

Estudio del coeficiente de rozamiento de un cuerpo en movimiento sobre un plano horizontal y un plano inclinado

Study of the coefficient of friction of a body moving on a horizontal plane and an inclined plane

José Liborio Montenegro Pimentel¹

¹Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Panamá; newtond.521@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-8205-4525>

Fecha de recepción: 24-03-25

Fecha de aceptación: 29-04-25

DOI <https://doi.org/10.48204/j.vian.v9n1.a7538>

Resumen: Sobre el plano horizontal o inclinado, el movimiento de un cuerpo de masa m_1 que parte del reposo causado por otro cuerpo de masa m_2 que cae verticalmente a través de una polea atado en sus extremos por un cordel, conlleva al estudio a la determinación de forma indirecta del coeficiente de rozamiento cinético, μ_k , entre la superficie del plano y el cuerpo m_1 cuando éste mantiene movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Para ello, se construyeron posibles modelos matemáticos de acuerdo a un control de las variables, de manera que, el modelo matemático general de ambos planos que relacionan todas las variables para estas situaciones permitiera seccionar en modelos particulares y, que de los cuales se fundamentaron a partir de suposiciones que permitiera relacionar m_1 , m_2 y $\text{sen } \theta$ como variables independientes y, t^2 como variable dependiente junto con los parámetros que se mantuvieron constantes.

Palabras clave: plano horizontal, plano inclinado, movimiento, coeficiente de rozamiento.

Abstract: On a horizontal or inclined plane, the motion of a body of mass m_1 , starting from rest and caused by another body of mass m_2 falling vertically through a pulley tied at its ends by a string, leads to the study of the indirect determination of the coefficient of kinetic friction, μ_k , between the surface of the plane and the body m_1 when the latter maintains a uniformly accelerated rectilinear motion. To this end, possible mathematical models were constructed according to a control of the variables, so that the general mathematical model of both planes, relating all the variables for these situations, could be divided into specific models. These models were based on assumptions that allowed relating m_1 , m_2 , and $\text{sen } \theta$ as independent variables and t^2 as the dependent variable, along with the parameters kept constant.

Keywords: horizontal plane, inclined plane, motion, coefficient of friction.

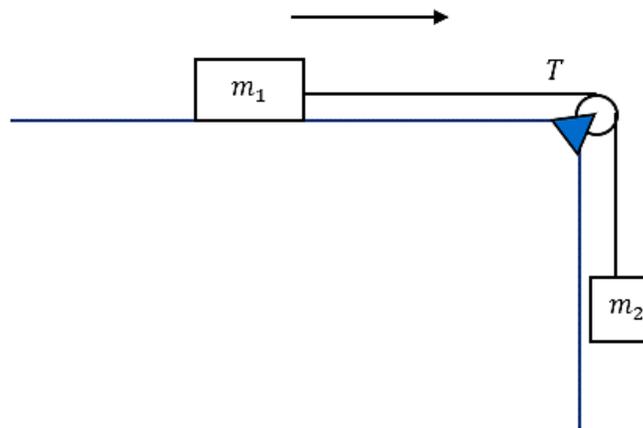
1. Introducción

En mecánica se examinan fuerzas, definida como “la medida de la interacción entre los cuerpos o entre las partículas de las que éstos constan” (Yavorski y Pinski, 1983, pág. 63), que surgen al haber contacto directo entre los cuerpos como la fuerza de rozamiento. Sin embargo, “toda fuerza tiene determinada dirección, con la particularidad de que la

acción de la fuerza depende no sólo de su magnitud, sino también de su dirección” (Yavorski y Pinski, 1983, pág. 66). Tal es el caso de la masa m_1 que mantiene contacto con la superficie del plano cuando esta se mueve bajo la acción en caída de la masa m_2 (figura 1 y 3), por lo que la fuerza de rozamiento está dirigida, con mayor frecuencia, en sentido opuesto al vector velocidad (figura 2 b).

Figura 1

Plano horizontal. Movimiento de masas variando m_1 o m_2 de acuerdo al control a través de una polea sin fricción.

