



COMPARACIÓN DE MODELOS NO LINEALES PARA EL AJUSTE DE CURVAS DE CRECIMIENTO Y ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS PRODUCTIVOS EN POLLOS COBB 500

COMPARATION OF NONLINEAR MODELS TO FIT GROWTH CURVE AND ESTIMATION OF PRODUCTIVE PARAMETERS IN COBB 500 CHICKENS

*Saavedra, Roberto. Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Agropecuarias, Departamento de Desarrollo Agropecuario, Panamá. roberto-r.saavedra-f@up.ac.pa <https://orcid.org/0000-0002-4531-6434>

Mudarra, Richard. Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Agropecuarias, Departamento de Zootecnia, Panamá. richard.mudarra@up.ac.pa <https://orcid.org/0000-0002-4927-1202>

Cedeño, Héctor. Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Agropecuarias, Departamento de Zootecnia, Panamá. hector.cedenov@up.ac.pa <https://orcid.org/0000-0001-8400-4276>

Pimentel, Tamara. Consultor Independiente, Panamá. tamaraan26@gmail.com <https://orcid.org/0000-0002-5861-2910>

*Autor de Correspondencia: roberto-r.saavedra-f@up.ac.pa

Recibido: 09/02/2024

Aceptado: 26/05/2024

DOI <https://doi.org/10.48204/j.ia.v6n2.a5175>

RESUMEN. El objetivo de este estudio fue comparar la calidad del ajuste de cuatro funciones no lineales y dos funciones lineales polinómicas en la variable de respuesta peso vivo (g) en pollos de raza Cobbs 500, para la estimación de parámetros referentes al proceso biológico del crecimiento respecto a la edad del ave (días), considerando tres diferentes situaciones de estructura de covarianzas residuales. Se utilizó una base de datos tomada en 2023, de 1000 registros de 200 pollos de la raza Cobb 500 en los 1, 7, 21, 33 y 42 días de vida. Asumir una estructura de covarianza heterocedástica por día y autocorrelacionada AR(1) mejora la bondad de ajuste de los modelos respecto a una estructura de covarianza homocedástica e independiente, dada la heterogeneidad de varianza encontrada a medida que avanza la edad de las aves ($p < 0.05$) y la alta correlación ($\hat{\rho} > 0.75$) residual dentro de cada animal. Los modelos de Gompertz y Logística tuvieron mejor ajuste que el resto de las funciones evaluadas, en función a los AIC e BIC obtenidos. Los parámetros α y κ tienen una correlación negativa ($\rho < -0.80$), al igual que κ y TI ($\rho = -0.7054$) y α y TM ($\rho = -0.8464$). En conclusión, ajustar curvas de crecimientos mediante modelos no lineales con estructuras de covarianzas residuales heterocedásticas y correlacionadas permite estimar parámetros relacionados al ciclo de vida y así, obtener criterios de decisión en programas de manejo y llevar sistemas productivos de forma eficiente.

PALABRAS CLAVE: heterocedasticidad, autocorrelación, madurez, iteración, asíntota.

ABSTRACT. The objective of this study was to compare the goodness of fit of four nonlinear and two polynomial linear models to response variable body weight (g) in Cobbs 500 chicken, to estimate parameters related to biological process respect to time (days), considering three different residual covariance structure situation. A dataset of 1000 body weight records measured in 2023 from 200 Cobb 500 chicken in age: 1, 7 21, 33 and 42 days of life. Assuming a residual heterocedastyc by day and autocorrelated AR(1) by chicken covariance structure improved the goodness of fit of the models respect a residual independent and homocedastyc structure, due the heterogeneity of variance found when the age of the chicken grew up ($p < 0.05$) and the high residual correlation ($\hat{\rho} > 0.75$) within each animal. From all models, Gompertz and Logistic models have the best fit, according with AIC and BIC values. Parameters α and κ have a negative correlation ($\rho < -0.80$), similar with κ y TI ($\rho = -0.7054$) and finally, α and TM ($\rho = -0.8464$). In conclusion, fitting growth curves through nonlinear models with heterocedastic and correlated residual covariance structure allows estimating parameters related with life cycle stages and then, to obtain decision criteria in management programs and carry on productives systems in a efficient way.

KEYWORDS: heterocedasticity, autocorrelation, maturity, iteration, asymptote.



INTRODUCCIÓN

La producción avícola es de vital importancia dentro del sector agropecuario, debido a su aportación económica al país, pues en 2021 tuvo un valor bruto de producción de B/. 403.5 millones, representando un 23.2% del sector agropecuario (Asociación Nacional de Avicultores de Panamá, 2021), y ser una fuente importante de alimento de la población panameña, con un consumo de huevo y de pollo per cápita anual respectivo de 166 huevos/año y 38 kg/año en el 2021, siendo esta última cifra una más altas de Latinoamérica respecto al consumo (Ruíz, 2022).

