

EVALUACIÓN DE PROPIEDADES DE MODELACIÓN NO LINEAL PARA EL AJUSTE DE CURVAS DE LACTANCIA EN CABRAS LECHERAS (*CAPRA HIRCUS*)

EVALUATION OF NON-LINEAR MODELLING PROPERTIES TO THE FITTING OF LACTATION CURVES IN DAIRY GOATS (*CAPRA HIRCUS*)

*Roberto Saavedra**. Consultor Independiente. Panamá. rrsaavedra@hotmail.com. <https://orcid.org/0000-0002-4531-6434>

Héctor Cedeño. Universidad de Panamá. Facultad de Ciencias Agropecuarias. Departamento de Zootecnia. Panamá. hector.cedenov@up.ac.pa. <https://orcid.org/0000-0001-8400-4276>

Joseph Grajales-Cedeño. Universidad de Panamá. Facultad de Ciencias Agropecuarias. Departamento de Zootecnia. Panamá. joseph.grajales@up.ac.pa. <https://orcid.org/0000-0002-1021-3945>

Enrique Sánchez-Galán. Universidad de Panamá. Facultad de Ciencias Agropecuarias. Departamento de Desarrollo Agropecuario. Panamá. enrique.sanchezg@up.ac.pa. <https://orcid.org/0000-0002-9452-8177>

Marilys Quintero. Universidad de Panamá. Facultad de Ciencias Agropecuarias. Departamento de Desarrollo Agropecuario. Panamá. marilys.quintero@up.ac.pa. <https://orcid.org/0000-0001-8660-9113>

Tamara Pimentel. Consultor Independiente. Panamá. tamaraan26@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0002-5861-2910>

Gabriel Remy. Consultor Independiente. Panamá. gabrielremyserrano@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0002-0906-5973>

*Correo de Correspondencia: rrsaavedra@hotmail.com

Recibido: 11/08/2022

Aceptado: 11/05/2023

RESUMEN. El objetivo del siguiente estudio fue evaluar el ajuste de cinco modelos no lineales para la estimación de parámetros productivos concernientes a la posición y forma de las curvas de lactancia en función de la raza y el número de partos en cabras. Se utilizó una base de datos de dos años consecutivos (2021-2022), con 1002 mediciones de pesajes de leche procedentes de 30 cabras, quince Saanen y quince Parda Alpina, las cuales se subdividen en cinco cabras en primera, segunda y tercera o más lactancia, respectivamente. Las curvas de lactancia fueron ajustadas óptimamente con $R^2 > 0,89$, destacando los modelos de Brody, Wood, Wilmink y Nelder con buenos ajustes en general. La raza y el número de partos influyó significativamente ($p < 0,05$) en las diferencias en parámetros productivos, mostrando que las cabras de la raza Saanen con 3 o más lactancias mostraron mayores valores de producción máxima diaria de leche ($3,10 \pm 0,13$ kg), producción acumulada de leche a los 220 días ($513,72 \pm 27,36$ kg) y producción promedio ($2,34 \pm 0,12$ kg/día), mientras que las cabras de la raza Parda Alpina tienen un menor tiempo de producción máxima diaria de leche, sin diferir entre partos ($p < 0,05$) en rangos entre 17 a 25 días. En conclusión, ajustar los modelos en función del número de partos y raza permiten obtener criterios de decisión en programas de selección y de manejo y en un sistema productivo de manera eficiente y sostenible.

PALABRAS CLAVE: curva de lactación, Saanen, Parda Alpina, primera derivada, asíntota.

ABSTRACT. The objective of this study was to evaluate the fitness of five nonlinear models to estimation of productive parameters related to shape and scale of lactation curves influenced by breed and parities in goats. A dataset of 1002 lactation records measured in two consecutive years (2021-2022) from 30 goats were used, which fifteen goats are Saanen and other fifteen goats are Brown Alpine, and in each breed studied, five goats are in first lactation, five goats are in second lactation and other five are in third or more lactations. Lactation curves fitted well with $R^2 > 0,89$, showing that Brody, Wood, Nelder and Wilmink had a good fit. Breed and parity influenced significantly ($p < 0,05$) in differences between productive parameters estimated, showing that Saanen goats with third or more lactations showed greater values of milk maximal yield (y_{max}) with $3,10 \pm 0,13$ kg, cumulative milk yield at 220 days (PL220) with $513,72 \pm 27,36$ kg and average daily yield (y_{prom}) with $2,34 \pm 0,12$ kg/day, than showed by Brown Alpine goats, while Brown Alpine goats had a lower milk maximal yield time than Saanen ones, in a range of 17 – 25 days without significantly differences ($p < 0,05$). In conclusion, adjusting the models based on the number of births and breed allow to obtain decision criteria in selection programs and management of the productive system in an efficient and sustainable way.

KEYWORDS: lactation curve, Saanen, Brown Alpine, first derivative, asymptote.

INTRODUCCIÓN

La producción lechera de caprinos es una fuente importante de alimento para consumo humano, dados sus niveles y energía disponible (Chacón, 2005; Bidot, 2017). Un proceso relacionado a la producción láctea en caprinos es el proceso fisiológico comprendido desde el momento del parto hasta el momento de destete, conocido como lactancia.

Una representación cuantitativa concerniente a este evento biológico es conocido como curva de lactancia, que describe la producción diaria de leche desde el momento del parto, la cual crece de forma ascendente hasta llegar a un punto de producción máxima, con un tiempo definido en un intervalo abierto de $(0, t_{max})$ días, donde luego la producción de leche empieza a descender de forma constante hasta el momento de secado. Por lo general, la curva de lactancia tiene una asimetría notable en el punto de producción máxima de leche, donde la etapa descendente toma la mayor parte del tiempo de la lactancia. Algunos parámetros de interés estimados con la curva de lactancia son relativos a puntos específicos dentro de esta curva, por ejemplo, el tiempo máximo del máximo de producción y la producción máxima de leche. También, concernientes a la forma de la curva, como lo son la producción de leche en un intervalo de tiempo y la persistencia.

Varios modelos cuantitativos han sido propuestos para modelar este evento biológico (González-Peña *et al.*, 2012), dentro de los cuales están los modelos lineales polinómicos, los cuales tienen como limitante que a medida que aumentan los valores de la variable predictora (tiempo), la tendencia de la variable de respuesta es influenciada por el coeficiente de la variable del grado superior de la función polinomial ajustada, lo cual muchas veces no es correspondiente al evento biológico estudiado por Nelder (1966), además que también hay riesgo de encontrar multicolinealidad dentro del modelo a medida que aumente el grado del polinomio ajustado, incidiendo que pudiese haber variables aleatorias correspondiente a uno de los coeficientes dentro de este modelo sea linealmente dependiente de otras variables aleatorias del mismo modelo, influyendo en malas estimaciones de los parámetros ajustados.

Por otra parte, hay muchas funciones de carácter no lineal utilizadas con este propósito. Una de ellas son los modelos gamma incompleto, propuesto por Wood (1967), versión de la forma general de la función general exponencial $(at^b e^{-(c+dt)t})$ cuando $d = 0$.

Otro modelo basado en el modelo gamma incompleto es el propuesto por Papacsik y Bodero (1988), una versión del modelo propuesto por Wood (1967) descrito cuando $b = 1$ y un modelo resultante de la diferencia de dos funciones exponenciales es el descrito por Brody *et al.* (1924). Otro modelo asociado al modelo exponencial, que combina términos de un modelo de regresión lineal con un término exponencial es la función propuesta por Wilmink (1987) y un modelo basado en el inverso de un polinomio de grado 2 es el propuesto por Nelder (1966), para de esa forma reproducir la asimetría común presentes en las curvas de lactancia.

El objetivo de este estudio fue evaluar el ajuste de distintos modelos no lineales a curvas de lactancias de acorde a factores de raza y número de partos, para así obtener parámetros de interés productivo, tomando en cuenta ciertas propiedades matemáticas de estos modelos.

MATERIALES Y MÉTODOS

Área del Estudio

Los datos evaluados fueron generados en una finca ubicada en la comunidad de Gonzalillo, corregimiento de Ernesto Córdoba Campos, distrito de Panamá, provincia de Panamá, localizada en las siguientes coordenadas: latitud de 9° 6' N y longitud de 79° 31' O.

Animales del Experimento

Para el análisis de las curvas de lactancias se utilizó una base de datos de dos años consecutivos (2021-2022), con aproximadamente 1 002 mediciones de pesajes de leche procedentes de 30 cabras adultas en total, entre dos a seis años de edad, 15 de la raza Saanen y 15 de la raza Parda Alpina. Los animales de ambas razas fueron divididos de acuerdo con la paridad, siendo conformados por cinco animales para cada categoría (primera, segunda y tres o más lactancias).