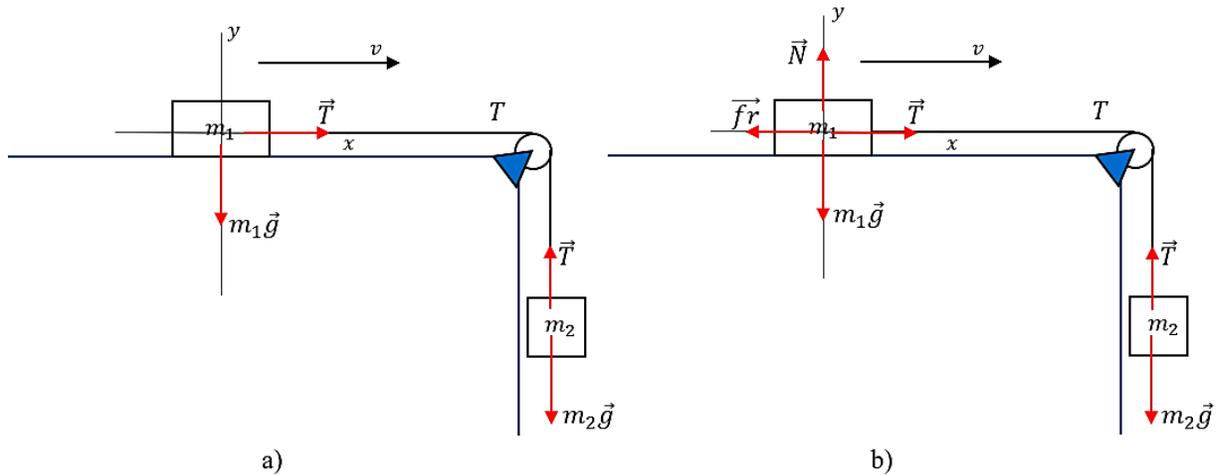


El estudio se basa en determinar de forma indirecta el coeficiente de rozamiento cinético variando m_1 , m_2 y $\sin \theta$, respectivamente en tres tipos de controles donde la protagonista como variable dependiente para cada control es el tiempo. Además, se puede señalar suposiciones evidentes y no tan evidentes como: **i)** el cuerpo de masa m_1 está unido con la masa m_2 por medio de un cordel del algodón inextensible y de masa despreciable; **ii)** ambas masas (tablas de madera) no varían su magnitud si algunas de ellas se estilla al caer al suelo; **iii)** la masa m_1 parte del reposo colocado justo antes que el sensor lo detecte; **iv)** la relación de desigualdad para las masas se mantiene de acuerdo al control de variables, esto es, $m_1 < m_2$; **v)** tanto m_1 como m_2 varían según el tipo de control, pero permanecen constantes cuando se varía ángulos; **vi)** el movimiento acelerado del sistema masa-polea se realiza en línea recta, es decir, por el carril del plano; **vii)** la estructura que soporta el sistema está fijado a la mesa de trabajo; **viii)** la polea permanece fija, se desprecia su masa y la fricción que se genere con el cordel.

Con lo anterior, “para confeccionar la ecuación de movimiento es preciso, ante todo, establecer qué fuerzas actúan sobre el cuerpo. Con ello, hay que aclarar el efecto de qué fuerzas sobre el cuerpo dado hay que tomar en consideración” (Savéliev, 1984, pág. 77).

Figura 2

Movimiento de m_1 sobre el plano horizontal. Fuerzas que actúan sobre los cuerpos de masa m_1 y m_2 considerando que en el movimiento: a) no hay fricción en el sistema; b) existe fricción en el sistema.



Por ejemplo, para el movimiento de m_1 sobre el plano horizontal (figura 2) la fuerza $m_1\vec{g}$ no participa en la ecuación de movimiento cuando no hay fricción en el sistema (figura 2 a), en cambio, sí participa cuando existe fricción \vec{f}_r puesto que éste es proporcional a la fuerza normal \vec{N} (figura 2 b), donde μ_k es el *coeficiente de rozamiento cinético* y “es independiente del valor del área superficial en contacto (...)” (Roller & Blum, 1986, p. 140). La tensión \vec{T} en la cuerda y en consecuencia, el efecto por parte de la Tierra sobre la masa m_2 (caracterizado por la fuerza $m_2\vec{g}$) produce una aceleración en el sistema masa-polea y por ende un cambio en la velocidad en magnitud y no en dirección.

Determinadas las fuerzas que actúan sobre los cuerpos, se construye la ecuación de la Segunda Ley de Newton. En el ejemplo, las ecuaciones respectivas para cada diagrama de la figura 2, tendrán el aspecto:

$$m_2g = (m_1 + m_2)a \quad (1)$$

y,

$$m_2g - \mu m_1g = (m_1 + m_2)a. \quad (2)$$

Ahora bien, considerando las condiciones iniciales del sistema, es decir, el cuerpo m_1 parte del reposo $v_0 = 0$ m/s por lo que

$$v = at \quad (3)$$

y, además se tiene una distancia fija, Δx , entre cada sensor (figura 4) que, al integrar la ecuación (3) con respecto del tiempo se tiene

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2. \quad (4)$$

Despejando a de la ecuación (4), luego sustituyendo en las ecuaciones (1) y (2) y, seguidamente despejando t^2 se obtiene

