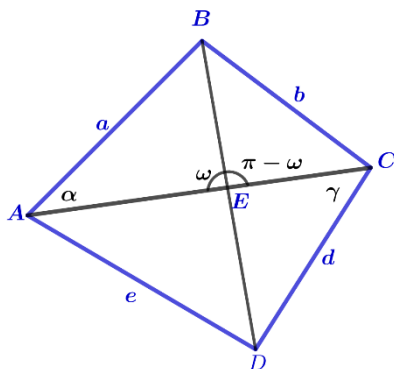
**Teorema 5:** Sea  $ABE$  un triángulo racional. Sea el ángulo  $\omega = \angle BEA$  y  $\cos \omega = c$ . Sea  $a = AB$ ,  $\beta = BE$ ,  $\alpha = AE$ . Entonces, para cualquier racional positivo arbitrario  $\xi$  las

razones  $\frac{a}{\beta}$  y  $\frac{\alpha}{\beta}$  están dadas por  $\frac{a}{\beta} = \frac{\xi^2 + k^2}{2\xi}$  y  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\xi + c)^2 - 1}{2\xi}$ . Esto parametriza

todos los triángulos racionales con un valor fijo  $c$ ; aquí  $k^2 = 1 - c^2$ .

**Figura 7**

*Cuadrilátero  $ABCD$  con todos sus lados racionales y diagonales racionales.*



Kummer utilizó el teorema anterior para escribir una ecuación polinomial indeterminada cuya solución conduce a cuadriláteros racionales. Notó que para construir tales cuadriláteros bastaba con construir cuatro triángulos diferentes  $AEB$ ,  $BEC$ ,  $CED$ ,  $DEA$  con un vértice común  $E$  y con una única condición de compatibilidad que se escribe a continuación. Sean  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = d$ ,  $DA = e$  con un vértice común  $E$ . Supóngase, por el momento, que tal cuadrilátero existe. Sean, las intercepciones de las diagonales,  $AE = \alpha$ ,  $BE = \beta$ ,  $CE = \gamma$ ,  $DE = \delta$ . Repitiendo la parametrización descrita en el Teorema 5 para el triángulo  $ABE$ , para los triángulos  $CEB$ ,  $CED$  y  $DEA$  se obtienen parámetros racionales  $(\eta, y, x)$  tal que:

|                                                       |                                                         |                                                    |                                                    |
|-------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Para $VABE$                                           | Para $VCBE$                                             | Para $VCED$                                        | Para $VDEA$                                        |
| $\frac{a}{\beta} = \frac{\xi^2 + k^2}{2\xi}$          | $\frac{b}{\beta} = \frac{\eta^2 + k^2}{2\eta}$          | $\frac{d}{\gamma} = \frac{y^2 + k^2}{2y}$          | $\frac{e}{\alpha} = \frac{x^2 + k^2}{2x}$          |
| $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\xi - c)^2 - 1}{2\xi}$ | $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{(\eta - c)^2 - 1}{2\eta}$ | $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{(y + c)^2 - 1}{2y}$ | $\frac{\delta}{\alpha} = \frac{(x - c)^2 - 1}{2x}$ |

Esta elección implica una única condición: que  $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\delta}{\alpha}\right) = \frac{\delta}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma} \frac{\gamma}{\beta}$ .

**Ejemplo 2:** Sean  $c = \frac{4}{5}$ ,  $\xi = 1$ ,  $\eta = 3$ ,  $\alpha = \frac{28}{25}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = \frac{16}{25}$ ,  $\delta = \frac{1711}{1500}$ .

Multiplicando  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  por 1500, se obtiene:

$$\alpha' = 1680, \quad \beta' = 1500, \quad \gamma' = 960, \quad \delta' = 1711$$

Las longitudes de los lados son:

$$AB = 1020, \quad BC = 2340, \quad CD = 1105, \quad DA = 3217$$

Las diagonales son:  $AC = 2640$ ,  $BD = 3211$

El área del cuadrilátero es 2543112.

## 7. Cuadriláteros Perfectos

En esta sección, se abordará el problema de la existencia de cuadriláteros perfectos; como una generalización del estudio de los triángulos perfectos, desarrollado anteriormente (Delgado, 2023).