Todas las cabras fueron alimentadas con la misma dieta durante el periodo de lactancia de aproximadamente 220 días en un sistema estabulado, donde la alimentación fue basada en pasto de corte (*Cenchrus purpureum* cv. 22), y dos arbustos forrajeros (*Morus alba*) y (*Tithonia diversifolia*), heno de pasto Swazi (*Digitaria swazilandensis*), suplementación de concentrado y sales minerales, según sus requerimientos nutricionales. El periodo de ordeño inició a partir del octavo día postparto mediante ordeño manual; posteriormente se realizaron los pesajes de leche con el uso de una balanza digital Etekcitec (modelo EK6015) con capacidad de 5,0 kg.

Curvas de Lactancia

Para el ajuste de las curvas de lactancia se ajustan cinco diferentes modelos no lineales, definiendo el siguiente modelo estadístico: $y = f(t, \beta) + e$, donde y es la variable de respuesta (producción diaria de leche en kg/día), $f(t, \beta)$ se denomina la función media del modelo con variable aleatoria t correspondiente al tiempo definido en días y e es el error aleatorio, y donde y está distribuido de forma independiente e independiente (*iid*) normal con media $f(t, \beta)$ y varianza σ^2 ($y \sim N(f(t, \beta), \sigma^2)$), mientras que e están idénticamente e independientemente distribuido de manera normal de la forma $e \sim N(0, \sigma^2)$.

Los modelos no lineales evaluados son los modelos de Wood (1967), Brody *et al.* (1924), Wilmlink (1987), Papacsik y Bodero (1988) y Nelder (1966), donde ajusta cada modelo para cada subgrupo correspondiente de acuerdo con la raza, número de lactancias y cuyas formas algebraicas están enunciadas en la Tabla 1.

La estimación de los parámetros ($\hat{\beta}$) de cada modelo no lineal ajustado se hace mediante el método iterativo de Gauss – Newton con patrón de convergencia de $\text{tol} = 0.0001$. Para evaluar al modelo de mejor ajuste en cada subgrupo, se considera el Criterio de Información de Akaike (AIC), el Criterio de Información Bayesiano (BIC), donde estos criterios denotan que el modelo con menor valor dentro de los modelos evaluados es el de mejor ajuste. Como valor de bondad de ajuste, se considera el coeficiente de determinación (R^2).

Tabla 1. Modelos de regresión no lineal utilizados para ajustar las curvas de lactación en cabras lecheras.

Modelo	Función
WD (Wood, 1967)	$y = \beta_0 t^{\beta_1} \exp(-\beta_2 t) + e$
BR (Brody, 1924)	$y = \beta_0 [\exp(-\beta_1 t) - \exp(-\beta_2 t)] + e$
WT (Wilmlink, 1987)	$y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \exp(-0.05t) + e$
PB (Papajcsik y Boderó, 1988)	$y = \beta_0 t \exp(-\beta_2 t) + e$
ND (Nelder, 1966)	$y = \left[t / (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2) \right] + e$

Parámetros de Curvas de Lactancia

Se seleccionó el modelo con mejor ajuste a cada subgrupo evaluado y se estimaron los parámetros del modelo ($\hat{\beta} = [\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2]$) para cada cabra. Como parámetros de interés productivos en función del ajuste del modelo, se estimaron los parámetros concernientes a la producción máxima diaria de leche (y_{max}), al tiempo máximo de producción diaria de leche (t_{max}), producción de leche acumulada en 220 días (PL_{220}), producción promedio a los 220 días (y_{prom}) y la persistencia mediante el desvío estándar de la producción promedio entre los 70 y 220 días (Sölkner y Fuchs, 1987), en base a β estimadas con cada lactación y de acorde a las ecuaciones presentadas más adelante en esta sección.

Ahora bien, como manera de evaluar la propiedad de cada modelo de representar la tendencia de la producción de leche diaria con respecto al aumento de tiempo, donde se esperaría que tendiera a la nulidad con el pasar de los días, en especial cuando transcurren más allá de 220 días. Esto es posible mediante la evaluación de la presencia de asíntotas horizontal, definidas matemáticamente como $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = b$, donde en este caso es asumible que $b = 0$. Para ello, es de utilidad un teorema (Leithold 1994) con respecto a los límites al infinito (donde la variable predictor t tiende al infinito), expresado como:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^r} = 0 \quad \text{si } r \in \mathbb{R}^+ \text{ (} r \text{ número positivo)} \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^r} = +\infty \quad \text{si } r \in \mathbb{R}^- \text{ (} r \text{ num. negativo)} \quad [1,1]$$

Evaluando la presencia de asíntotas horizontales en el modelo de Brody *et al.* (1924) aplicando el límite con t tendiendo al infinito de la siguiente manera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_0 (\exp(-\beta_1 t) - \exp(-\beta_2 t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \beta_0 \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-\beta_1 t) - \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-\beta_2 t) \right) \quad [2,1]$$

Considerando [1,1] donde al ser $t > 0$, entonces β_1 y β_2 deben ser mayores a cero ($\beta_1, \beta_2 > 0$) para que $\beta_1 t$ y $\beta_2 t$ sean mayores a cero y por tanto se cumpla la propiedad asintótica descrita en [1,1] y $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_0 (\exp(-\beta_1 t) - \exp(-\beta_2 t)) = 0$

Para el modelo de Wood (1967), se evalúa la presencia de asíntotas horizontales de la siguiente manera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \beta_0 t^{\beta_1} \exp(-\beta_2 t) = \beta_0 \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\beta_1} \exp(-\beta_2 \lim t)$$

Se tiene que para el caso de $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\beta_1}$, el límite de la expresión cuando $\beta_1 < 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\beta_1} = 0$, de acorde al teorema propuesto en [1,1], mientras que por otro lado, si $\beta_1 > 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\beta_1} = \infty$, según [1,1]. En el caso del término $\exp(-\beta_2 \lim t)$, si $\beta_2 > 0$ se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-\beta_2 t) = 0$, dado que garantiza que el límite sea un valor igual a $1/\exp(\beta_2 t)$ y conociendo por [1,1], si $r \geq 0$, por lo que resultaría en $\lim_{t \rightarrow \infty} y = 0$. Asumiendo que $\beta_1, \beta_2 > 0$, según lo expuesto anteriormente se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \beta_0 \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\beta_1} \exp(-\beta_2 \lim t) = \beta_0 (0)(0) = 0 \quad [2,2]$$

Lo que demostraría que, a medida que aumentan los días de manera creciente, la curva de lactancia ajustada arrojará valores cercanos al cero, por lo que decimos que este modelo tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ kg.

Para el modelo de polinomios inversos de Nelder (1966), se evalúa la presencia de asíntota horizontal de la siguiente manera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} 1}{\lim_{t \rightarrow \infty} t \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta_0}{t^2} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta_1}{t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \beta_2 \right)} = \frac{1}{\infty(0+0+\beta_2)} = \frac{1}{\beta_2(\infty)} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad [2,3]$$

Por tanto, se demuestra una asíntota horizontal para cuando la producción de leche es $y = 0$ kg, a medida que la función media evaluada va adquiriendo valores de la variable aleatoria, en este caso días, de manera creciente, este va acercándose al valor de PL que esta función tiene como límite, y en este caso, es la asíntota horizontal definida anteriormente.

Para el modelo de Wilmlink (1987), se evalúa la presencia de asíntotas horizontales de la siguiente manera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \beta_0 + \beta_1 \lim_{t \rightarrow \infty} t + \beta_2 \exp(-0.05 \lim t)$$

Es visible que $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_0 = \beta_0$ y que $\exp(-0.05 \lim_{t \rightarrow \infty} t) = 0$, mientras que para $\beta_1 \lim_{t \rightarrow \infty} t$ deben evaluarse las siguientes situaciones: Si $\beta_1 \approx 0$, se tiene que $\beta_1 \lim_{t \rightarrow \infty} t \rightarrow 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \rightarrow \beta_0$, mientras que si $\beta_1 < 0$, entonces $\beta_1 \lim_{t \rightarrow \infty} t = -\infty$ y en algún punto en t cortará al eje independiente, de modo que $y = 0$ y por tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = -\infty$. De otro modo, si $\beta_1 > 0$, entonces $\beta_1 \lim_{t \rightarrow \infty} t = \infty$ y por tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$, lo cual indicaría que a medida que aumenten los valores en el tiempo t , aumentarán los valores en $f(t)$, de alguna forma evitando que $f(t) = 0$ en algún punto del tiempo de la curva, lo que es esperable dentro del proceso biológico con respecto a la lactación.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \beta_0 + \beta_1 \lim_{t \rightarrow \infty} t \quad [2,4]$$

Tiempo de Producción Máxima Diaria de Leche

Para conocer el tiempo de la producción máxima diaria de leche (t_{max}), se utilizó el criterio de la primera derivada de cada función ajustada, donde existe uno o varios valores t para donde la primera derivada de $f'(t)$ (primera derivada de la función f , definida como la tasa de cambio de la variable de respuesta a medida que cambia la variable predictora) tienen valor iguales a cero ($f'(t) = 0$), y donde los valores a la izquierda de $f'(t_{max})$ son mayores a cero ($f'(t_{max}) > 0$) y para los valores a la derecha de $f'(t_{max})$ son menores a cero ($f'(t_{max}) < 0$) se dice que existe un t_{max} donde existe un máximo relativo dentro del intervalo de tiempo evaluado que en este caso es la producción máxima diaria de leche (y_{max}).