$$t^2 = \frac{2m_1\Delta x + 2m_2\Delta x}{m_2g} \quad (5)$$

y,

$$t^2 = \frac{2m_1\Delta x + 2m_2\Delta x}{m_2g - \mu m_1g} \quad (6)$$

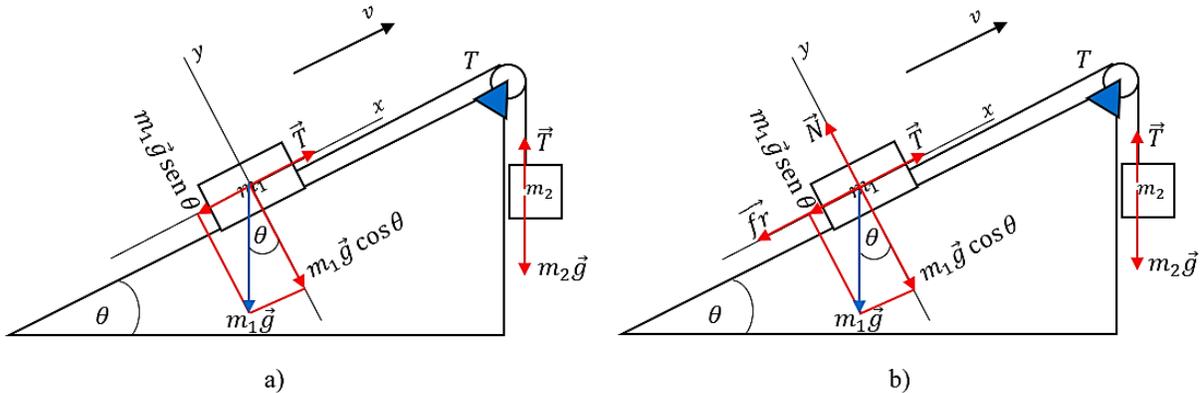
modelos matemáticos generales para el estudio del movimiento del cuerpo m_1 sobre el plano horizontal sin y con fricción, respectivamente. Suponer que no hay fricción en el sistema tanto horizontal como inclinado es completamente absurdo, puesto que “la fricción en el nivel microscópico es un fenómeno complicado en extremo, incluso bien pulida, está lejos de ser lisa” (Resnick, Halliday, y Krane, 2007, pág. 96; Savéliev, 1984, pág. 71). Las leyes de fuerza que gobiernan la fricción del deslizamiento en seco (se intenta provocar semejante deslizamiento) son empíricas y ofrecen predicciones aproximadas” (Resnick, Halliday y Krane, 2007, pág. 96; Savéliev, 1984, pág. 71).

Análogamente, un cuerpo m_1 está en “descanso” sobre un plano inclinado del cual se supone en dos situaciones que no hay fricción o que esté rugoso, cuya inclinación permanece constante (figura 3). Este cuerpo está atado a otro cuerpo m_2 por medio de una cuerda y, por consiguiente, su tensión \vec{T} hace que el cuerpo m_1 ascienda. Además, m_1 está sometido a fuerzas que se oponen al movimiento en dirección \vec{v} , de las cuales participa $m_1\vec{g} \sin \theta$, que es el componente de $m_1\vec{g}$, en el diagrama de la figura 3 a) y b); y, \vec{f}_r en la figura 3 b) de la cual es proporcional a la fuerza de reacción normal \vec{N} ejercida sobre la superficie y que se opone a la componente de $m_1\vec{g}$ perpendicular al plano, esto es, $N = m_1g \cos \theta$.

La fuerza de rozamiento \vec{f}_r y $m_1\vec{g} \text{ sen } \theta$ se opone a \vec{T} (figura 3 b), de aquí que $T = f_r + m_1g \text{ sen } \theta$. Conocidas las fuerzas que actúan sobre los cuerpos (figura 3), se confecciona

Figura 3

Movimiento de m_1 sobre el plano con inclinación θ . Fuerzas que actúan sobre los cuerpos de masa m_1 y m_2 considerando que en el movimiento: a) no hay fricción en el sistema; b) existe fricción en el sistema.



las ecuaciones respectivas de movimiento con la Segunda Ley de Newton y dichas expresiones quedan como sigue:

$$m_2g - m_1g \text{ sen } \theta = (m_1 + m_2)a \tag{7}$$

y,

$$m_2g - m_1g(\text{sen } \theta + \mu \text{ cos } \theta) = (m_1 + m_2)a. \tag{8}$$

De la misma forma, se despeja a de la ecuación (4), que luego sustituyendo en las ecuaciones (7) y (8) se obtiene, al despejar t^2 , los modelos matemáticos generales respectivos para el movimiento del cuerpo m_1 sobre el plano inclinado con un ángulo fijo suponiendo que hay o no fricción. En efecto,

$$t^2 = \frac{2m_1\Delta x + 2m_2\Delta x}{m_2g - m_1g \text{ sen } \theta} \tag{9}$$

y,

$$t^2 = \frac{2m_1\Delta x + 2m_2\Delta x}{m_2g - m_1g(\text{sen } \theta + \mu \text{ cos } \theta)} \tag{10}$$