Para el propósito de modelar curvas de crecimiento, se han generado modelos basados en soluciones de ecuaciones diferenciales, en el que se relaciona la tasa de crecimiento con la edad del individuo y ciertos parámetros productivos y cuya solución permite establecer una ecuación para el peso vivo en función de su edad y de valores fijos, conocidos como parámetros, los cuales en muchas veces son desconocidos, por lo que deben estimarse mediante métodos numéricos. Estas curvas parten de un peso inicial correspondiente a la fecha de nacimiento, el cual va aumentando a medida que avanza la edad hasta llegar a un tiempo donde la tasa de crecimiento se va ralentizando (tiempo de inflexión) hasta llegar a una estabilización de su peso, la cual corresponde a su edad adulta (peso de madurez), los cuales se definen en función de los parámetros estimados de α (peso de madurez), β (parámetro de edad), κ (parámetro de madurez) y m . Modelos no lineales como von Bertalanffy (von Bertalanffy, 1957), Logística (Nelder, 1961), Gompertz (Winsor, 1932) y Verhulst (Verhulst, 1847) son frecuentes para modelar el crecimiento en especies de interés zootécnico, como lo son los pollos (Aggrey, 2002; Demuner et al., 2017; Galán et al., 2023; Demuner et al., 2017; Mouffok et al., 2019).

Para el propósito de modelar curvas de crecimiento, se han generado modelos basados en soluciones de ecuaciones diferenciales, en el que se relaciona la tasa de crecimiento con la edad del individuo y ciertos parámetros productivos y cuya solución permite establecer una ecuación para el peso vivo en función de su edad y de valores fijos, conocidos como parámetros, los cuales en muchas veces son desconocidos, por lo que deben estimarse mediante métodos numéricos. Estas curvas parten de un peso inicial correspondiente a la fecha de nacimiento, el cual va aumentando a medida que avanza la edad hasta llegar a un tiempo donde la tasa de crecimiento se va ralentizando (tiempo de inflexión) hasta llegar a una estabilización de su peso, la cual corresponde a su edad adulta (peso de madurez), los cuales se definen en función de los parámetros estimados de α (peso de madurez), β (parámetro de edad), κ (parámetro de madurez) y m . Modelos no lineales como von Bertalanffy (von Bertalanffy, 1957), Logística (Nelder, 1961), Gompertz (Winsor, 1932) y Verhulst (Verhulst, 1847) son frecuentes para modelar el crecimiento en especies de interés zootécnico, como lo son los pollos (Galán et al., 2023; Demuner et al., 2017; Mouffok et al., 2019).

La raza avícola Cobb 500 es una de las más populares mundialmente como raza de engorde, debido a su eficiencia en conversión alimenticia, una gran ventaja para cualquier productor, dado los altos costos de producción presentes (Marcu et al., 2013). Varios estudios destacan las bondades productivas de esta raza (Pascalau et al., 2017; Rosero et al., 2012) respecto a su alta ganancia de peso y eficiente conversión alimenticia.



El objetivo de este estudio es evaluar el ajuste de cuatro funciones de curvas de crecimiento no lineales y dos funciones lineales polinómicas, para registros de peso vivos en pollos de la raza Cobbs 500, mediante la estimación de sus parámetros asociados a aspectos productivos considerando estructuras de covarianzas que se asocian a aspectos del proceso de generación de datos (independencia, correlación y heterogeneidad de varianza más correlación residual), teniendo en cuenta las propiedades biológicas de las especies.

MATERIALES Y MÉTODOS

Área de Estudio

El estudio se llevó a cabo en un galpón convencional de pollos de engorde en el Centro de Investigación Agropecuario de la Facultad de Ciencias Agropecuaria, ubicado en el corregimiento de Chiriquí, localizado a los 8°23'15.12" de Latitud norte y 82°19'47.48" de Longitud oeste y con una elevación de 26 msnm.

Animales del Experimento

Se utilizaron 200 pollos de engorde, machos y hembras de un día de edad (40.68 ± 0.45 gr), de la línea Cobb-Vantress 500. Todos los pollos fueron sometidos al mismo plan nutricional, basado en un alimento tipo harina formulado para suplir o exceder los requerimientos nutricionales establecidos por las tablas brasileras para aves y cerdos (Rostagno et al., 2017) según las siguientes etapas: Pre-inicio (F1: 1-7 días), Inicio (F2: 8-21 días), Crecimiento (F3: 22-33 días), y Engorde (F4: 34-42 días). En la F1 se ofreció un concentrado comercial con 21% proteína cruda, 2975, 74 kcal/kg EM, calcio 0,97% y fósforo 0,46%, en la F2: 20,3% proteína cruda, 3050,99, kcal/kg EM, calcio 0,87% y fósforo 0,41%, en la F3: 18% proteína cruda, 3150,29, kcal/kg, calcio 0,75% y fósforo 0,37%, y F4 16% proteína cruda, 3200,92, kcal/kg EM, calcio 0,63% y fósforo 0,29%. Todos los pollos bajo experimentación fueron sometidos al mismo protocolo de sanitario y condiciones micro ambientales.