Se dará respuesta a la pregunta: ¿Existirán cuadriláteros cíclicos de lados de longitud entera y área entera cuyo perímetro es numéricamente igual a un múltiplo de su área?

**Definición 3:** Un cuadrilátero cíclico convexo de lados de longitud entera y área entera cuyo perímetro es numéricamente igual a un múltiplo de su área es un cuadrilátero perfecto (Nelson, 1979).

En la búsqueda de cuadriláteros perfectos, es natural preguntarse si existen cuadrados perfectos; ya que todo cuadrado es un cuadrilátero cíclico; es decir, ¿La relación  $P = nA$  se verificará para algún cuadrado?

A continuación, se presentan los cálculos que permiten dar respuesta a esta interrogante.

Considérese un cuadrado de lado de longitud  $a \in \mathbb{N}$ .

Luego,

$$P = 4a, \quad A = \sqrt{(s-a)(s-a)(s-a)(s-a)} = a^2.$$

Por lo tanto, se debe resolver la ecuación  $4a = na^2$ .

$$4a - na^2 = 0 \Leftrightarrow a(4 - na) = 0 \Leftrightarrow 4 = na.$$

Las tres soluciones de la ecuación anterior son:

1)  $n = 1, a = 4$ ; la cual corresponde a un cuadrado de lado de longitud cuatro que verifica la relación  $P = A$ .

2)  $n = 2, a = 2$ ; la cual corresponde a un cuadrado de lado de longitud dos que verifica la relación  $P = 2A$ .

3)  $n=4, a=1$ ; la cual corresponde a un cuadrado de lado de longitud uno que verifica la relación  $P=4A$ .

Por consiguiente, se ha probado la siguiente propiedad:

**Propiedad 1:** Existen tres cuadrados perfectos.

Ahora, se plantea la siguiente interrogante: ¿Existirán rectángulos (no cuadrados) perfectos?

A continuación, se presentan algunos cálculos que permiten dar respuesta a esta pregunta.

Considérese un rectángulo de lados de longitud  $a, b, a, b \in \mathbb{N}$ , con  $a \neq b$ .

Luego,

$$P=2(a+b), A=\sqrt{(s-a)^2(s-b)^2}=(s-a)(s-b)=ab.$$

Por lo tanto, se debe resolver la ecuación  $2(a+b)=nab$ .

**Caso 1:**  $n=1$ .

$$2(a+b)=ab \Leftrightarrow 2a+2b-ab=0 \Leftrightarrow 2a+b(2-a)=0 \Leftrightarrow b=\frac{2a}{a-2}.$$

Note que  $a \geq 3$ .

Para  $a=3$  se obtiene el rectángulo  $(3,6,3,6)$  y de hecho es la única solución posible para valores impares de  $a$ ; ya que el numerador siempre es par y no es múltiplo del denominador.

Ahora bien, si se reemplaza  $a=2t$ ,  $2 \leq t \in \mathbb{N}$ ; en la ecuación anterior se obtiene:

$$b=\frac{4t}{2(t-1)} \Leftrightarrow b=\frac{2t}{t-1}, t \geq 2$$

Para  $t=2$ , se obtiene  $a=b=4$ , caso ya estudiado.

Para  $t=3$ , resulta  $a=6$  y  $b=3$ ; de donde se obtiene el rectángulo  $(6,3,6,3)$ ; el cual es congruente con el anterior.

Note que para  $t \geq 4$ , se verifica la desigualdad  $2 < \frac{2t}{t-1} < 3$ ; por lo tanto, no existen más soluciones para  $a$  y  $b$ .

**Caso 2:**  $n = 2$ .

$$2(a+b) = 2ab \Leftrightarrow a+b = ab \Leftrightarrow a+b-ab = 0 \Leftrightarrow a+b(1-a) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{a}{a-1}.$$

Note que la ecuación anterior sólo tiene solución entera cuando  $a = 2$ , caso que ya fue estudiado en los cuadrados perfectos.

**Caso 3:**  $n = 3$ .

$$2(a+b) = 3ab \Leftrightarrow 2a+2b = 3ab \Leftrightarrow 2a+2b-3ab = 0 \Leftrightarrow 2a+b(2-3a) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{2a}{3a-2}.$$

Para  $a = 1$ , se obtiene el valor de  $b = 2$ ; la cual corresponde a un rectángulo de lados de longitud  $(1, 2, 1, 2)$  que verifica la relación  $P = 3A$ .