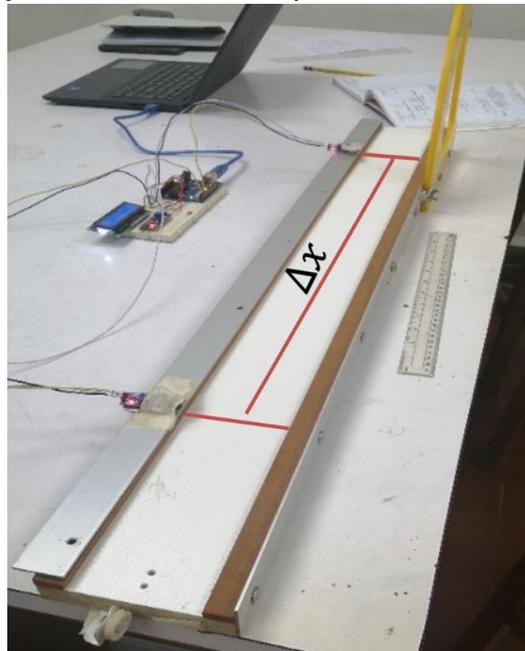
Por otra parte, al ir aumentando de modo constante el ángulo θ , el cuerpo m_1 le costará ascender sobre el plano inclinado puesto que la componente de $m_1\vec{g}$ perpendicular al movimiento aumenta a variar ángulos.

2. Materiales y métodos

Para el montaje experimental, se tiene un sistema construido por físicos de la Escuela de Física, del cual a partir de dos sensores separados cierta distancia, Δx , fija (figura 4) a lo largo del

Figura 4

Montaje experimental. Fijación de los sensores y la medición al respecto de la distancia Δx .



carril por donde recorrerá la masa m_1 y por ende medirán el tiempo que le toma en recorrer dicha distancia. Sin embargo, este tiempo experimental mantiene dispersiones al momento de realizar varias mediciones y para ello se registra en Excel, veinticinco tiempos para el plano horizontal (figura 2) y once para el plano inclinado (figura 3). Con lo anterior, dicho montaje está basado en los modelos matemáticos generales (5), (6), (9) y (10) para cada plano, respectivamente y, el control de variables que, en sí secciona a los modelos anteriores en modelos matemáticos particulares al mantener parámetros constantes y otras variables. En resumen, el control de variables se presenta como sigue en la tabla 1.

Tabla 1

Control de variables que se tendrán en cuenta para los distintos planos y sus respectivos modelos.

Plano	Control de variables	Variable dependiente	Variable independiente	Parámetros constantes
Horizontal	1.0	t^2	m_1	$m_2, g, \mu, \Delta x, \theta$
	1.1			$m_2, g, \Delta x, \theta$
	2.0	t^2	m_2	$m_1, g, \mu, \Delta x, \theta$
	2.1			$m_1, g, \Delta x, \theta$
Inclinado	3.0	t^2	$\text{sen } \theta$	$m_1, m_2, g, \mu, \Delta x$
	3.1			$m_1, m_2, g, \Delta x$

Nota. Los controles terminados en cero (0) corresponden sistemas con fricción.

Se ha mencionado en los apartados anteriores que, se considerará la no existencia de fricción (absurdo) y la existencia de fricción del cuerpo de masa m_1 sobre los planos horizontal e inclinado. Con ello, más los modelos matemáticos generales (5), (6), (9) y (10) y, el control de variables de la tabla 1 se seccionan otros modelos matemáticos particulares debido a la simplificación de términos al mantener parámetros constantes. Por ejemplo, si de la expresión (6) se mantiene independiente la variable m_2 y usando el control (2.0) (tabla 1) se tiene que, dividiendo entre $2m_1\Delta x$ a cada término, dicha expresión queda como

$$t^2 = \frac{1 + \left(\frac{1}{m_1}\right) m_2}{\left(\frac{g}{2m_1\Delta x}\right) m_2 - \frac{\mu g}{2\Delta x}} \quad (11)$$

o bien,

$$y = \frac{A + x}{Bx + C} \quad (12)$$

donde $y = t^2$ como variable dependiente y, A, B y C representan constantes producto de la simplificación masiva. De manera similar, si se toma nuevamente la expresión (6) y se divide cada término utilizando el control (2.1) se determina otro modelo matemático. Siguiendo esta misma idea para las demás expresiones y control de variables restantes se hayan los otros posibles modelos. En vista de lo anterior, se presenta en el cuadro 1, éste y demás modelos simplificados y ordenados de acuerdo a la tabla 1.

Cuadro 1.

Posibles modelos matemáticos producto de las simplificaciones masivas de los modelos generales.