Curvas de Crecimiento

Para el ajuste de las curvas de crecimiento, se ajustan cuatro diferentes modelos de regresión no lineal, correspondientes a los modelos de von Bertalanffy, Logística, Gompertz y Verhulst, donde ajusta cada modelo para este grupo muestral de la raza estudiada, cuyas formas algebraicas están enunciadas en la Tabla 1. Por otro lado, se ajustan ecuaciones polinómicas cuadráticas y cúbicas, donde las ecuaciones correspondientes de sus respectivos modelos lineales son $y_i = \beta_0 + \beta_1 t_i + \beta_2 t_i^2 + e_i$ y $y_i = \beta_0 + \beta_1 t_i + \beta_2 t_i^2 + \beta_3 t_i^3 + e_i$ respectivamente.

Los modelos no lineales se definen mediante el siguiente modelo estadístico, $y = f(t, \beta) + e$, donde y es la variable de respuesta (Peso vivo en kilogramos), $f(t, \beta)$ se denomina la función media del modelo con variable aleatoria t correspondiente al tiempo definido en días y e es el error aleatorio.

Además, se ajustan modelos lineales de regresión polinómicos, con la forma $y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j t_i^j + e_i$, para el caso del modelo polinómico cuadrático ($p = 2$) y cúbico respectivamente ($p = 3$). Con estas funciones se asumen tres diferentes estructuras de covarianzas: el primer escenario se asume que el vector de observaciones y está distribuido de forma independiente e independiente (*iid*) normal



con media $f(t, \beta)$ y estructura de covarianza $\mathbf{I}\sigma^2$ ($\mathbf{y} \sim N(f(t, \beta), \mathbf{I}\sigma^2)$), donde \mathbf{I} es una matriz identidad, por lo que el vector de los residuales \mathbf{e} están idénticamente e independientemente distribuido de manera normal de la forma $\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}\sigma^2)$:

$$Var(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L & 0 \\ 0 & 1 & L & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & L & 1 \end{bmatrix} \sigma^2$$

El segundo escenario asume que los residuales correspondientes al animal j siguen una estructura de autocorrelación de orden 1 (AR(1)), donde para $t = s$, $e_{j,s} = \rho e_{j,s-1} + \eta_s$, donde η_s es la desviación en el tiempo s y ρ es la correlación de los residuales, que en función del tiempo, tenemos que:

$$corr(e_s, e_t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = s \\ \rho^{|t-s|} & \text{c.c} \end{cases}$$

Por tanto, se asume que vector de observaciones \mathbf{y} está distribuidos normal con media $f(t, \beta)$ y estructura de covarianza \mathbf{V} ($\mathbf{y} \sim N(f(t, \beta), \mathbf{V})$), en el que la matriz de varianza-covarianza \mathbf{V} tiene una forma:

$$Var(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^6 & L & \rho^{44} \\ & 1 & \rho & L & \rho^{33} \\ & & 1 & L & \rho^{33} \\ M & M & O & M \\ sym. & & L & 1 \end{bmatrix} \sigma^2$$

Y el tercer escenario asume que las observaciones asumen una estructura autocorrelacionada AR(1) y una estructura de varianza heterocedástica respecto al tiempo, en el que el vector de observaciones \mathbf{y} está distribuidos normal con media $f(t, \beta)$ y estructura de covarianza \mathbf{V} ($\mathbf{y} \sim N(f(t, \beta), \mathbf{V})$), en el que la matriz de varianza-covarianza \mathbf{V} tiene una forma:

$$Var(\mathbf{y}) = \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & L & \mathbf{V}_{15} \\ M & O & M \\ \mathbf{V}_{51} & L & \mathbf{V}_{55} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^6 & L & \rho^{44} \\ & 1 & \rho & L & \rho^{33} \\ & & 1 & L & \rho^{33} \\ M & M & O & M \\ sym. & & L & 1 \end{bmatrix} \sigma_i^2$$



Estimación de Parámetros

La estimación de los parámetros $\hat{\theta}$ de cada modelo no lineal ajustado se hace mediante el método iterativo de Gauss – Newton con patrón de convergencia de $\text{tol} = 0.0001$. Para el caso de la estimación de los parámetros de los modelos lineales de regresión polinómica, se estiman mediante la metodología de mínimos cuadrados, ya sea ordinarios (OLS) para el caso del supuesto de errores homocedásticos e independientes, y generalizados (GLS) para el caso de errores autocorrelacionados de orden 1 (AR(1)) y con varianza heterocedástica (heterogeneidad de varianza).

Para evaluar al modelo de mejor ajuste en cada subgrupo, se considera el Criterio de Información de Akaike (AIC), el Criterio de Información Bayesiano (BIC), donde estos criterios denotan que el modelo con menor valor dentro de los modelos evaluados es el de mejor ajuste. Como valor de bondad de ajuste, se considera el coeficiente de determinación (R^2). La significancia de los parámetros se obtiene mediante el estadístico t con una significancia de $\alpha = 0.05$, mientras que la normalidad residual se verifica mediante la prueba de Shapiro-Wilks ($\alpha = 0.05$). Tanto el trabajo de manejo de datos, ajuste de los modelos propuestos y confección de gráficos se realiza en el lenguaje de programación R (R Core Team, 2023), en el que específicamente se ajustan los modelos autocorrelacionados y heterocedásticos con el paquete nlme (Pinheiro y Bates, 2000) y los gráficos mediante el paquete ggplot2 (Wickham, 2016).