Para  $a = 2$ , se obtiene el valor de  $b = 1$ ; la cual corresponde a un rectángulo de lados de longitud  $(2, 1, 2, 1)$  que verifica la relación  $P = 3A$ . Esta solución da un rectángulo congruente al anterior.

Por otro lado, si  $a \geq 3$  se tiene que  $2a < 3a - 2$  y por lo tanto, no se obtienen soluciones enteras para  $b$ .

**Caso 4:**  $n = 4$ .

$$2(a+b) = 4ab \Leftrightarrow a+b = 2ab \Leftrightarrow b = \frac{a}{2a-1}$$

Note que la ecuación anterior sólo tiene solución entera cuando  $a = 1$ , caso que ya fue estudiado en los cuadrados perfectos.

Por consiguiente, se ha probado la siguiente propiedad:

**Propiedad 2:** Existen dos rectángulos (no cuadrados) perfectos.

Seguidamente, se analiza el caso general: ¿Existirán, adicional a los ya estudiados, cuadriláteros perfectos?

Supóngase que tales cuadriláteros existen. Sean  $(a, b, c, d)$  los cuadriláteros buscados.

Luego, se debe verificar la relación  $P = nA$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ ; donde  $P = a + b + c + d$ ,

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Por lo tanto, se deben encontrar números enteros positivos  $a, b, c, d, n$  tales que

$$a + b + c + d = n\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad (1)$$

sujeto a las restricciones  $a + b + c > d$ ,  $a + b + d > c$ ,  $a + c + d > b$ ,  $b + c + d > a$ .

Al sustituir el semiperímetro en la fórmula del área, se obtiene:

$$A = \sqrt{\left(\frac{a+b+c+d}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c+d}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c+d}{2} - c\right)\left(\frac{a+b+c+d}{2} - d\right)}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{b+c+d-a}{2}\right)\left(\frac{a+c+d-b}{2}\right)\left(\frac{a+b+d-c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)}.$$

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}.$$

Note que los cuatro factores de la cantidad subradical son positivos, debido a las restricciones.

Sean

$$x = P - 2a = b + c + d - a,$$

$$y = P - 2b = a + c + d - b, \quad (*)$$

$$z = P - 2c = a + b + d - c,$$

$$v = P - 2d = a + b + c - d$$

Luego,

$$\begin{aligned} x + y + z + v &= b + c + d - a + a + c + d - b + a + b + d - c + a + b + c - d \\ &= b + c + d + c + d + a + a + b \\ &= 2a + 2b + 2c + 2d \\ &= 2(a + b + c + d) \\ &= 2P \end{aligned}$$

Por consiguiente, sustituyendo en (1) se obtiene la ecuación:

$$x + y + z + v = 2n \left( \frac{1}{4} \sqrt{xyzv} \right)$$

$$(x + y + z + v)^2 = \frac{1}{4} n^2 xyzv$$

$$4(x + y + z + v)^2 = n^2 xyzv \quad (2)$$

Las restricciones  $a + b + c > d$ ,  $a + b + d > c$ ,  $a + c + d > b$ ,  $b + c + d > a$  implican que  $x, y, z, v > 0$ .

Si la ecuación (1) tiene una solución entera  $a, b, c, d, n$ , entonces (2) tendrá una solución correspondiente en la que  $x, y, z, v$  y  $P$  serán todos pares o todos impares debido a las relaciones(\*).

Por consiguiente, para resolver (1) sólo se necesita considerar aquellas soluciones de (2) en las que  $x, y, z, v$  y  $P$  serán todos pares o todos impares.

Por otro lado, note que

$$\begin{aligned} y + z + v - x &= P - 2b + P - 2c + P - 2d - P + 2a \\ &= 2P + 2a - 2b - 2c - 2d \\ &= 2(P + a - b - c - d) \\ &= 2(2a) \\ &= 4a \end{aligned}$$

de donde se deduce que  $y + z + v > x$  y de manera similar  $x + z + v > y$ ,  $x + y + v > z$ ,  $x + y + z > v$ .