Para el caso del modelo de Brody *et al.*, (1924), se determina el t_{max} de la siguiente manera:

$$f'(t) = \beta_0 (\beta_2 \exp(-\beta_2 t) - \beta_1 \exp(-\beta_1 t)) \quad [3,1]$$

Para obtener el t_{max} , se tomó como referencia en el criterio de la primera derivada, donde [3,1]

resulte en $f'(t) = 0$, donde $0 = \beta_0 (\beta_2 \exp(-\beta_2 t) - \beta_1 \exp(-\beta_1 t))$:

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\exp(-\beta_1 t)}{\exp(-\beta_2 t)} = \exp(\beta_2 t - \beta_1 t)$$

Aplicando logaritmos neperianos en ambos lados de la igualdad, se tiene la siguiente expresión con el tiempo máximo de producción:

$$t_{max} = \frac{\ln(\beta_2 / \beta_1)}{\beta_2 - \beta_1} \quad [3,2]$$

Para el modelo de Wood (1967), se determinó t_{max} de la siguiente manera:

$$f'(t) = \beta_0 \left(D_t(t^{\beta_1}) \exp(-\beta_2 t) + t^{\beta_1} D_t(\exp(-\beta_2 t)) \right) = \beta_0 t^{\beta_1} \exp(-\beta_2 t) (t^{-1} - \beta_2) \quad [3,3]$$

Para obtener el tiempo máximo de la producción de leche y el pico de producción, se utilizó en el criterio de la primera derivada, donde para un valor t la función dada en [3,3] resulte en $f'(t) = 0$, resultando en $\beta_0 t^{\beta_1} \exp(-\beta_2 t) (\beta_1 t^{-1} - \beta_2) = 0$

En esta función sólo es posible tener valores iguales al cero sólo si $t = 0$ y cuando $\beta_1 t^{-1} - \beta_2 = 0$, por lo que es evidente que para $t = \beta_1 / \beta_2$, la función dada en [3,3] toma un valor igual a cero, lo que indica que y tendrá como valor máximo cuando

$$t_{max} = \beta_1 / \beta_2 \quad [3,4]$$

Para la función de Wilmlink, se obtuvo t_{max} de la siguiente manera:

$$f'(t) = \beta_1 - (\beta_2 / 20) \exp(-0.05 t) \quad [3,5]$$

Para definir un valor crítico, se debe encontrar valores donde $f'(t) = 0$, por lo que tomando la expresión anterior, se tiene que $\beta_1 - (\beta_2 / 20) \exp(-0.05 t) = 0$

$$\beta_1 = \frac{\beta_2}{20} \exp(-0.05 t) \Rightarrow \frac{20\beta_1}{\beta_2} = \exp(-0.05 t)$$

Y aplicando la función logaritmo natural en ambos términos, se tiene que:

$$\ln(20\beta_1 / \beta_2) = \ln(\exp(-0.05 t)) \Rightarrow \ln(20\beta_1 / \beta_2) = -0.05 t$$

$$t_{max} = -20 \ln(20\beta_1 / \beta_2) \quad [3,6]$$

Para el modelo de polinomios inversos descrito por Nelder (1966), se determina t_{max} de la manera $f'(t) = \left[D_t(t) (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2) - t (D_t(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)) \right] / (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)^2$:

$$f'(t) = \frac{\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 - \beta_1 t - 2\beta_2 t^2}{(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)^2} = \frac{\beta_0 - \beta_2 t^2}{(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)^2} \quad [3,7]$$

Para obtener el tiempo máximo de la producción de leche y el pico de producción, se toma como referencia el criterio de la primera derivada, donde para un valor t la función dada en [3,7] resulte en $f'(t) = 0$

$$f'(t) \equiv 0 = \frac{\beta_0 - \beta_2 t^2}{(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t)^2} \Rightarrow t_{max} = \pm \sqrt{\beta_0 / \beta_2}$$

Como la variable predictora correspondiente al tiempo es una variable positiva mayor de cero, cuyos valores caen dentro de los números reales positivos (\mathbb{R}^+), en donde el tiempo máximo de producción de leche se define como:

$$t_{max} = \sqrt{\beta_0 / \beta_2} \quad [3,8]$$

Para cada lactación ajustada de acorde a su raza y números de lactaciones en cada animal, se estimó t_{max} utilizando las ecuaciones dadas en [3,2], [3,4], [3,6] y [3,8] con los parámetros resultados del ajuste de los modelos de cada animal, donde para cada animal se seleccionó el modelo con mejor ajuste en cada subgrupo evaluado anteriormente.

Producción Máxima Diaria de Leche

Para estimar el valor de la producción máxima diaria de leche (y_{max}) de una curva de lactancia ajustada, se determinó mediante el reemplazo del valor de tiempo de producción máxima diaria de leche en función del modelo ajustado. Para el modelo de Brody *et al.*, (1924), se define y_{max} al reemplazar el valor de t_{max} presente en [3,2] en la función descrita en la Tabla 1 para este modelo. Por tanto, se tiene que:

$$y_{max} = \beta_0 \exp\left(-\beta_1 \left(\frac{\ln(\beta_2 / \beta_1)}{\beta_2 - \beta_1}\right)\right) - \beta_0 \exp\left(-\beta_2 \left(\frac{\ln(\beta_2 / \beta_1)}{\beta_2 - \beta_1}\right)\right) \quad [4,1]$$

Para el modelo de Wood (1967), se obtiene y_{max} al reemplazar t_{max} dado en [3,4] en la función media de este modelo descrito en la Tabla 1, por lo que se tiene:

$$y_{max} = \beta_0 (\beta_1 / \beta_2)^{\beta_1} \exp(-\beta_1) \quad [4,2]$$

Para el modelo de Wilmink, se obtiene y_{max} al reemplazar t_{max} dado en [3,6] en la función media de este modelo descrito en la Tabla 1, por lo que se tiene:

$$y_{max} = \beta_0 + \beta_1 (-20 \ln(20\beta_1 / \beta_2)) + \beta_2 \exp(-0.05(-20 \ln(20\beta_1 / \beta_2)))$$

$$y_{max} = \beta_0 + 20\beta_1 (1 - \ln(20\beta_1 / \beta_2)) \quad [4,3]$$

Para el modelo de Nelder (1966), se obtiene y_{max} al reemplazar t_{max} dado en [3,8] en la función media de este modelo descrito en la Tabla 1, descrita como:

$$y_{max} = \frac{\sqrt{\beta_0/\beta_2}}{\beta_0 + \beta_1(\sqrt{\beta_0/\beta_2}) + \beta_2(\sqrt{\beta_0/\beta_2})^2} = \frac{(\sqrt{\beta_0/\beta_2})}{(\sqrt{\beta_0/\beta_2})(2\beta_0\sqrt{\beta_2/\beta_0} + \beta_1)} = \frac{1}{2\sqrt{\beta_0\beta_2} + \beta_1} \quad [4,4]$$

Para cada lactación, se estima y_{max} en función a $\hat{\beta}$ estimados en cada lactación, donde el modelo utilizado en cada lactancia fue el de mejor ajuste en cada subgrupo. Luego, se reemplaza $\hat{\beta}$ en [4,1], [4,2], [4,3] y [4,4] según sea el caso al subgrupo de cada raza y número de lactaciones en el que se encuentre el animal.