Tabla 1

Modelos de Regresión No Lineales utilizados para ajustar las curvas de crecimientos en pollos Cobb.

Modelo	Función
Von Bertalanffy	$y_i = \alpha(1 - \beta e^{-kt})^3 + \varepsilon_i$
Logística	$y_i = \frac{\alpha}{(1 + e^{-kt})^m} + \varepsilon_i$
Verhulst	$y_i = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-kt}} + \varepsilon_i$
Gompertz	$y_i = \alpha e^{-\beta e^{-kt}} + \varepsilon_i$



Peso de Madurez

El ajuste de modelos no lineales permite estimar el peso de madurez o asintótico que tendrá cada ave a lo largo que transcurre el tiempo ($t \rightarrow \infty$), matemáticamente expresado como la asíntota horizontal de la función no lineal dado los parámetros del modelo estimados, expresado como el límite al infinito del tiempo t para la función y ; $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t; \beta) = a$, donde a es el peso asintótico estimado. Esto es de vital importancia para tener referencias del peso que pudiese tener un ave o promedio de una muestra de estas en una fecha posterior a los pesos muestrales registrados en el intervalo de días, específicamente de la edad madura del animal. Es conveniente considerar teoremas respecto a los límites al infinito (donde la variable predictora t tiende al infinito), de la siguiente forma:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = \frac{1}{e^t} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \tag{1}$$

En la que e es la constante de Napier, un número irracional ($e \in \mathbb{R} / \mathbb{Q}$) aproximado a 2,71828. Para evaluar la presencia de asíntotas horizontales en el modelo de von Bertalanffy, aplicando el límite con t tendiendo al infinito de la siguiente manera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \alpha(1 - \beta e^{-\kappa t})^3 = \alpha(1 - \beta e^{-\kappa \lim_{t \rightarrow \infty} t})^3 = \alpha(1 - \beta e^{-\kappa \cdot \infty})^3 = \alpha(1 - \beta e^{-\infty})^3$$

Según lo mostrado en la ecuación [1], en el que $e^{-\infty} = 0$, tenemos la correspondiente asíntota horizontal de la función no lineal de von Bertalanffy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \alpha(1 - \beta(0))^3 = \alpha(1)^3 = \alpha \tag{2.1}$$

Para la función Logística, la asíntota horizontal correspondiente se determina mediante la siguiente manera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{\alpha}{(1 + e^{-\kappa t})^m} = \frac{\alpha}{(1 + e^{-\kappa \lim_{t \rightarrow \infty} t})^m} = \frac{\alpha}{(1 + e^{-\kappa \cdot \infty})^m} = \frac{\alpha}{(1 + e^{-\infty})^m}$$

Según lo mostrado en [1], $e^{-\infty} = 0$, por lo que nos permite determinar la asíntota horizontal correspondiente al peso del animal al que puede llegar a alcanzar en una edad avanzada, para la función:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{\alpha}{(1+0)^m} = \frac{\alpha}{1^m} = \alpha \tag{2.2}$$

Para el modelo de Gompertz, la asíntota horizontal del mismo se determina de la siguiente manera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \alpha e^{-\beta e^{-\kappa t}} = \alpha e^{-\beta e^{-\kappa \lim_{t \rightarrow \infty} t}} = \alpha e^{-\beta e^{-\kappa \cdot \infty}} = \alpha e^{-\beta e^{-\infty}} = \alpha e^{-\beta \cdot 0} = \alpha e^0 = \alpha \tag{2.3}$$

Para el modelo de Verhulst, se determina su asíntota horizontal de la siguiente manera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\kappa t}} = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\kappa \lim_{t \rightarrow \infty} t}} = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\kappa \cdot \infty}} = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\infty}}$$

Según [1], en el que indica que $e^{-\infty} = 0$, tenemos la correspondiente asíntota horizontal de la función no lineal de Verhulst:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\infty}} = \frac{\alpha}{1 + \beta \cdot 0} = \frac{\alpha}{1} = \alpha \tag{2.4}$$



Para los modelos lineales polinómicos, en el caso de una regresión lineal cuadrática, el límite cuando tiende al infinito de sus funciones

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left(\frac{\beta_0}{\lim_{t \rightarrow \infty} t^2} + \frac{\beta_1}{\lim_{t \rightarrow \infty} t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \beta_2 \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 (0 + 0 + \beta_2) = \infty (\beta_2)$$

Lo que indica que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y \rightarrow +\infty$ si $\beta_2 > 0$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} y \rightarrow -\infty$ si $\beta_2 < 0$, lo cual solo existe el caso de tener asíntota horizontal si $\lim_{t \rightarrow +\infty} y \rightarrow \beta_0$ si $\beta_1 = \beta_2 = 0$, lo que no es valor representativo del peso adulto de un animal. De manera similar ocurre con el modelo polinómico cúbico:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^3 \left(\frac{\beta_0}{\lim_{t \rightarrow \infty} t^3} + \frac{\beta_1}{\lim_{t \rightarrow \infty} t^2} + \frac{\beta_2}{\lim_{t \rightarrow \infty} t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \beta_3 \right) = \infty (0 + 0 + 0 + \beta_3) = \infty (\beta_3)$$