Modelo matemático general (5)					Modelo matemático general (6)		
$t^2 = \frac{2m_1\Delta x + 2m_2\Delta x}{m_2g}$					$t^2 = \frac{2m_1\Delta x + 2m_2\Delta x}{m_2g - \mu m_1g}$		
Control	Divisor	Modelo	Var. Ind.	Var. dep.	Constantes		
					A	B	C
1.0	$2m_2\Delta x$	$\frac{x + A}{B + Cx}$	m_1	t^2	m_2	$\frac{gm_2}{2\Delta x}$	$-\frac{\mu g}{2\Delta x}$
1.1	$2m_2\Delta x$	$\frac{x + A}{B}$	m_1	t^2	m_2	$\frac{gm_2}{2\Delta x}$	-----
2.0	$2m_1\Delta x$	$\frac{A + x}{Bx + C}$	m_2	t^2	m_1	$\frac{g}{2\Delta x}$	$-\frac{\mu gm_1}{2\Delta x}$
2.1	$2m_1\Delta x$	$\frac{A + x}{Bx}$	m_2	t^2	m_1	$\frac{g}{2\Delta x}$	-----
Modelo matemático general (9)					Modelo matemático general (10)		
$t^2 = \frac{2m_1\Delta x + 2m_2\Delta x}{m_2g - m_1g \text{ sen } \theta}$					$t^2 = \frac{2m_1\Delta x + 2m_2\Delta x}{m_2g - m_1g(\text{sen } \theta + \mu \text{ cos } \theta)}$		
Control	Divisor	Modelo	Var. Ind.	Var. dep.	Constantes		
					A	B	C
1.0	$2m_2\Delta x$	$\frac{x + A}{B + Cx}$	m_1	t^2	m_2	$\frac{g}{2\Delta x}$	$-\frac{m_2g \text{ sen } \theta}{2\Delta x} \left(1 + \frac{\mu}{\tan \theta}\right)$
1.1	$2m_2\Delta x$	$\frac{x + A}{B + Cx}$	m_1	t^2	m_2	$\frac{g}{2\Delta x}$	$-\frac{m_2g \text{ sen } \theta}{2\Delta x}$
2.0	$2m_1\Delta x$	$\frac{A + x}{Bx + C}$	m_2	t^2	m_1	$\frac{m_1g}{2\Delta x}$	$-\frac{g \text{ sen } \theta}{2\Delta x} \left(1 + \frac{\mu}{\tan \theta}\right)$
2.1	$2m_1\Delta x$	$\frac{A + x}{Bx + C}$	m_2	t^2	m_1	$\frac{m_1g}{2\Delta x}$	$-\frac{g \text{ sen } \theta}{2\Delta x}$
2.0*	m_1g	$\frac{x + A}{Bx + C}$	m_2	t^2	m_1	$\frac{m_1g}{2\Delta x}$	$-\frac{g \text{ sen } \theta}{2\Delta x} \left(1 + \frac{\mu}{\tan \theta}\right)$
2.1*	m_1g	$\frac{x + A}{Bx + C}$	m_2	t^2	m_1	$\frac{m_1g}{2\Delta x}$	$-\frac{g \text{ sen } \theta}{2\Delta x}$
Control	Divisor	Modelo	Var. Ind.	Var. dep.	Constantes		
					A	B	
3.0	$2\Delta x(m_1 + m_2)$	$\frac{1}{A + Bx}$	$\text{sen } \theta$	t^2	$\frac{m_2g}{2\Delta x(m_1 + m_2)}$	$-\frac{m_1g}{2\Delta x(m_1 + m_2)} \left(1 + \frac{\mu}{\tan \theta}\right)$	
3.1	$2\Delta x(m_1 + m_2)$	$\frac{1}{A + Bx}$	$\text{sen } \theta$	t^2	$\frac{m_2g}{2\Delta x(m_1 + m_2)}$	$-\frac{m_1g}{2\Delta x(m_1 + m_2)}$	



Nota. (*) indican que el modelo es prácticamente el mismo que el control (2.0 y 2.1) salvo que ahora su divisor es $m_1 g$.

3. Resultados y análisis

Luego de realizado las mediciones donde se varía m_1 , m_2 y $\text{sen } \theta$ por separado, se presenta los resultados respectivos de cada uno de ellos en la tabla 2 para el tiempo al cuadrado como sigue. No sin antes describir las notaciones, en particular, de m_{1-0} y m_{2-3} las cuales se refieren respectivamente a la masa m_1 sin variar; y, la masa m_2 con variación al agregársele la tercera “guacha”. Todas estas han sido masadas diez veces debido a la dispersión al momento de medirlas.

Tabla 2.

Resultados de t^2 producto de la variación de las masas m_1 y m_2 y, $\text{sen } \theta$.