Producción de Leche Acumulada en 220 días

La producción acumulada de leche en el intervalo de tiempo (0, 220) definido en días (PL_{220}), se obtuvo a través de la integración definida de las funciones descritas en la Tabla 1, donde se define matemáticamente como:

$$PL_{220} = \int_{t_0}^{t_f} f(t) dt$$

Para el modelo de Brody *et al.*, (1924), se obtiene PL_{220} de la siguiente manera:

$$PL = \beta_0 \left[\int_{t_0}^{t_f} \exp(-\beta_1 t) dt - \int_{t_0}^{t_f} \exp(-\beta_2 t) dt \right]$$

Aplicando el método de sustitución, se define $u = -\beta_1 t$ y $v = -\beta_2 t$, y derivando estos términos se tiene las siguientes expresiones: $du = -\beta_1 dt$ y $dv = -\beta_2 dt$, y reemplazando estos términos en la expresión anterior, se tiene que:

$$PL = \beta_0 \left[\frac{1}{\beta_2} \int_{t_0}^{t_f} \exp(v)(dv) - \frac{1}{\beta_1} \int_{t_0}^{t_f} \exp(u) du \right] = \beta_0 \left[\frac{1}{\beta_2} \exp(-\beta_2 t)_{t_0}^{t_f} - \frac{1}{\beta_1} \exp(-\beta_1 t)_{t_0}^{t_f} \right] + C$$

$$\text{Para } C=0: \quad PL = \beta_0 \left[\frac{1}{\beta_2} (\exp(-\beta_2 t_f) - \exp(-\beta_2 t_0)) - \frac{1}{\beta_1} (\exp(-\beta_1 t_f) - \exp(-\beta_1 t_0)) \right] \quad [5,1]$$

Para el modelo de Wood (1967), se determina PL_{220} de la siguiente manera:

$$PL = \int_{t_0}^{t_f} \beta_0 t^{\beta_1} \exp(-\beta_2 t) dt$$

Por método de sustitución, se reparametriza $u = \beta_2 t$ dentro de la función y derivando este término se tiene que $du = \beta_2 dt$, y se redefine la expresión:

$$PL = \beta_0 \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{u}{\beta_2} \right)^{\beta_1} \exp(-u) \left(\frac{du}{\beta_2} \right) = \frac{\beta_0}{(\beta_2)^{\beta_1+1}} \int_{t_0}^{t_f} (u)^{\beta_1} \exp(-u) du$$

Wood (1967) define la producción acumulada de manera asintótica, en el periodo comprendido entre $(0, \infty)$, por tanto, esta expresión puede ser redefinida como:

$$PL = \beta_0 \int_{t_0}^{t_f} (u / \beta_2)^{\beta_1} \exp(-u) (du / \beta_2) = \left[\beta_0 / (\beta_2)^{\beta_1+1} \right] \int_0^{\infty} (-\beta_2 t)^{\beta_1} \exp(-\beta_2 t) du \quad [5,2]$$

Esta integral impropia (aquellas cuyo al menos uno de sus extremos es un valor indefinido) se puede definir utilizando la función gamma, definida como $\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} t^{\beta-1} \exp(-t) dt \equiv (\beta-1)!$,

donde $(\beta-1)!$ es el producto factorial de $\beta-1$, y reemplazando este término en la expresión anterior, se tiene que $PL_{220} = (\beta_0 / (\beta_2)^{\beta_1+1}) \int_0^{\infty} (u)^{\beta_1} \exp(-u) = (\beta_0 / (\beta_2)^{\beta_1+1}) \Gamma(\beta_1+1)$

Para el modelo de Wilmlink (1987), se obtiene PL_{220} de la siguiente manera:

$$PL = \int_{t_0}^{t_f} (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \exp(-0.05 t)) dt = \beta_0 t \Big|_{t_0}^{t_f} + \frac{\beta_1}{2} t^2 \Big|_{t_0}^{t_f} - 20 \beta_2 \exp(-0.05 t) \Big|_{t_0}^{t_f} + C$$

Donde $C = 0$, se tiene que:

$$PL = \beta_0 (t_f - t_0) + \frac{\beta_1}{2} (t_f^2 - t_0^2) - 20 \beta_2 (\exp(-0.05 t_f) - \exp(-0.05 t_0)) \quad [5,3]$$

Para el modelo de Nelder (1966), al ser un polinomio inverso de grado 2 con parámetros desconocidos y muy probable de ser números irracionales, es poco viable definir una función correspondiente a su integral definida, por lo que se define PL_{220} de la siguiente manera:

$$PL = \int_{t_0}^{t_f} \frac{t}{\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2} dt \quad [5,4]$$

Los valores presentes en [5,1] y [5,3] se calculan por el reemplazo directo de los parámetros estimados de cada modelo por el método de Gauss – Newton, mientras que los valores de [5,2] y [5,4] se determina mediante aproximación numérica definida por la regla de Simpson

(Press *et al.* 1992), definida como $\int_{t_0}^{t_f} f(t) dt \approx ((t_f - t_0) / 6) \left[f(t_0) + 4f((t_f + t_0) / 2) + f(t_f) \right]$

Donde $f(t)$ son las funciones medias de los modelos de Wood (1967) y de Nelder (1966) descritos en la Tabla 1. Luego de esto, se calcula PL_{220} para cada animal con los parámetros $\hat{\beta}$ estimados en cada lactación producto del modelo utilizado de mejor ajuste para cada subgrupo evaluado de acorde a su raza y número de lactancia.

Producción Promedio y Persistencia

Para la Producción Promedio por animal, se calcula para cada animal de la siguiente manera:

$$y_{prom} = \frac{\int_{t_0}^{t_f} f(t) dt}{t_f - t_0} = \frac{\int_0^{220} f(t) dt}{220}$$

Donde $f(t)$ es la función media de mejor ajuste en cada subgrupo de raza y número de lactancias en cada animal. Mientras que la persistencia se relaciona con la forma matemática de la curva de lactancia ajustada, sin embargo, hay cierta ambigüedad para definir la persistencia, por lo cual se han dado varias definiciones de la misma (Gengler, 1996), una de las cuales es relacionada a la caída de la producción con respecto a la producción máxima de la curva de lactación, mientras otras definiciones corresponden a la habilidad de la vaca de mantener un ritmo de producción en toda su lactancia, asociada a la uniformidad de la curva de lactancia en todas sus fases (Grossman *et al.*, 1999).

Expresiones para la determinación de persistencia en función del grado de uniformidad de la producción de leche es mediante los cocientes de valores asociados a la producción en diferentes intervalos de tiempo, así como cocientes de valores promedios de producción en un intervalo de tiempo con respecto a y_{max} , y finalmente, mediante la estimación del desvío estándar (SD) de las producciones diarias de leche dentro de $t_0 < t < t_f$ con respecto del promedio de esas producciones diarias observadas, siendo una medida del grado de la pendiente de la curva ajustada según una expresión dada por Sölkner y Fuchs (1987), dada mediante la forma:

$$Pers \equiv SD = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right) / n} \quad [6]$$

Donde en este estudio, se estima la persistencia para el intervalo de tiempo, $70 < t < 220$ días, para conocer el grado de persistencia en la fase descendente de la curva. Cabe destacar, que a medida que los valores de la expresión [6] disminuyan, se considera que la persistencia en una curva de lactación aumenta. Por otro lado, para expresar el grado de decaimiento en la curva de lactancia durante la fase descendente, se conoce que la primera derivada de una función es correspondiente a la tasa de cambio de la variable de respuesta con respecto al cambio producido en la variable predictor, expresada como:

$$\bar{y}' \equiv \frac{dy}{dt} \approx \frac{\int_a^b f'(t) dt}{b-a} = \frac{f(t) \Big|_b^a}{b-a} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad [7]$$

Donde el numerador es correspondiente a la suma de los valores debajo de la curva de lactancia en el intervalo $a < t < b$, y la función $f'(t)$ correspondiente a cada modelo evaluado están dadas por las expresiones dadas en [3,1], [3,3], [3,5] y [3,7].

ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Para las variables de respuestas y_{max} , t_{max} , PL_{220} , y_{prom} y persistencia, se midieron las diferencias entre medias mediante un modelo lineal factorial 2x3 de efectos fijos (dos razas y tres categorías de cabras según lactancias) de la forma:

$$z_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + (\alpha\gamma)_{ij} + e_{ijk}$$

Donde z_{ijk} representa a las variables de respuestas enunciadas anteriormente en la i -ésima raza, la j -ésima lactancia y la k -ésima repetición, μ es la media general, α_i es el efecto de la i -ésima raza, γ_j es el efecto de la j -ésima lactancia, $(\alpha\gamma)_{ij}$ es el efecto de la interacción entre la i -ésima raza, y la j -ésima lactancia y e_{ijk} es el efecto aleatorio de la i -ésima raza, la j -ésima lactancia y la k -ésima repetición.