En el que, de manera similar, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y \rightarrow +\infty$ si $\beta_3 > 0$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} y \rightarrow -\infty$ si $\beta_3 < 0$ y el único caso de posible asíntota horizontal es cuando $\lim_{t \rightarrow +\infty} y \rightarrow \beta_0$ si $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, que no refleja el peso de madurez del animal, esto es a causa de que β_0 es el parámetro de intercepto correspondiente al peso y cuando $t = 0$, indicativo del inicio de vida del animal y no correspondiente con su fase adulta.

Tasa de Crecimiento

Esta unidad de medida es referente a la ganancia de peso de cada animal respecto a un intervalo de tiempo dado. Matemáticamente, para una función se define su tasa de cambio como la primera derivada de dicha función, en la que se suele encontrar expresada con la notación y' , $f'(t)$ o dy/dt . Para el modelo Logística, se define su función de tasa de crecimiento al obtener su primera derivada, de la siguiente forma:

$$y' = D_t \left[\frac{\alpha}{(1 + e^{-\kappa t})^m} \right] = \frac{-\alpha m (1 + e^{-\kappa t})^{m-1} (-\kappa e^{-\kappa t})}{(1 + e^{-\kappa t})^{2m}} = \alpha \kappa m e^{-\kappa t} (1 + e^{-\kappa t})^{m-1-2m}$$

$$= \alpha \kappa m e^{-\kappa t} (1 + e^{-\kappa t})^{-m-1} = \alpha \kappa m e^{-\kappa t} (1 + e^{-\kappa t})^{-(m+1)} \quad [3.1]$$

Para el modelo de von Bertalanffy, se define su tasa de crecimiento al obtener su primera derivada, de la siguiente forma:

$$y' = D_t \left[\alpha (1 - \beta e^{-\kappa t})^3 \right] = 3\alpha (1 - \beta e^{-\kappa t})^2 (\beta \kappa e^{-\kappa t}) \quad [3.2]$$

Para el modelo de Gompertz, se define su tasa de crecimiento al obtener la primera derivada de su función:

$$y' = D_t \left[\alpha e^{-\beta e^{-\kappa t}} \right] = (\alpha e^{-\beta e^{-\kappa t}}) (\beta \kappa e^{-\kappa t}) = \alpha \beta \kappa e^{-\kappa t - \beta e^{-\kappa t}} \quad [3.3]$$

Para el modelo de Verhulst, se calcula la primera derivada de su función, correspondiente a su tasa de crecimiento:

$$y' = D_t \left[\frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\kappa t}} \right] = \frac{-\alpha (-\beta \kappa e^{-\kappa t})}{(1 + e^{-\kappa t})^2} = \frac{\alpha \beta \kappa e^{-\kappa t}}{(1 + e^{-\kappa t})^2} \quad [3.4]$$

Para los modelos polinómicos cuadráticos y cúbicos, se tiene su respectivas tasa de crecimiento:



$$y' = D_t [\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2] = \beta_1 + 2\beta_2 t$$

$$y' = D_t [\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3] = \beta_1 + 2\beta_2 t + 3\beta_3 t^2$$

Tiempo de Inflexión

Este parámetro es referente al punto en el intervalo de tiempo en la función referente a la tasa de crecimiento, en el que hay un cambio de tendencia, y basados en las particularidades biológicas de las curvas de crecimiento animal, en la que la función debe pasar de ser creciente a decreciente, teniendo una forma cóncava hacia abajo. Matemáticamente, se obtiene mediante el criterio de la segunda derivada, en el cual se toma el punto de inflexión cuando tiene una pendiente igual a cero.

Para el modelo logística, se toma se segunda derivada de esta al derivar la primera derivada de dicho modelo, mostrada en [3.1] y se desglosa el procedimiento:

$$\begin{aligned} y'' &= \alpha\kappa m(-\kappa)e^{-\kappa t} (1 + e^{-\kappa t})^{-(m+1)} + \alpha\kappa m e^{-\kappa t} (-m-1)(1 + e^{-\kappa t})^{-(m+2)} (-\kappa e^{-\kappa t}) \\ &= \alpha\kappa^2 m e^{-\kappa t} (1 + e^{-\kappa t})^{-(m+1)} [e^{-\kappa t} (m+1)(1 + e^{-\kappa t})^{-1} - 1] \end{aligned}$$

Se iguala esta ecuación de segunda derivada a cero, según el siguiente procedimiento:

$$0 = \alpha\kappa^2 m e^{-\kappa t} (1 + e^{-\kappa t})^{-(m+1)} [e^{-\kappa t} (m+1)(1 + e^{-\kappa t})^{-1} - 1] \Rightarrow 0 = m e^{-\kappa t} - 1 \Rightarrow e^{-\kappa t} = 1/m$$