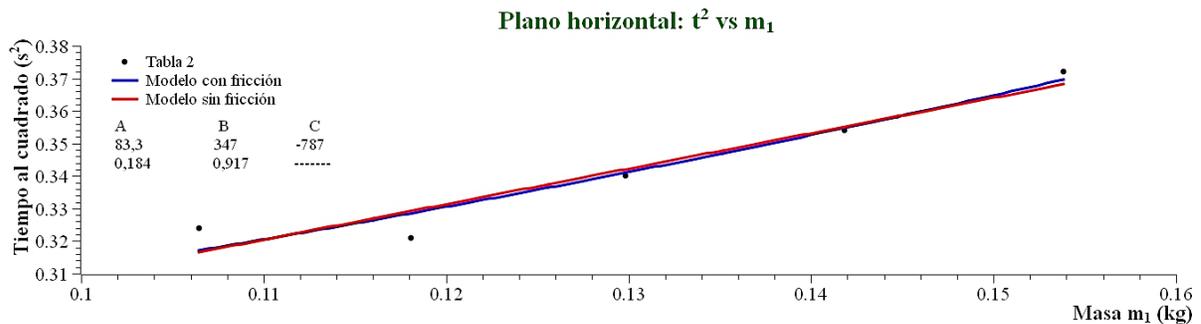
Plano	Variable	Masas y ángulos				
		m_{1-0}	m_{1-1}	m_{1-2}	m_{1-3}	m_{1-4}
Horizontal ($\Delta x =$ 0,653 0 m)	Independiente $m_1(\text{kg})$	0,106 48	0,118 07	0,129 81	0,141 84	0,153 84
	Dependiente $t^2(\text{s}^2)$	0,324	0,321	0,340	0,354	0,372
	Independiente $m_2(\text{kg})$	m_{2-0}	m_{2-1}	m_{2-2}	m_{2-3}	m_{2-4}
	Dependiente $t^2(\text{s}^2)$	0,132 16	0,144 24	0,154 96	0,167 06	0,179 04
Inclinado ($\theta = 30^\circ$)	Independiente $m_2(\text{kg})$	0,132 16	0,144 24	0,154 96	0,167 06	0,179 04
	Dependiente $t^2(\text{s}^2)$	0,273	0,254	0,247	0,231	0,220
Inclinado ($\Delta x =$ 0,669 5 m)	Independiente $\text{sen } \theta$	$\theta = 10^\circ$	$\theta = 20^\circ$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 40^\circ$	$\theta = 50^\circ$
	Dependiente $t^2(\text{s}^2)$	0,460	0,573	0,807	1,10	1,46

Nota. Debido a fallas en el sensor, se cambió el montaje experimental y por ende Δx también.

Ahora bien, se analiza los datos experimentales en el programa de SciDavis a partir de los modelos particulares del cuadro 1. Así, para el control de variable (1.0-1.1) (tabla 1), se ajusta la gráfica (figura 5) con sus respectivos modelos (1.0 y 1.1) (cuadro 1).

Figura 5

Plano horizontal: Gráfica t^2 vs m_1 . Los modelos con (azul) y sin fricción (rojo) para el cuerpo m_1 sobre plano horizontal se aproximan entre cada uno en el ajuste, pero sus constantes difieren.



De aquí, se obtiene los valores experimentales para las constantes A, B y C de las cuales se comparan con los valores teóricos mostrados en la tabla 3.

Tabla 3

Plano horizontal variando m_1 . Comparación de los valores teóricos con los valores experimentales

Modelo particular	Constante	Modelo con fricción	Modelo sin fricción	Valores exp. con fricción	Valores exp. sin fricción
$\frac{x + A}{B + Cx}$	A	0,132	0,132	83,3	0,184
$\frac{x + A}{B}$	B	0,993	0,993	347	0,917
	C	$-7,50 \mu_k$	-----	-787	-----

Los valores experimentales obtenidos luego del ajuste en el caso para el modelo con fricción llevan a valores superiores a los valores teóricos, donde $\mu_k = 105$, lo que está teóricamente fuera del rango entre $0 \leq \mu_k \leq 1$. Además, en el caso para el modelo sin fricción el porcentaje de error de la constante A está en 39,3% lo que afirma lo anterior dicho que, en cualquier contacto entre dos superficies sólidas por lo más que esté “pulida” o completamente lisa existirá la fuerza fricción en esa interacción.

Para el caso de control de variable (2.0-2.1) (tabla 2), se varía la masa m_2 correspondiente al plano horizontal de la cual se obtienen los valores de las constantes A, B y C (mostrados en la tabla 4) después de ajustar con los modelos (2.0-2.1) a la gráfica (figura 6) que se muestra a continuación.

Figura 6

Plano horizontal: Gráfica t^2 vs m_2 . El modelo con fricción donde el cuerpo m_2 es la variable independiente ajusta perfectamente a los datos suministrados. Sin embargo, el modelo sin fricción arroja valores por arriba de los cien mil.

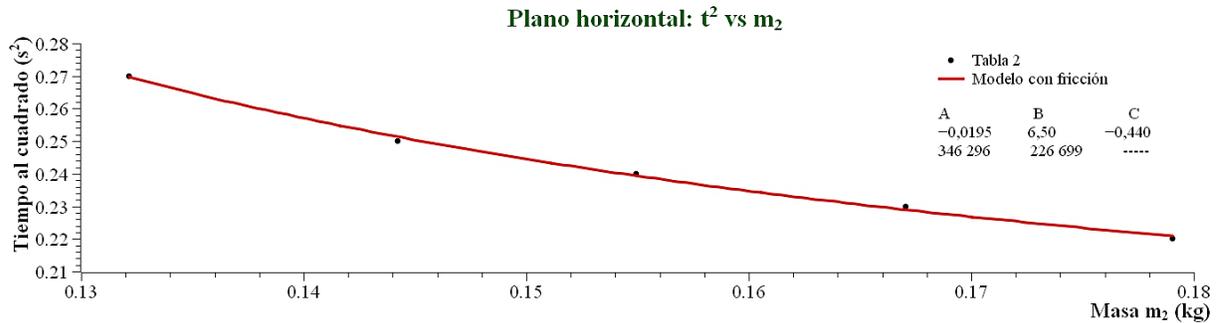


Tabla 4

Plano horizontal variando m_2 . Comparación de los valores teóricos con los valores experimentales.