Además, se deduce que:

$$a = \frac{y + z + v - x}{4}, \quad b = \frac{x + z + v - y}{4}, \quad c = \frac{x + y + v - z}{4}, \quad d = \frac{x + y + z - v}{4} \quad (\dagger).$$

Ahora, supóngase (sin pérdida de generalidad) que  $x \geq y \geq z \geq v$ ; de (2) se tiene que:

$$\frac{4(x + y + z + v)^2}{n^2 xy} = zv \geq v^2.$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
x(2y+z+v)^2 - y(x+y+z+v)^2 &= (x-y) \left[ v^2 - xy + 2v(y+z) + (y+z)^2 \right] \\
&= (x-y) \left[ v^2 + 2v(y+z) + (y+z)^2 - xy \right] \\
&= (x-y) \left[ (v+y+z)^2 - xy \right] \\
&\geq 0;
\end{aligned}$$

ya que  $x \geq y \Rightarrow x-y \geq 0$  y  $y+z+v > x \geq y \Rightarrow (y+z+v)^2 > xy \geq xy$ .

Por consiguiente,

$$\frac{4(x+y+z+v)^2}{n^2 xy} \leq \frac{4(2y+z+v)^2}{n^2 y^2} \leq \frac{64}{n^2}.$$

Así,  $zv \leq \frac{64}{n^2}$  y  $v \leq \frac{8}{n}$ . Estas desigualdades implican que para un determinado valor de  $n$ ,

los valores de  $z$  y  $v$  están restringidos a un número finito de pares y valores. Como  $x \geq y$  y  $y+z+v > x$  se tiene que  $x-y < z+v$ , entonces para cada posible par  $(z, v)$  resulta que  $x-y$  solamente puede tomar los valores  $0, 2, 4, 6, \dots, z+v-2$ .

Sea  $x = y + m$ , reemplazando en la ecuación (2) se obtiene:

$$4(2y+m+z+v)^2 = n^2 yzv(y+m).$$

Para cualquier par  $(z, v)$  se tiene, al considerar  $m = 0, 2, 4, 6, \dots, z+v-2$ , un número finito de ecuaciones cuadráticas en  $y$  para examinar en busca de soluciones enteras. Así,  $(x, y)$  puede tomar sólo un número finito de valores y para cada  $n$  la ecuación (2) sólo tiene un número finito de soluciones bajo las restricciones establecidas.

Por lo tanto, la cantidad de cuadriláteros perfectos siempre es finita para  $n \in \mathbb{N}$ .

Por otro lado, si  $n \geq 4$  entonces  $(z, v) = (1, 1)$ ,  $(z, v) = (3, 1)$ ,  $(z, v) = (2, 2)$ . En cada caso se busca una solución, recordando que  $x, y, z, v$  y  $P$  serán todos pares o todos impares y que  $x-y < z+v$ .

**Caso 1:**  $(z, v) = (1, 1)$ . Dado que  $z$  y  $v$  son impares, entonces  $x, y, P$  son impares y  $x - y < 2$ . Así que  $x = y$ .

Por otro lado,  $P = \frac{x + y + z + v}{2} = \frac{2x + 2}{2} = x + 1$ ; es decir, el perímetro es par (lo cual es una contradicción). Por lo tanto, no existe solución.

**Caso 2:**  $(z, v) = (3, 1)$ . Dado que  $z$  y  $v$  son impares, entonces  $x, y, P$  son impares y  $x - y < 4$ .

Ahora bien,  $P = \frac{x + y + z + v}{2} = \frac{x + y + 4}{2}$ ; el cual es impar sólo cuando  $x = y$ .

Luego, reemplazando en  $\frac{4(x + y + z + v)^2}{n^2 xy} = zv$  y dado que  $y \geq 3$ ; se obtiene:

$$n^2 = \frac{4(2y + 4)^2}{3y^2} \leq \frac{4(2(3) + 4)^2}{3(3)^2} = \frac{400}{27} < 16.$$

Por lo tanto, no existe solución; ya que  $n \geq 4$ .

**Caso 3:**  $(z, v) = (2, 2)$ . Dado que  $z$  y  $v$  son pares, entonces  $x, y, P$  son pares y  $x - y < 4$ .

Por otro lado,  $P = \frac{x + y + z + v}{2} = \frac{x + y + 4}{2}$ ; el cual sólo es par cuando  $x = y$ .