Aplicando logaritmos a ambos lados de la igualdad, tenemos que el tiempo de inflexión del modelo logística:

$$\begin{aligned} \ln e^{-\kappa t} &= \ln\left(\frac{1}{m}\right) \Rightarrow -\kappa t = -\ln(m) \\ t &= \frac{\ln(m)}{\kappa} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para el modelo de von Bertalanffy, se obtiene la segunda derivada respecto a la primera derivada de la ecuación descrita en [3.2]:

$$\begin{aligned} y'' &= 6\alpha(1 - \beta e^{-\kappa t})(\beta\kappa e^{-\kappa t})(\beta\kappa e^{-\kappa t}) + 3\alpha(1 - \beta e^{-\kappa t})^2 (-\beta\kappa^2 e^{-\kappa t}) \\ y'' &= 3\alpha(1 - \beta e^{-\kappa t})(\beta\kappa e^{-\kappa t}) [3\beta\kappa e^{-\kappa t} - \kappa] \end{aligned}$$

Se iguala esta ecuación de segunda derivada a cero, según el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} 0 &= 3\alpha(1 - \beta e^{-\kappa t})(\beta\kappa e^{-\kappa t}) [3\beta\kappa e^{-\kappa t} - \kappa] = 3\beta\kappa e^{-\kappa t} - \kappa \Rightarrow 3\beta\kappa e^{-\kappa t} = \kappa \\ e^{-\kappa t} &= \frac{\kappa}{3\beta\kappa} = \frac{1}{3\beta} \end{aligned}$$

Se obtiene el tiempo de inflexión del modelo de von Bertalanffy al aplicar logarítmicos a ambos lados de la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} \ln e^{-\kappa t} &= \ln\left(\frac{1}{3\beta}\right) \Rightarrow -\kappa t = -\ln(3\beta) \\ t &= \frac{-\ln(3\beta)}{-\kappa} = \frac{\ln(3\beta)}{\kappa} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Para el modelo de Gompertz, se obtiene la segunda derivada respecto a la primera derivada de la ecuación descrita en [3.3] y luego igualando la segunda derivada a cero:



$$y'' = \alpha\beta\kappa e^{-\kappa t - \beta e^{-\kappa t}} (-\kappa + \beta\kappa e^{-\kappa t})$$

$$0 = -\kappa + \beta\kappa e^{-\kappa t} \Rightarrow \beta\kappa e^{-\kappa t} = \kappa \Rightarrow e^{-\kappa t} = \frac{\kappa}{\beta\kappa} = \frac{1}{\beta}$$

Se obtiene el tiempo de inflexión del modelo de Gompertz al aplicar logarítmicos a ambos lados de la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} \ln e^{-\kappa t} &= \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \Rightarrow -\kappa t = -\ln(\beta) \\ t &= \frac{\ln(\beta)}{\kappa} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Para el modelo de Verhulst, se obtiene primero la segunda derivada al derivar la ecuación resultante de la primera derivada de dicho modelo, mostrada en [3.4] y luego se iguala la segunda derivada respecto a cero para encontrar el tiempo de inflexión:

$$\begin{aligned} y'' &= D_t \left[\frac{\alpha\beta\kappa e^{-\kappa t}}{(1 + \beta e^{-\kappa t})^2} \right] = \frac{\alpha\beta\kappa^2 e^{-\kappa t} (1 + \beta e^{-\kappa t}) [-1 + \beta e^{-\kappa t}]}{(1 + \beta e^{-\kappa t})^4} \\ 0 &= \frac{\alpha\beta\kappa^2 e^{-\kappa t} (1 + \beta e^{-\kappa t}) [-1 + \beta e^{-\kappa t}]}{(1 + \beta e^{-\kappa t})^4} \Rightarrow 0 = -1 + \beta e^{-\kappa t} \Rightarrow \beta e^{-\kappa t} = 1 \Rightarrow e^{-\kappa t} = \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

Se aplica la función logaritmo a ambos lados de la igualdad de esta ecuación:

$$\begin{aligned} \ln e^{-\kappa t} &= \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \Rightarrow -\kappa t = -\ln(\beta) \\ t &= \frac{\ln(\beta)}{\kappa} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Respecto a los modelos polinómicos, el modelo cuadrático no tiene tiempo de inflexión, puesto que su segunda derivada no arroja un valor que corresponde al tiempo y que haga que la función de derivada sea igual a cero. Por otro lado, la función cúbica tiene el siguiente tiempo de inflexión:

$$\begin{aligned} y'' &= D_t [\beta_1 + 2\beta_2 t + 3\beta_3 t^2] = 2\beta_2 + 6\beta_3 t \Rightarrow 0 = 2\beta_2 + 6\beta_3 t \\ t &= \frac{-\beta_2}{3\beta_3} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Peso de Inflexión

Este parámetro es referente al peso en gramos en el punto de tiempo de inflexión, en donde la curva de la tasa de crecimiento para de ser creciente a decreciente: En este caso específico para los modelos Logística, de von Bertalanffy, Gompertz y Verhulst, tenemos los pesos de inflexión al reemplazar sus respectivos tiempos de inflexión encontrados en [4.1], [4.2], [4.3] y [4.4] respectivamente en las ecuaciones de crecimientos descritos en la Tabla 1.