Para verificar el supuesto de normalidad se utilizó la prueba de Shapiro – Wilk, mientras para la verificación de la homocedasticidad se empleó la prueba de Levene. Diferencias significativas entre medias se evaluaron mediante la prueba de comparaciones múltiples de Tukey. Todos los análisis estadísticos y estimaciones escritas anteriormente, así como los resultados detallados en tablas y gráficos se realizaron en el lenguaje de programación R (R Core Team, 2018).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Curvas de Lactancia por Subgrupos

Luego de ajustar los modelos no lineales descritos en la Tabla 1, se encuentra que dentro de la raza Saanen, de acorde al índice de AIC y BIC descritos en la Tabla 2, el modelo de Wilmink (1987) mostró mejor ajuste dentro de las cabras en la 1° lactancia y en las que estaban en la 3° o más lactancias, mientras que el modelo de Wood (1967) mostró el mejor ajuste dentro de las cabras en la 2° lactancia. En la raza Parda Alpina el modelo de Nelder mostró mejor ajuste dentro de las cabras en la 1° lactación, el modelo de Brody *et al.*, (1924) mostró el mejor ajuste en las cabras dentro de la 2° lactación y el modelo de Wilmink mostró el mejor ajuste en las cabras con 3 o más lactaciones. Para los todos los modelos de mejor ajuste y mencionados anterior, la prueba de Shapiro - Wilk comprueba el supuesto de normalidad de los residuales (e) de cada modelo ($p > 0,05$), mientras que la prueba de Levene mostró que hay igualdad de varianzas dentro de cada modelo ($p > 0,05$). En general, dentro de todos los subgrupos, los modelos de Brody *et al.*, (1924), Nelder (1966), Wilmink (1987) y Wood (1967) mostraron buena bondad de ajuste, al reflejar valores de $R^2 > 0,75$, de manera similar a valores reportados por Guimarães *et al.* (2006), de cabras Saanen, Parda Alpina y cruces entre ambas razas. A su vez los modelos ajustados de Wood, Nelder y Brody mostraron un ajuste razonable dentro del conjunto de modelos ajustados en dicho experimento, y están en sintonía con el estudio de Marín *et al.*, (2009) quienes demostraron que en cabras lactantes de raza Saanen, Alpina francesa, Alpina británica, Toggenburg y cabras mestizas, los modelos de Wood, Brody y Wilmink mostraron un $R^2 > 0,95$ en cabras de 1°, 2° y 3 o más lactancia.

Por otra parte, el modelo de Papajcsik y Bodero no mostró un razonable ajuste en comparación con los otros modelos evaluados, dado que su $R^2 < 0,75$ en los 6 subgrupos evaluados y su σ^2 es mayor que la obtenida en el resto de los modelos evaluados, resultado similar al reportado por Guimarães *et al.*, (2006), donde muestra que este modelo es el de menor R^2 entre los modelos evaluados, debido a que los datos evaluados no se ajustan al fuerte supuesto del parámetro fijo β_1 establecido por el modelo de Papajcsik y Bodero, que es una variante del modelo propuesto por Wood (1967) cuando $\beta_1 = 1$, similar a lo reportado por Montaldo *et al.*, (1997), donde para un conjunto de datos de cabras con cruces de raza Saanen, Parda Alpina y Toggenburg, con curvas de lactancia ajustadas mediante el modelo de Wood, los valores estimados para β_1 eran menores a 0,8.

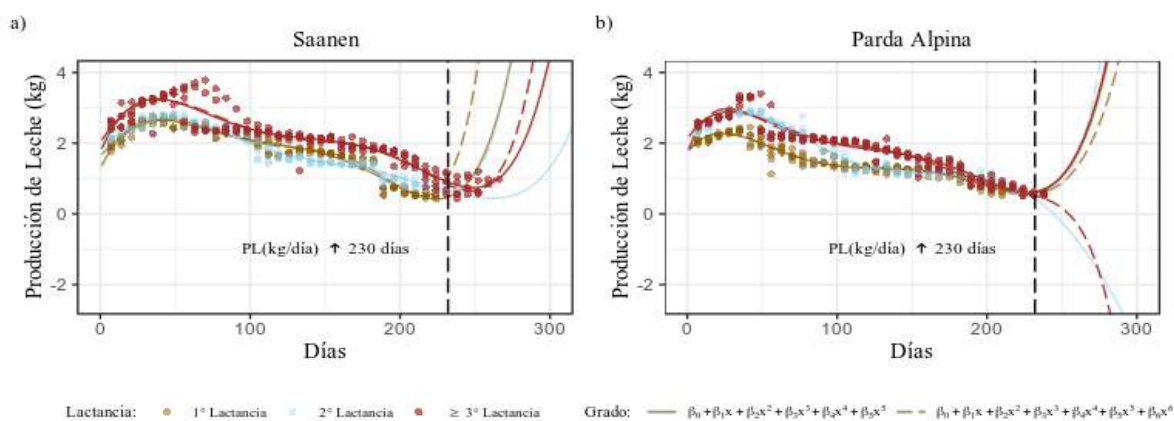


Figura 1. Modelos polinómicos de Grado 5 (línea sólida) y Grado 6 (línea cortada) por número de lactancia dentro de las razas Saanen (a) y Parda Alpina (b).

Cabe destacar que para cada subgrupo se ajustaron modelos polinómicos de grado 5 y 6 ($y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i t^i + e$ donde $n = 5$ y 6 respectivamente), mostraron buen ajuste dentro de cada subgrupo ($R^2 > 0,95$) pero no obstante, como lo sugiere la Figura 1, estas curvas ajustadas dentro de la raza Saanen y en la raza Parda Alpina (salvo en las cabras de 2° lactancia con el polinomio de grado 5 y las cabras de ≥ 3 con el polinomio de grado 6), la producción de leche en kg/día tiende a aumentar después de los 230 días a valores no corresponden al proceso biológico de lactancia, puesto que a estos días, la producción debería disminuir gradualmente hasta acercarse a la nulidad en caso de no haber un secado inducido de la cabra lactante.

Esto es a causa de que en estos modelos, los parámetros del grado superior (β_5 y β_6) tienden a ser mayores a cero ($\beta_5, \beta_6 > 0$), por lo que $\lim_{t \rightarrow \infty} y = +\infty$ en ambas funciones, por lo que a medida que aumenta el tiempo, y aumenta, y por tanto no tiene asíntotas horizontales como las mostradas en [2,1], [2,2], [2,3] y [2,4] para los modelos evaluados que mostraron un buen ajuste en al menos un subgrupo del presente estudio. Los parámetros estimados de los modelos con mejor ajuste en cada subgrupo de acorde a lo mostrado en la Tabla 2 están detallados en la Tabla 3 y las curvas de lactancia producto del ajuste de cada modelo para cada subgrupo según estos parámetros, están descritas en la Figura 2.

Tabla 2. Criterios de comparación entre modelos (AIC y BIC), números de iteraciones para convergencia, R^2 y σ^2 para los modelos ajustados según raza y números de lactancia.

Número de Lactancias	Modelo	N° Iter.	Saanen				Parda Alpina				
			R^2	σ^2	AIC	BIC	N° Iter.	R^2	σ^2	AIC	BIC
1	BR	10	0,84	0,27	41,63	53,93	7	0,95	0,16	-115,37	-103,19
	ND	10	0,79	0,31	89,28	101,59	6	0,95	0,16	-118,06	-105,88
	PB	8	0,74	0,35	122,64	131,86	13	0,55	0,47	210,91	220,04
	WD	9	0,89	0,22	-18,40	-6,08	6	0,94	0,17	-108,37	-96,19
	WT	2	0,92	0,19	-73,12	-60,82	1	0,94	0,18	-93,93	-81,75
2	BR	12	0,92	0,19	-68,49	-55,95	8	0,91	0,21	-40,99	-28,59
	ND	10	0,89	0,23	-7,18	5,36	10	0,90	0,22	-24,38	-11,98
	PB	10	0,72	0,37	145,29	154,70	12	0,63	0,43	192,31	201,61
	WD	6	0,95	0,16	-141,36	-128,8	7	0,91	0,21	-37,35	-24,95
	WT	2	0,94	0,17	-115,29	-103,1	1	0,86	0,27	37,38	49,78
≥ 3	BR	11	0,80	0,36	144,17	157,00	15	0,91	0,26	23,43	35,98
	ND	9	0,78	0,38	166,29	179,13	8	0,88	0,29	67,09	79,63
	PB	9	0,52	0,55	306,13	315,76	10	0,65	0,49	245,72	255,13
	WD	6	0,83	0,33	115,85	128,69	6	0,92	0,24	-4,27	8,27
	WT	1	0,84	0,32	103,52	116,35	1	0,93	0,23	-19,34	-6,79

BR = Brody *et al.*, (1924), ND = Nelder (1966), PB = Papajcsik y Bodero (1988), WD = Wood (1967), WT = Wilmink (1987). N°. Iter = número de iteraciones para convergencia. R^2 = coeficiente de determinación. σ^2 = varianza residual. AIC = Criterio de Información de Akaike, BIC = Criterio de Información Bayesiano. Valores en **negrita** muestran el mejor ajuste en cada subgrupo.