Luego, reemplazando en  $\frac{4(x + y + z + v)^2}{n^2 xy} = zv$  y dado que  $y \geq 2$ ; se obtiene:

$$n^2 = \frac{4(2y + 4)^2}{4y^2} \leq \frac{(4 + 4)^2}{(2)^2} = \frac{64}{4} = 16.$$

Por lo tanto, se tiene una única solución:  $(x, y, z, v) = (2, 2, 2, 2)$  cuando  $n = 4$ .

En resumen, a través de las argumentaciones anteriores, se han probado los teoremas siguientes:

**Teorema 6:** La cantidad de cuadriláteros perfectos es finita para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 7:** No existen cuadriláteros perfectos para  $n > 4$ .

Ahora, se analizan los casos  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ .

Observe que si  $x, y, z, v$  son todos impares, de la ecuación (2) se tiene que:

$$4 \left( (2x'+1) + (2y'+1) + (2z'+1) + (2v'+1) \right)^2 = n^2 (2x'+1)(2y'+1)(2z'+1)(2v'+1)$$

$$16 \left[ \frac{(x' + y' + z' + v')^2}{(2x'+1)(2y'+1)(2z'+1)(2v'+1)} \right] = n^2$$

Por lo tanto, no existe solución; ya que  $n^2 = 1$ ,  $n^2 = 4$ ,  $n^2 = 9$  y no un múltiplo de 16.

A continuación, se examina el caso donde  $x, y, z, v$  son todos pares.

Sean  $x = 2x'$ ,  $y = 2y'$ ,  $z = 2z'$ ,  $v = 2v'$ .

De la ecuación (2) se tiene que:

$$4(2x' + 2y' + 2z' + 2v')^2 = 16n^2 x' y' z' v'$$

$$16(x' + y' + z' + v')^2 = 16n^2 x' y' z' v'$$

$$(x' + y' + z' + v')^2 = n^2 x' y' z' v' \quad (2')$$

Por consiguiente, se deben buscar las soluciones enteras (positivas) de la ecuación (2'),

sujeta a las restricciones:  $x' + y' + z' + v'$  es par,  $y' + z' + v' > x'$ ,  $x' + z' + v' > y'$ ,  $x' + y' + v' > z'$ ,  $x' + y' + z' > v'$ .

Suponga que  $x' \geq y' \geq z' \geq v'$ . Del análisis que condujo a los últimos dos teoremas, se

deduce que  $z'v' \leq \frac{16}{n^2}$ ,  $v' \leq \frac{4}{n}$  y  $x' - y' < z' + v'$ .

Con Wolfram Mathematica 12.0, se resuelve la ecuación (2') con las restricciones presentadas y se obtienen las siguientes soluciones:

Para  $n = 1$ ,

### Figura 8

*Ecuaciones de las soluciones para  $n = 1$  en Wolfram Mathematica 12.*

```
In[1]:= Solve[(x + y + z + v)^2 - x y z v == 0 && x ≥ y ≥ z ≥ v ≥ 1 && x + y + z > v && x + y + v > z &&
|resuelve
x + v + z > y && v + y + z > x && 16 ≥ z v && 4 ≥ v && x - y < z + v, {x, y, z, v}, Integers]
|números enteros

Out[1]= {{x → 4, y → 4, z → 4, v → 4}, {x → 6, y → 6, z → 3, v → 3},
{x → 8, y → 5, z → 5, v → 2}, {x → 10, y → 10, z → 9, v → 1}}
```

Para  $n = 2$ ,

### Figura 9

Ecuaciones de las soluciones para  $n = 2$  en Wolfram Mathematica 12.

```
In[2]:= Solve[(x + y + z + v)^2 - 4 x y z v == 0 && x ≥ y ≥ z ≥ v ≥ 1 && x + y + z > v && x + y + v > z &&
|resuelve
x + v + z > y && v + y + z > x && 4 ≥ z v && 2 ≥ v && x - y < z + v, {x, y, z, v}, Integers]
|números enteros

Out[2]= {{x → 2, y → 2, z → 2, v → 2}}
```