Aplicando este procedimiento al modelo logística, reemplazando el tiempo de inflexión descrito en [4.1] en su ecuación matemática, tenemos que:

$$y = \frac{\alpha}{\left(1 + e^{-\kappa\left(\frac{\ln(m)}{\kappa}\right)}\right)^m} = \frac{\alpha}{\left(1 + e^{-\kappa\left(\frac{\ln(m)}{\kappa}\right)}\right)^m} = \frac{\alpha}{\left(1 + e^{-\ln(m)}\right)^m} = \frac{\alpha}{\left(1 + e^{\ln\left(\frac{1}{m}\right)}\right)^m} = \frac{\alpha}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}$$



$$= \frac{\alpha}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^m} = \alpha \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \quad [5.1]$$

El peso de inflexión correspondiente al modelo de von Bertalanffy se obtiene al reemplazar el tiempo de inflexión mostrado en [4.2] en su ecuación matemática:

$$\begin{aligned} y &= \alpha \left(1 - \beta e^{-x \left(\frac{\ln(3\beta)}{x}\right)}\right)^3 = \alpha \left(1 - \beta e^{-\ln(3\beta)}\right)^3 = \alpha \left(1 - \beta e^{\ln\left(\frac{1}{3\beta}\right)}\right)^3 \\ &= \alpha \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8\alpha}{27} \end{aligned} \quad [5.2]$$

El peso de inflexión de Gompertz es encontrado al reemplazar su tiempo de inflexión descrito en [4.3] en su ecuación matemática:

$$\begin{aligned} y &= \alpha e^{-\beta e^{-x \left(\frac{\ln(\beta)}{x}\right)}} = \alpha e^{-\beta e^{-\ln(\beta)}} = \alpha e^{-\beta e^{\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)}} \\ &= \alpha e^{-\beta \left(\frac{1}{\beta}\right)} = \alpha e^{-1} = \frac{\alpha}{e} \end{aligned} \quad [5.3]$$

El peso de inflexión del modelo de Verhulst se obtiene al reemplazar su tiempo de inflexión presente en [4.4] en su ecuación algebraica:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-x \left(\frac{\ln(\beta)}{x}\right)}} = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\ln(\beta)}} = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)}} \\ &= \frac{\alpha}{1 + \beta \left(\frac{1}{\beta}\right)} = \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \quad [5.4]$$

El peso de inflexión del modelo polinómico cúbico se obtiene al reemplazar el valor presente en la ecuación [4.5] en su ecuación algebraica:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{-\beta_2}{3\beta_3}\right) + \beta_2 \left(\frac{-\beta_2}{3\beta_3}\right)^2 + \beta_3 \left(\frac{-\beta_2}{3\beta_3}\right)^3 = \beta_0 - \frac{\beta_1\beta_2}{3\beta_3} + \frac{\beta_2^3}{9\beta_3^2} - \frac{\beta_2^3}{27\beta_3^2} = \beta_0 - \frac{\beta_1\beta_2}{3\beta_3} + \frac{2\beta_2^3}{27\beta_3^2} \quad [5.5]$$

Grado de Maduración

Es una medida representativa del nivel de madurez que tiene el ave en determinada edad respecto a su edad madura. Se estiman valores respectivos a la tasa de maduración al dividir el peso estimado por determinada función con su peso de madurez, estimado por su asíntota horizontal. Para el caso de las funciones no lineales von Bertalanffy, Logística, Gompertz y Verhulst, se tienen sus funciones de grado de maduración en determinado tiempo t al dividir la función presente en la Tabla 1 con el peso de madurez presente en las ecuaciones [2.1], [2.2], [2.3] y [2.4] respectivamente.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las medias de las mediciones respecto a los pesos (g), así como las ganancias de pesos diarias (g/día) están presentes en la Tabla 2, las cuales muestran que los pesos en gramos tienen una tendencia creciente, en la que se puede resaltar que en los periodos correspondientes al intervalo



de 1 a 7 días y al periodo de 7 a 21 días, las aves en promedio ganan un 235.28% y un 399.75% respectivamente, lo cual empieza a disminuir en el período entre 21 a 33 días y al periodo entre 33 y 42 días, donde ganan un 121.81% y 44.16% respectivamente. De forma similar se encuentra que la ganancia de peso tiene un incremento del 144.14% en el periodo entre los 7 y 21 días y un 77.68% en el periodo entre 33 y 42 días un 0.07%. Por lo que se puede apreciar que los pesos tienden a ganar menos peso luego de los 21 días, incluso que la ganancia diaria de peso tiende a anularse en el periodo entre 33 y 42 días.

Tabla 2

Valores medios de peso y de ganancia diaria de peso (GDP) \pm desvíos estándar.