Tabla 3. Parámetros \pm desvíos estándares estimados de los modelos con mejor ajuste según raza y números de lactancias

	Saanen			Parda Alpina		
	1°	2°	$\geq 3^\circ$	1°	2°	$\geq 3^\circ$
	WT	WD	WT	ND	BR	WT
β_0	3,46 \pm 0,04*	1,07 \pm 0,06*	3,76 \pm 0,07*	1,20 \pm 0,17*	3,78 \pm 0,08*	3,27 \pm 0,05*
β_1	-0,01 \pm 3E-4*	0,36 \pm 0,02*	-0,01 \pm 4E-4*	0,30 \pm 0,01*	7E-3 \pm 1,9E-4*	-0,01 \pm 3E-4*
β_2	-2,17 \pm 0,11*	0,01 \pm 3E-4*	-1,63 \pm 0,20*	4E-3 \pm 1E-4*	0,12 \pm 5,2E-3*	-0,79 \pm 0,15*

WT = Wilmink (1987), WD = Wood (1967), ND = Nelder (1966), Brody *et al.*, (1924). * Parámetros con significancia ($p < 0,001$).

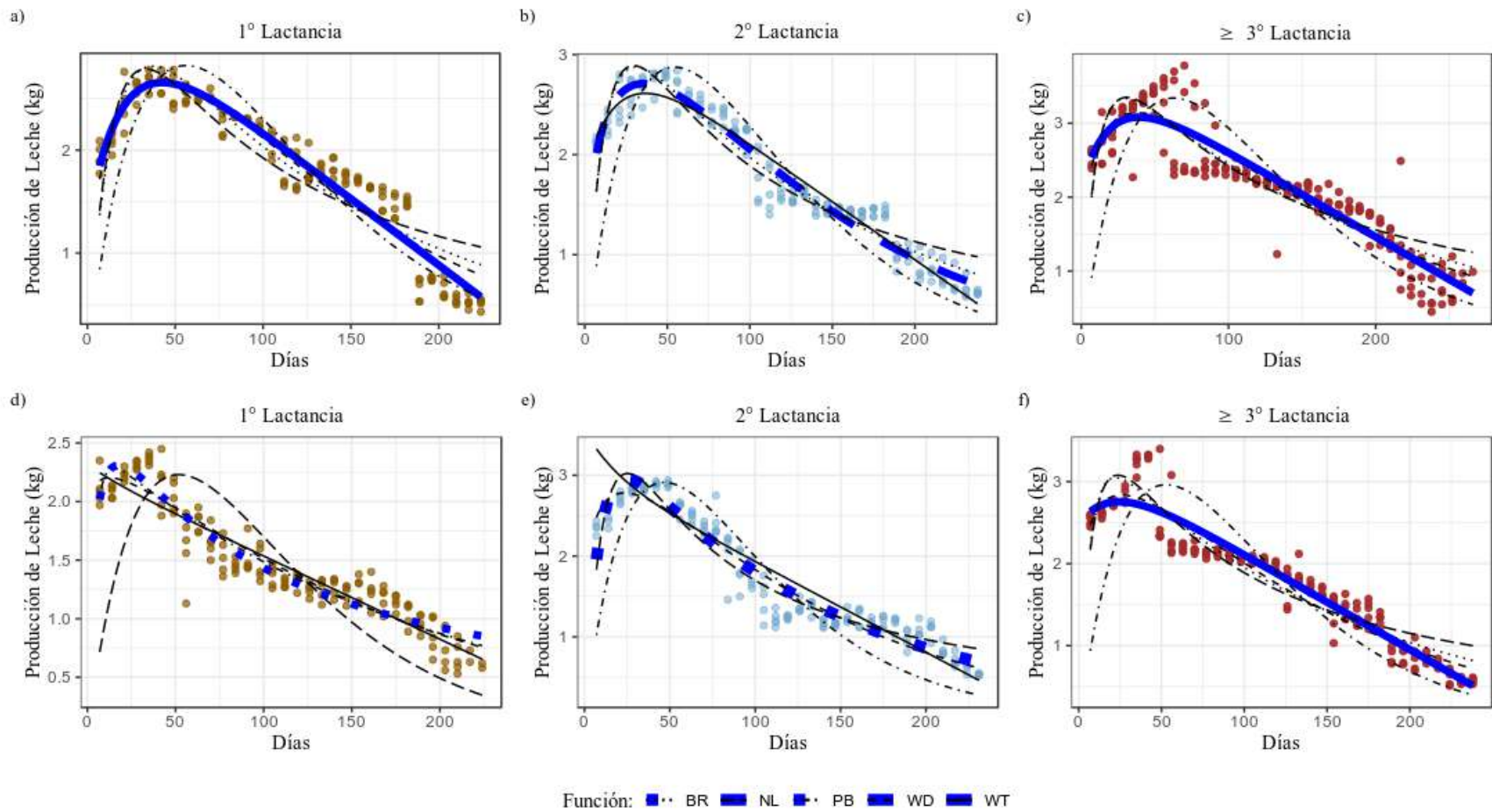


Figura 2. Comparación de los modelos ajustados de Brody (BR), Nelder (NL), Papajcsik y Bodero (PB), Wood (WD) y Wilmink (WT) a las curvas medias de producción de leche (kg/día) de las razas Saanen en 1° lactancia (a), 2° lactancia (b) y $\geq 3^{\circ}$ lactancia (c); y de Parda Alpina en 1° lactancia (d), 2° lactancia (e) y $\geq 3^{\circ}$ lactancia (f).

Esto es a causa que en los modelos de grado 5 y en el modelo 6, los parámetros del grado superior (β_5 y β_6) tienden a ser mayores a cero ($\beta_5, \beta_6 > 0$), por lo que $\lim_{t \rightarrow \infty} y = +\infty$ en ambas funciones, tendencia descrita por Nelder (1966), por lo que a medida que aumenta el tiempo, aumenta considerablemente y , y por tanto no tiene asíntotas horizontales como las mostradas en [2,1], [2,2], [2,3] y [2,4] para los modelos evaluados que mostraron un buen ajuste en al menos un subgrupo del presente estudio.

Cabe destacar, que para el modelo de Wilmink ajustado dentro de la raza Saanen para las cabras con una y tres o más lactancias, así como para las cabras de raza Parda Alpina con tres o más lactancias, $\beta_1 < 0$, por lo que según lo mostrado anteriormente en [2,4], $\lim_{t \rightarrow \infty} y = -\infty$ si $\beta_1 < 0$, resaltando que en estos modelos ajustados, la producción diaria de leche tiende a caer a valores de 0 kg/día cuando transcurren los días en el rango de 257-300 días.

Parámetros Productivos

Basado en los criterios de AIC y BIC reportados en la Tabla 2 y según las tendencias del comportamiento productivo de las razas y número de lactancias mostradas en la Figura 2, que agrupa las curvas de las funciones no lineales con mejor ajuste para cada conjunto de cabras agrupados según la raza y el número de lactancias para las cabras Saanen de primera, segunda y tercera lactancia, donde se escogieron los modelos de Wilmink (WT), Wood (WD) y Wilmink (WT) respectivamente, y para las cabras Parda Alpina de primera lactancia se seleccionó el modelo de Nelder (NL), para las cabras en segunda lactancia el modelo de Brody (BR) y para cabras de tercera lactancia el modelo de Wilmink (WT). Resultados similares fueron reportados por Martínez *et al.*, (2018) donde investigó el ajuste de diversos modelos no lineales para las curvas de lactancia en cabras Saanen manejadas en sistema semi-estabulado en Argentina, la cual señaló que no es posible sugerir un único modelo que explique las curvas en cabras lecheras según el número de parto, por lo tanto, es fundamental comparar el ajuste de varios modelos para seleccionar el o los modelos con mejor ajuste, para representar adecuadamente el proceso biológico de lactancia y por tanto, tener mejores referencias para conocer el rendimiento en cabras lecheras.

Se encontró que en las lactaciones dentro de la raza Saanen, se encuentran las mayores producciones máximas diarias (y_{max}), con valores de 2,66; 2,72 y 3,10 kg para las cabras en la 1°, 2° y 3 o más lactancias respectivamente, mientras que para la raza Parda Alpina se registran valores medios de y_{max} de 2,31; 2,95 y 2,76 kg para las cabras en 1°, 2° y 3° o más lactancias respectivamente.

De manera similar, se encontraron mayores valores medios para PL_{220} en la raza Saanen con valores medios de 405,86, 404,92 y 513,72 kg de leche para las cabras en la 1°, 2° y 3° o más lactancias

respectivamente, mientras que para las cabras de la raza Parda Alpina fue de 318,51, 377,24 y 422,77 kg de leche para las cabras en 1°, 2° y 3° o más lactancia, respectivamente. La producción promedio (y_{prom}) dentro de la raza Saanen, fueron de 1,84, 1,84 y 2,34 kg promedio respectivamente. Los valores medios estimados de la raza Saanen en este estudio son similares a los reportados por Steffen *et al.*, (2021), donde en condiciones templadas, la raza Saanen reportó valores medios de 571,77 kg para el conjunto de cabras Saanen en 3° lactancia, en un periodo de lactación de 240 días.