Para  $n = 3$ ,

### Figura 10

Ecuaciones de las soluciones para  $n = 3$  en Wolfram Mathematica 12.

```
In[3]:= Solve[(x + y + z + v)^2 - 9 x y z v == 0 && x ≥ y ≥ z ≥ v ≥ 1 && x + y + z > v && x + y + v > z &&
|resuelve
x + v + z > y && v + y + z > x && 16/9 ≥ z v && 4/3 ≥ v && x - y < z + v, {x, y, z, v}, Integers]
|números enteros

Out[3]= {{x → 2, y → 2, z → 1, v → 1}}
```

Luego, utilizando  $(\dagger)$  se obtienen los valores de  $(a, b, c, d)$ ; los cuales se resumen en la

Tabla 1:

**Tabla 1**

Valores de  $(a, b, c, d)$

| $n$ | $(x', y', z', v')$ | $(x, y, z, v)$  | $(a, b, c, d)$ |
|-----|--------------------|-----------------|----------------|
| 1   | (4, 4, 4, 4)       | (8, 8, 8, 8)    | (4, 4, 4, 4)   |
| 1   | (6, 6, 3, 3)       | (12, 12, 6, 6)  | (3, 3, 6, 6)   |
| 1   | (8, 5, 5, 2)       | (16, 10, 10, 4) | (2, 5, 5, 8)   |
| 1   | (10, 10, 9, 1)     | (20, 20, 18, 2) | (5, 5, 6, 14)  |
| 2   | (2, 2, 2, 2)       | (4, 4, 4, 4)    | (2, 2, 2, 2)   |
| 3   | (2, 2, 1, 1)       | (4, 4, 2, 2)    | (1, 1, 2, 2)   |

Note que las soluciones  $(a,b,c,d)=(2,5,5,8)$  y  $(a,b,c,d)=(5,5,6,14)$  también generan los cuadriláteros  $(8,5,2,5)$  y  $(14,5,6,5)$ .

Ahora, se presenta, en la Tabla 2, un resumen con los once cuadriláteros perfectos (no congruentes) que existen:

**Tabla 2**

*Resumen de los 11 cuadriláteros*

| $(a, b, c, d)$  | Perímetro | Área | $n$ |
|-----------------|-----------|------|-----|
| $(4, 4, 4, 4)$  | 16        | 16   | 1   |
| $(3, 6, 3, 6)$  | 18        | 18   | 1   |
| $(3, 3, 6, 6)$  | 18        | 18   | 1   |
| $(2, 5, 5, 8)$  | 20        | 20   | 1   |
| $(5, 5, 6, 14)$ | 30        | 30   | 1   |
| $(14, 5, 6, 5)$ | 30        | 30   | 1   |
| $(8, 5, 2, 5)$  | 20        | 20   | 1   |
| $(2, 2, 2, 2)$  | 8         | 4    | 2   |
| $(1, 2, 1, 2)$  | 6         | 2    | 3   |
| $(1, 1, 2, 2)$  | 6         | 2    | 3   |
| $(1, 1, 1, 1)$  | 4         | 1    | 4   |

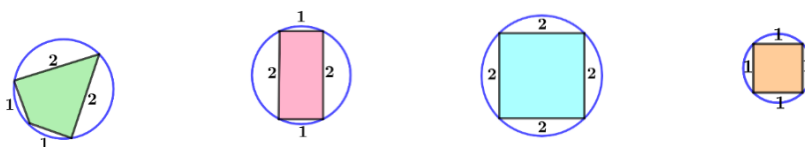
Así, se ha probado el siguiente teorema:

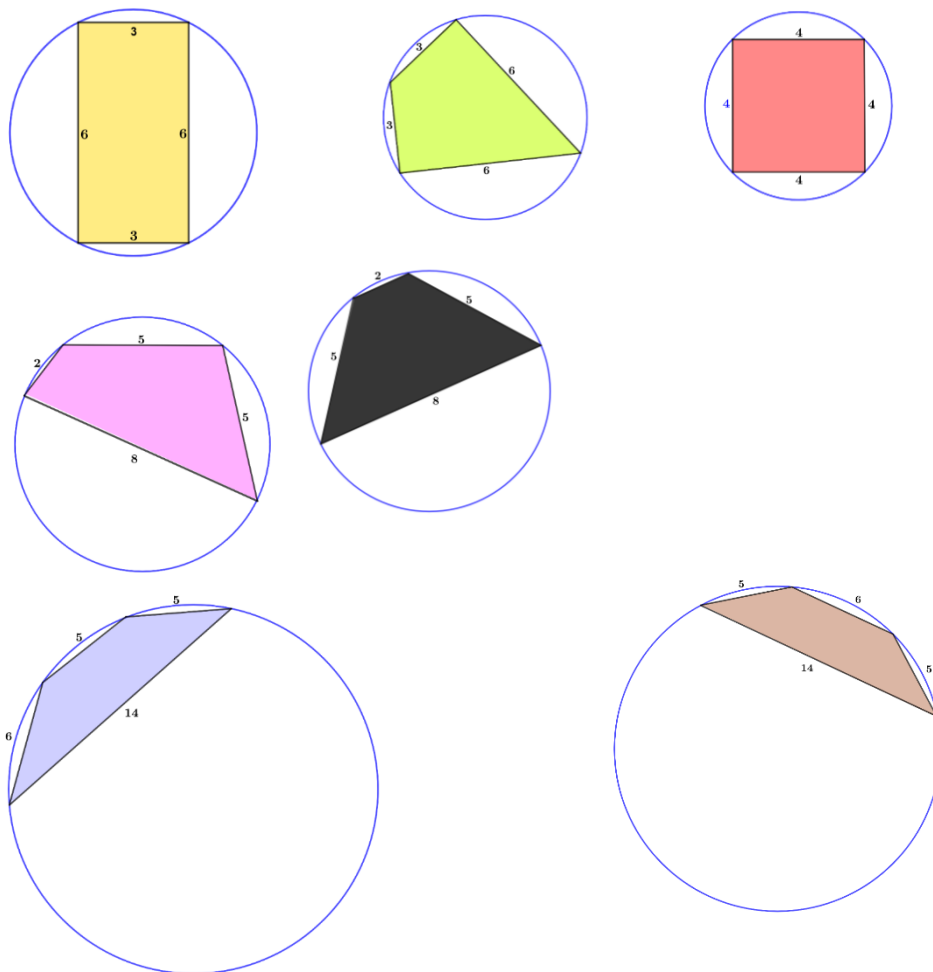
**Teorema 8:** Existen once cuadriláteros perfectos.

Ahora, se presentan los dibujos de los once cuadriláteros perfectos:

**Figura 11**

*Representación de los 11 cuadriláteros perfectos.*





## 8. Conclusiones

Con lo desarrollado y demostrado, se puede concluir:

- La fórmula de Herón juega un papel fundamental en la solución de los problemas relacionados con los cuadriláteros racionales.
- En el estudio de los cuadriláteros perfectos, se justificó la necesidad de considerar los cuadriláteros cíclicos para que dicho estudio sea una generalización del caso de los triángulos.
- La búsqueda de cuadriláteros perfectos se dividió en casos para clarificar y lograr deducciones más sencillas, dando como resultado la existencia de: siete cuadriláteros perfectos cuyo perímetro es numéricamente igual a su área, un cuadrilátero perfecto cuyo perímetro es numéricamente igual al doble de su área, dos cuadriláteros

perfectos cuyo perímetro es numéricamente igual al triple de su área y un cuadrilátero perfecto cuyo perímetro es numéricamente igual al cuádruple de su área.

- Existen solamente once cuadriláteros perfectos.
- Sería interesante investigar sobre la existencia de pentágonos perfectos.

### Referencias Bibliográficas

- Colebrooke, H.T. (1817). *Algebra, Arithmetic and Mensuration from the Sanskrit of Brahmagupta and Bhaskara*. London.
- Delgado de Brandao, A. M., Rodríguez Reyes, Y. del C., Sandoval Moreno, U., & Zeballos Mitre, T. (2023). Triángulos Perfectos. *Visión Antataura*, 7(2), 52–65. <https://doi.org/10.48204/j.vian.v7n2.a4562>
- Dickson, L. E. (1971). *History of the Theory of Numbers. Volume II*. Chelsea Publishing Company, New York.
- Pamfilos, P. (2024). *Lectures on Euclidean Geometry 1*. Springer Nature Switzerland AG. Switzerland.
- R. D. Nelson (1979) Perfect Quadrilaterals. *The American Mathematical Monthly*, 86:10, 845-847, <https://doi.org/10.1080/00029890.1979.11994927>
- Sujatha et al. (2011). *Math Unlimited. Essays in Mathematics*. Taylor & Francis Group, New York.