Modelo particular	Constante	Modelo con fricción	Modelo sin fricción	Valores exp. con fricción	Valores exp. sin fricción
$\frac{A + x}{Bx + C}$	A	0,106	0,106	-0,0195	$3,46 \times 10^5$
$\frac{A + x}{Bx}$	B	7,51	7,51	6,50	$2,27 \times 10^5$
	C	$-0,800 \mu_k$	-----	-0,440	-----

A partir de la tabla 4, donde se ha variado la masa m_2 se afirma que el coeficiente de rozamiento cinético entre la masa m_1 y el plano horizontal es $\mu_k = 0,55$, valor experimental que está en el rango antes mencionado y, cuyo porcentaje de error experimental de la constante B es 13,4% afirmando nuevamente que no es posible despreciar la fuerza de fricción que existe entre el contacto del cuerpo de masa m_1 con la superficie del plano horizontal.

Después de realizado el estudio sobre el plano horizontal, ahora toca el turno de realizar la experiencia sobre un plano inclinado, primero manteniendo constante el ángulo de inclinación (tabla 2) y segundo, variando ángulos. Sin embargo, para el estudio de determinar el coeficiente de rozamiento entre m_1 y el plano inclinado, en este montaje no se varía dicha masa por la experiencia dada en el montaje y estudio anterior. En efecto, se varía la masa m_2 bajo el control de variables (2.0-2.1) y sus respectivos modelos

particulares. Por consiguiente, se presenta la gráfica (figura 7) y el ajuste del cual arroja los valores de las constantes A, B y C para cada modelo mostrado seguidamente en la tabla 5.

Figura 7

Plano inclinado: Gráfica t^2 vs m_2 . El ajuste del modelo con y sin fricción donde el cuerpo m_2 es la variable independiente coincide aproximadamente en ciertos puntos experimentales.

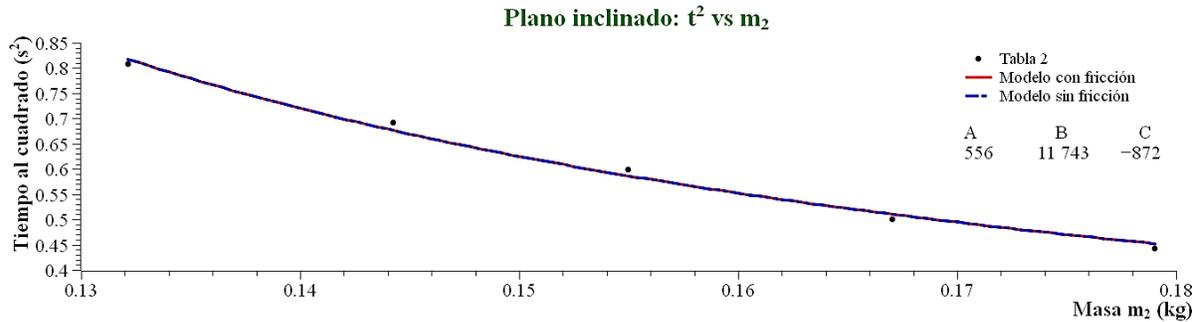


Tabla 5

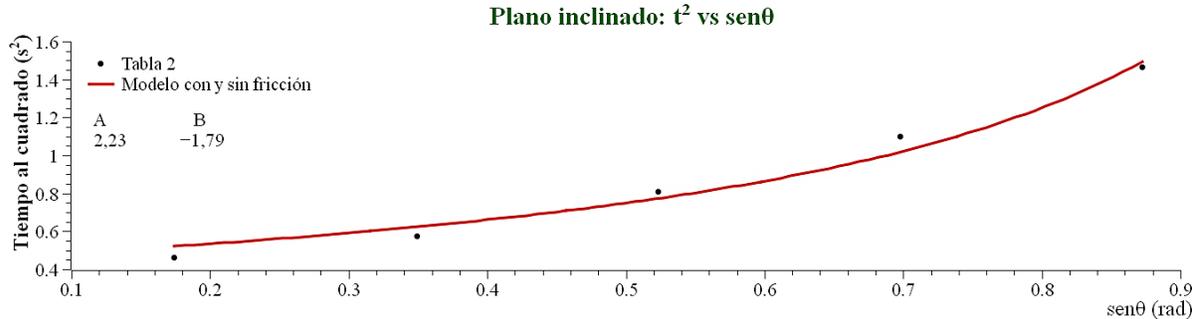
Plano inclinado variando m_2 . Comparación de los valores teóricos con los valores experimentales.