Es notable que, en estos tres parámetros productivos mencionados, las cabras de raza Saanen en la 3° o más lactancias mostraron significativamente los mayores valores medios dentro de los subgrupos evaluados ($p < 0,05$), al igual dentro de los subgrupos dentro de la raza Parda Alpina para PL_{220} y y_{prom} , donde se encuentran los mayores valores medios de estos parámetros para las cabras en la 3° o más lactancias. Además de lo antes descrito en la Tabla 5 los parámetros y_{max} y PL_{220} están altamente correlacionados ($r = 0,81$) indicando que este desempeño superior con respecto a los otros subgrupos con menor lactancias está explicado por un mayor desarrollo de las glándulas mamarias a medida que aumenta la edad de las cabras (Marín *et al.*, 2009; Frau *et al.*, 2010).

Tabla 4. Estimaciones medias de t_{max} , y_{max} , PL_{220} , y_{prom} , SD (Pers) y coeficiente de determinación (R^2) \pm desvíos estándares obtenidas por lactancia ajustada.

	Saanen			Parda Alpina		
	1°	2°	$\geq 3^\circ$	1°	2°	$\geq 3^\circ$
	WT	WD	WT	ND	BR	WT
R^2	0,93 \pm 0,02	0,96 \pm 0,01	0,89 \pm 0,02	0,90 \pm 0,03	0,92 \pm 0,03	0,92 \pm 0,01
t_{max}	42,29 \pm 3,21 ^a	35,90 \pm 3,78 ^a	38,18 \pm 7,23 ^a	17,85 \pm 1,91 ^b	24,93 \pm 2,12 ^b	24,17 \pm 3,3 ^b
y_{max}	2,66 \pm 0,03 ^c	2,72 \pm 0,06 ^c	3,10 \pm 0,13 ^a	2,31 \pm 0,07 ^d	2,95 \pm 0,05 ^b	2,76 \pm 0,06 ^c
PL_{220}	405,86 \pm 4,7	404,92 \pm 4,5	513,72 \pm 27,	318,51 \pm 3,6	377,24 \pm 5,5	422,77 \pm 9 ^b
o	9 ^b	9 ^b	4 ^a	3 ^d	4 ^c	
y_{prom}	1,84 \pm 0,02 ^b	1,84 \pm 0,02 ^b	2,34 \pm 0,12 ^a	1,45 \pm 0,02 ^d	1,71 \pm 0,03 ^c	1,92 \pm 0,04 ^b
Pers	0,61 \pm 0,01 ^b	0,54 \pm 0,02 ^c	0,66 \pm 0,04 ^a	0,27 \pm 0,01 ^e	0,49 \pm 0,02 ^d	0,59 \pm 0,02 ^b

WT = Wilmink (1987), WD = Wood (1967), ND = Nelder (1966), Brody *et al.*, (1924). R^2 = Coeficiente de determinación, t_{max} = Tiempo de Producción máxima diaria de leche, y_{max} = Producción máxima diaria de leche, PL_{220} = Producción de leche acumulada a los 220 días, y_{prom} = Producción de leche promedio, Pers = Persistencia. Medias en la misma fila con letras minúsculas iguales son equivalentes entre raza y números de partos ($p < 0,05$).

Con relación al tiempo de máxima de producción lechera (t_{max}), los resultados muestran que para las cabras de la raza Parda Alpina llegan a la producción máxima diaria de leche (y_{max}) en menor tiempo que las cabras de la raza Saanen ($p < 0,05$), donde las cabras de la raza Parda Alpina mostraron valores medios de t_{max} de 17,85; 24,93 y 24,17 días para las cabras de 1°, 2° y 3 o más lactancias respectivamente, mientras que las cabras de la raza Saanen mostraron valores medios entre 35 y 43 días similares a los reportados por Marín *et al.*, (2009), donde para un conjunto de cabras de diversas razas, entre ellas la Saanen, tuvieron valores medios del tiempo de producción diaria máxima en un rango entre 33 a 43 días. A su vez, los resultados descritos en la Tabla 5 sugieren una fuerte correlación entre las variables t_{max} y PL_{220} ($r = 0,63$), indicando que altos registros de PL_{220} se encuentran en lactancias donde y_{max} que se alcanzan en mayor cantidad de días.

Tabla 5. Tabla de correlaciones (ρ) entre variables entre variables entre y_{max} , t_{max} , PL_{220} y $Pers$.

	y_{max}	t_{max}	PL_{220}	$Pers$
y_{max}	1	0,42	0,81	0,77
t_{max}		1	0,63	0,74
PL_{220}			1	0,88
$Pers$	<i>sym.</i>			1

y_{max} = Producción máxima diaria de leche, t_{max} = Tiempo de producción máxima diaria de leche, PL_{220} = Producción de leche acumulada a los 220 días, $Pers$ = Persistencia (desvío estandar).

Además, se reportan valores medios de persistencia mayores ($p < 0,05$) en las cabras de la raza Parda Alpina con respecto a las cabras de la raza Saanen, donde además se encuentra que esta variable está fuertemente correlacionada con la variable PL_{220} ($r = 0,88$), sugiriendo que mayores producciones acumuladas de leche son esperables a medida que la producción láctea no baje abruptamente y se mantenga.

Se espera que a medida que aumenten el número de partos en cabras, la persistencia se reduzca (Gipson y Grossman, 1990), tendencia que se observan en las cabras de la raza Parda Alpina, donde basados en el criterio expuesto que a mayores valores para la ecuación [6], disminuye la persistencia en una lactancia, tenemos que los valores de las cabras en la 1° y 2° lactancia ($Pers = 0,27$ y $0,49$) mostraron ser más persistentes significativamente ($p < 0,05$) en este estudio, con respecto a las cabras de la raza Saanen ($0,61$; $0,54$ y $0,66$ para las cabras de en 1°, 2° y 3 o más lactancias respectivamente), mientras que dentro de cada raza, las cabras con 3 o más lactancias mostraron ser menos persistentes que las cabras en la 1° y 2° lactancia ($0,66$ y $0,59$ para las cabras de raza Saanen y Parda Alpina respectivamente).

Varios autores (Gibson y Grossmann, 1990; Gengler, 1996) sugieren que a medida que las cabras aumenten su número de partos, la producción de leche decae con mayor celeridad en los días posteriores al día donde se da la producción máxima diaria de leche, por tanto, si se expresa la persistencia en función de la capacidad de mantener el pico de producción diaria de leche, se dice que hay menos persistencia de la producción lechera a medida que aumenten las pariciones en las cabras. Por tanto, en el presente estudio se observa, de forma más latente en las cabras de la raza Parda Alpina, que las tasas de producción de leche con respecto al tiempo decaen con menor velocidad en las cabras de 1° lactancia que con respecto a las cabras en la 2° y en la 3° o más lactancias. A su vez, la producción de leche de las cabras de la raza Parda Alpina decae con menor velocidad que respecto a la producción lechera de las cabras de la raza Saanen luego de los 100 días de lactancia, explicado con una alta correlación mostrada en la Tabla 5 entre y_{max} y los valores de la ecuación [6] ($r = 0,77$), por lo tanto, se dice que las cabras más persistentes tuvieron valores de y_{max} menores, caso mostrado por las cabras de la raza Parda Alpina con respecto a las de raza Saanen.

Cabe destacar las tendencias mostradas en la Figura 3, correspondientes a las ecuaciones de las pendientes según lo expresado en [7] para $70 < t < 220$ días en los modelos de mejor ajuste según las lactancias agrupadas cuyas expresiones para el modelo de Brody, Wood, Wilmink y Nelder corresponden a [3,1], [3,3], [3,5] y [3,7] respectivamente, donde se visualiza que después de los 100 días en la raza Parda Alpina, la tasa de cambio de la producción diaria de leche con respecto al tiempo descrita en la (Figura 3-a) es menor para las cabras en la 1° lactancia ($- 0,0056 \pm 0,0003$

kg leche/día), seguido por las cabras en la 2° lactancia ($-0,0101 \pm 0,0004$ kg leche/día) y las cabras con 3 o más lactancias ($-0,0114 \pm 0,0006$ kg leche/día), mientras que para las cabras de la raza Saanen (Figura 3-b), la tasa de cambio (kg/día) de la producción diaria de leche disminuye con menor tasa en las cabras en la 2° lactancia ($-0,0109 \pm 0,0005$ kg leche/día), luego en las cabras con 3 o más lactancias ($-0,0111 \pm 0,0004$ kg leche/día) y en las cabras en 1° lactancia ($-0,0125 \pm 0,0002$ kg leche/día). Esto indica que a medida que disminuyan los valores de las tasas de cambio de la producción de leche con respecto al tiempo, dado en [7], hay menor persistencia dentro de la fase descendente, dado que se encontraron mayores valores de desvíos estándares en este estudio.

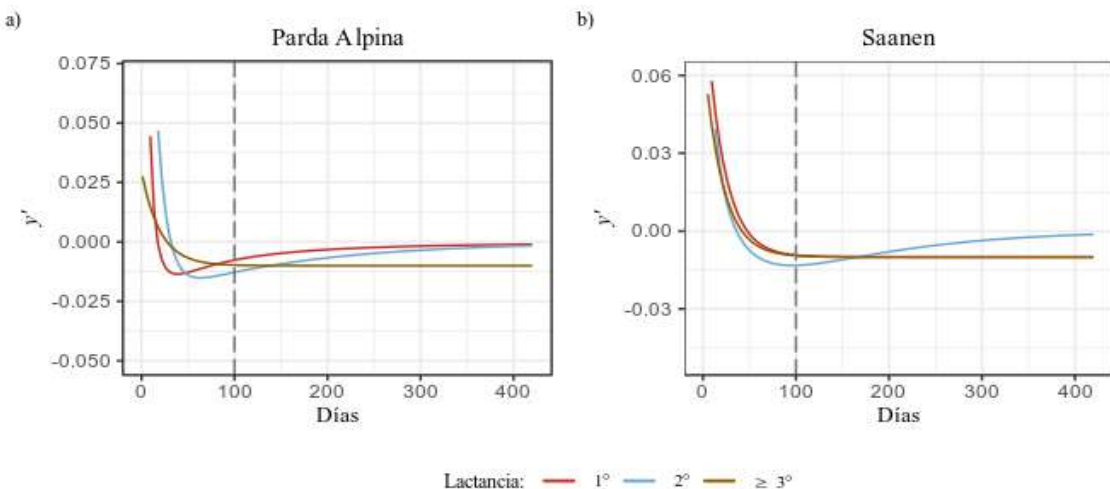


Figura 3. Curvas correspondientes a la pendiente (tasa de cambio de y con respecto a t) en kg/día a lo largo del intervalo de tiempo de la curva de lactancia con respecto a los modelos con mejor ajuste por cada lactancia en la raza Parda Alpina (a) y Saanen (b).

CONCLUSIONES

Los modelos no lineales de Wood (1967), Nelder (1966), Brody *et al.*, (1924) y Wilmink (1987) muestran un óptimo ajuste para los subgrupos en base a la raza y al número de partos ajustados en el presente estudio, siguiendo las particularidades asintóticas del proceso biológico de la lactación en cabras, permitiendo la estimación de parámetros productivos de interés para la toma de decisión en programas de selección y gestión de la producción lechera.

Las cabras de las razas Saanen muestran mayores valores en los parámetros de y_{max} , PL_{220} , y_{prom} y persistencia, mientras que las cabras de la raza Parda Alpina toman menor cantidad de días para llegar a la producción máxima diaria de leche. Por otro lado, a medida que aumenta el número de partos en las cabras, aumentan los valores estimados de y_{max} y PL_{220} , y disminuye la persistencia dentro de la fase descendente de la curva de lactación.

Se sugiere realizar el ajuste de las curvas de lactancia según el número de partos y razas, dado que en este estudio encuentra diferencias con respecto a parámetros asociados a la posición de la curva (t_{max} , y_{max}), así como en la forma de la curva (PL_{220} , persistencia). Además, se recomienda evaluar para estudio otros tipos de modelos para el ajuste de curvas de lactancias como los modelos con

Splines o los modelos regularizados (Ridge, Lasso) para evaluar sus propiedades y bondades de ajuste para las curvas de lactación en condiciones propias del país.

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento a los productores de cabras lecheras, el Sr. Gabriel J. Remy R. y la Sra. Norma E. Serrano M. propietarios de La Granja del Tío Remy por facilitar la base de datos utilizada en el presente estudio.

REFERENCIAS

- Bidot, A. (2017). Composición, cualidades y beneficios de la leche de cabra: Revisión bibliográfica. *Revista de Producción Animal*, 29(2), 32-41. <http://scielo.sld.cu/pdf/rpa/v29n2/rpa05217.pdf>
- Brody, S., Turner, C.W. & Ragsdale, A.C. (1924). The relation between the initial rise and the subsequent decline of milk secretion following parturition. *Journal of Genetic Physiology*, 6, 541-545.
- Chacón, A. (2005). Aspectos nutricionales de la leche de cabra y su papel en la alimentación humana. *Revista Agronomía Mesoamericana*, 16(2), 239-252. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/agromeso/article/view/11878/11188>
- Frau, S., Togo, J., Pece, M., Paz, R. y Font, G. (2010). Estudio comparativo de la producción y composición de leche de cabra de dos razas diferentes en la provincia de Santiago del Estero. *Revista de la Facultad de Agronomía, La Plata*, 109(1), 9-15. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5718159>
- Gengler, N. (1996). Persistency of lactation yields: a review. *Interbull Bulletin*. 12.
- Gipson, T.A., Grossman, M. (1990). Lactation curves in dairy goats: a review. *Small Ruminant Research*. 3, 383-396.
- González-Peña, D., Acosta, J., Guerra, D., González, N., Acosta, M., Sosa, D., & Torres-Hernández, G. (2012). Modeling of individual lactation curves for milk production in a population of Alpine goats in Cuba. *Livestock Science*, 150(1-3), 42-50. <https://doi.org/10.1016/J.LIVSCI.2012.07.026>
- Guimarães, V.P., Rodrigues, M.T., Sarmiento, J.L.R., da Rocha, D.T. (2006). Utilização de funções matemáticas no estudo da curva de lactação em caprinos. *Revista Brasileira de Zootecnia*, 35(2), 535-543. <https://doi.org/10.1590/S1516-35982006000200028>
- Leithold, L. (1994). El Cálculo, 7º Edición. Oxford University Press, Oxford.

- Marin, P., Agudelo, D., Restrepo, L., Cañas, J. y Cerón, M. (2009). Curvas de lactancia de cabras mestizas utilizando modelo matemático no lineales. *Revista Lasallista de Investigación*, 6(1), 43-49. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3400830>
- Martinez, G.; León, J.; Suarez, V. y Barba, C. (2018). Determinación de la curva de lactancia de cabras Saanen del noroeste argentino. *FAVE Sección Ciencias Veterinarias*, 17(1), 6-11. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=617767037002>
- Montaldo, H., Almanza, A. & Juárez, A. (1995). Genetic group, age and season effects on lactation curve shape in goats. *Small Ruminant Research*. 24, 195-202. [https://doi.org/10.1016/S0921-4488\(96\)00946-7](https://doi.org/10.1016/S0921-4488(96)00946-7)
- Nelder, J.A. (1966). Inverse polynomials a useful group of multi-factor response functions. *Biometrics*, 22(1), 128-141.
- Papacsjik, I.A. y Bordero, J. (1988). Modelling lactation curves of friesian cows in a subtropical climate. *Animal Production*. 47(2), 201-207.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. & Flannery, B.P. (1992). Numerical recipes in C: the art of scientific computing, 2º edición. *Cambridge University Press, Cambridge*.
- R Core Team. (2018). R: A language and environment for statistical computing. *R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria*. Recuperado en 22 de junio de 2022, URL <https://www.R-project.org/>.
- Sölkner, J., Fuchs, W. (1987). A Comparison of different measures of persistency with special respect to variation of test-day milk yields. *Livestock Production Science*, 16, 305-319. [https://doi.org/10.1016/0301-6226\(87\)90001-7](https://doi.org/10.1016/0301-6226(87)90001-7)
- Steffen, K.D., & Arias, R.O., & Moré, G., & Gortari, L. (2021). Caracterización de la curva de lactancia y rendimiento en cabras Saanen de un tambo semi-intensivo de la provincia de Buenos Aires, Argentina. *FAVE Sección Ciencias Veterinarias*, 20(1),41-46. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=617769130005>
- Wilmink, J.B.M. (1987). Comparison of different methods of predicting 305-day milk yield using means calculated from within herd lactation curves. *Livestock Production Sciences*. 17, 1-17. [https://doi.org/10.1016/0301-6226\(87\)90049-2](https://doi.org/10.1016/0301-6226(87)90049-2)
- Wood, P.D.P. (1967). Algebraic model of lactation curve in cattle. *Nature*, 216, 164-165. <https://doi.org/10.1038/216164a0>