Modelo particular	Constante	Modelo con fricción	Modelo sin fricción	Valores exp. con fricción	Valores exp. sin fricción
$A + x$	A	0,106	0,106	556	556
$Bx + C$	B	0,780	0,780	$1,17 \times 10^4$	$1,17 \times 10^4$
$x + A$	C	$-3,66(1+1,73 \mu_k)$	-3,66	-872	-872

De acuerdo al ajuste, se compara los valores teóricos con los experimentales por lo que se tiene un error del 0,42% en los casos de la constante C para el modelo sin fricción, por lo que se considera prácticamente no existir fuerza de fricción durante el movimiento. Por tanto, el coeficiente de rozamiento supera el rango teórico, esto es, $\mu_k = 137$. Si bien, de acuerdo a Serway, et. al (2018), “el coeficiente de fricción cinética varía con la rapidez del objeto, de las cuales se ignoran (...) y, en especial cuando se trata de rapidez bajas, es probable que el movimiento se caracterice por episodios alternos de retención y deslizamiento” (pág. 109). Además, señala que el valor del coeficiente de madera sobre madera es $\mu_k = 0,2$ aproximadamente (Serway y Vuille, 2018, pág. 109).

Figura 8

Plano inclinado: Gráfica t^2 vs $\text{sen } \theta$. Ajuste aproximado de acuerdo al modelo recíprocal con y sin fricción de constantes A y B, variando ángulos.



Finalmente, es hora de variar el ángulo iniciando a partir de $\theta = 10^\circ$ hasta $\theta = 50^\circ$. El ajuste que aproxima a los datos experimentales de la tabla 2 es el modelo recíprocal del control de variable (3.0-3.1) y como variable independiente $\text{sen } \theta$. Dicho ajuste de la gráfica (figura 8) pronuncia valores para las constantes A y B de los modelos y, de las cuales se comparan como muestra la tabla 6.

Tabla 6

Plano inclinado variando $\text{sen } \theta$. Comparación de los valores teóricos con los valores experimentales.

Modelo particular	Constante	Modelo con fricción	Modelo sin fricción	Valores exp. con fricción	Valores exp. sin fricción
$\frac{1}{A + Bx}$	A	4,06	4,06	2,23	2,23
	B	$-3,27$ $(1 + 1,73 \mu_k)$	$-3,27$	$-1,79$	$-1,79$

A partir de la comparación de los datos para las constantes A y B el error experimental es del 45,1% para la constante A y 45,3% para la constante B afirmando nuevamente lo que se detalló en líneas anteriores. Así, el coeficiente de rozamiento cinético al variar ángulos es $\mu_k = 0,26$. Ahora bien, el análisis realizado para los distintos modelos particulares permite comparar los resultados de los coeficientes de rozamiento obtenidos en la tabla 7, del cual se descarta dos de ellos.

Tabla 7

Valores obtenidos del coeficiente de rozamiento cinético de acuerdo al control de variables.

Modelo particular	Variable independiente	Valor experimental de μ_k
$\frac{A+x}{Bx+C}$	m_2	0,55
$\frac{1}{A+Bx}$	$\text{sen } \theta$	0,26

4. Conclusiones

Un cuerpo m_1 está en “descanso” sobre un plano inclinado del cual se supone en dos situaciones que no hay fricción o que esté rugoso, cuya inclinación permanece constante. Este cuerpo está atado a otro cuerpo m_2 por medio de una cuerda y, por consiguiente, su tensión \vec{T} hace que el cuerpo m_1 ascienda. Además, m_1 está sometido a fuerzas que se oponen al movimiento en dirección \vec{v} , de las cuales participa $m_1 \vec{g} \text{sen } \theta$, que es el componente de $m_1 \vec{g}$.

Al soltar el segundo cuerpo para ambas inclinaciones, se han descartado dos valores de coeficientes por el hecho que el modelo no ajustó a las gráficas o que los datos experimentales no son lo suficientemente confiables por variaciones de temperatura u otro fenómeno, e incluso, se podría afirmar que estos valores corresponden al coeficiente estático máximo. Sin embargo, los restantes coeficientes de rozamiento de las cuales están en el rango permitido, antes mencionado, mantienen una dispersión del 14,5%.

Referencias Bibliográficas

- Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K. S. (2007). *Física 1*. (5ª ed., Vol. 1). México: Grupo Editorial Patria. <https://b-ok.lat/book/4997607/7d27e5?dsource=recommend>
- Roller, D. E. y Blum, R. (1986). *Física 1-1: Mecánica, Ondas y Termodinámica*. (1ª ed., Vols. 1-1). España: Editorial Reverté. <https://elibro.net/es/lc/upanama/titulos/105693>
- Savéliev, I. (1984). *Curso de Física general 1*. (1ª ed., Vol. 1). Moscú: Editorial Mir. <https://b-ok.lat/book/5009315/ea5ce9?dsource=recommend>
- Serway, R. A. y Vuille, C. (2018). *Fundamentos de Física*. (10ª ed.). México: Cengage Learning Editores. <https://b-ok.lat/book/5826722/bdb824>
- Yavorski, B. M. y Pinski, A. A. (1983). *Fundamentos de Física 1*. (1ª ed., Vol. 1). Moscú: Editorial Mir. <https://www.freelibros.me/fisica/fundamentos-de-fisica-i-b-m-yavorski>