Día	n	Peso (g)	GDP (g/día)
1	200	40.68 \pm 0.99	---
7	200	136.39 \pm 14.32	15.95 \pm 2.32
21	200	681.61 \pm 66.16	38.94 \pm 3.85
33	200	1511.85 \pm 145.04	69.19 \pm 7.40
42	200	2179.53 \pm 186.92	74.19 \pm 7.82

Luego de ajustar las curvas de crecimiento por ave según las funciones no lineales descritas en la Tabla 1, si bien es cierto que se registran altos valores de R^2 descritos en la Tabla 3 para todos los modelos ajustados bajo diferente estructuras de covarianza ($R^2 > 0.75$), según los resultados de AIC y BIC, considerar una estructura de covarianza residual diferente al supuesto de independencia residual es conveniente, ya que se puede ver que para cada modelo ajustado, ya sea para los modelos no lineales, así como para los modelos polinómicos, los modelos con una estructura residual AR(1) por animal, arrojó mejores valores de AIC y BIC respecto al modelo con una estructura residual independiente, mientras que los modelos ajustados bajo una estructura heterocedástica por día tuvieron mejores valores de AIC y BIC que los modelos con estructura residual independiente y AR(1), ya que se ve la disminución de los valores de AIC y BIC, valores que tienden a ser recíprocos respecto a la disminución de sus resultados.

Hay que considerar el hecho que los valores de R^2 no mostraron comportarse de forma paralela a los valores mostrados por el AIC y BIC, lo cual no debe tomarse como una medida confiable para seleccionar un modelo respecto en base al mejor ajuste de los datos, puesto que según Spiess y Neumeyer (2010), muestra poca sensibilidad respecto a la diferencia entre modelos, aun cuando hay tendencias amplias mostradas por estadísticos como el AIC y BIC, sino que también no tiene la representación teórica que muestra el R^2 en los modelos lineales, pues en modelos no lineales, la suma de cuadrados totales no es igual a la suma de cuadrados residuales más la suma de cuadrados de regresión.

Tanto como a nivel general, así como dentro de los modelos ajustados según su estructura de covarianza, los modelos de Gompertz y Logística muestran un mejor ajuste respecto a los otros modelos, resaltando que en el ajuste mediante estructura de varianza covarianza heterocedástica y correlacionada AR(1), hay diferencias entre ambos modelos, ya que hay una diferencia importante tanto de AIC y BIC de 10 puntos entre ambos modelos, favorable al modelo de Gompertz. Estudios como Galán et al. (2023) sugieren que para un conjunto de datos de crecimientos tanto en machos como en hembras de la raza Andaluza Azul, el modelo de Gompertz tuvo el mejor ajuste. Mouffok



et al. (2019) para un conjunto de datos de pollos de la raza Cobb 500 bajo tres sistemas de engorde, el modelo de Gompertz tuvo el mejor ajuste en el primer mes. Demuner et al. (2017) para un estudio de crecimiento de pollos de la raza Cobb, Hubbart y Ross, el modelo de Gompertz junto al de Richards mediante una estructura residual heterocedástica y autocorrelacionada AR(1) mostraron el mejor ajuste, en comparación a otros modelos no lineales como el de von Bertalanffy. Además, según lo mostrado en la Tabla 3, el modelo de Gompertz demostró ser el más eficiente computacionalmente hablando, ya que requirió menos iteraciones para la convergencia necesaria para estimar los parámetros del modelo, para cada diferente estructura de covarianza en la que se ajustaron los modelos utilizados en este estudio. Hay que destacar que para ajustar los modelos no lineales bajo supuesto de estructura de covarianza heterocedástica y correlacionada, se requirió mayor cantidad de iteración para la convergencia que cuando se ajustó con estructura de covarianza independiente y homocedástica, así como una estructura correlacionada, sobre todo en el modelo de Verhulst, que requirió 132 iteraciones para converger cuando seguía una estructura heterocedástica. Se asume que, al aumentar la cantidad de parámetros por estimar, se requieran mayor cantidad de iteraciones para la convergencia y así optimizar la bondad de ajuste del modelo (Mouffok et al., 2019).

La prueba de Levene ($p < 0.05$) sugiere que los datos en función de los días no tienen una homogeneidad de varianza, ya que la misma se va ampliando a medida que pasan los días, tal como sugieren los desvíos estándar en cada día de medición en los datos observados en la Tabla 2 y los desvíos estimados correspondientes a cada día en cada función asumiendo una estructura residual heterocedástica y correlacionada, descritos en la Tabla 4. Autores como Mazucheli et al. (2011), Demuner et al. (2017) y Mouffok et al. (2019) reportan que la varianza en los datos de crecimiento aumenta a medida que aumenta la magnitud de la variable tiempo. Los valores de correlación estimados ($\hat{\rho}$) en los modelos con estructura de covarianza autocorrelacionada de orden 1 sugieren una alta correlación de las observaciones dentro de cada animal ($\hat{\rho} > 0.75$), lo cual sugiere para cada función ajustada, hubo una mejora en su ajuste al asumir una estructura residual correlacionada respecto a cuando se asumió una estructura residual independiente.



Tabla 3

Criterios de comparación entre modelos (AIC y BIC), números de iteraciones para convergencia, $\hat{\sigma}$, $\hat{\rho}$ y R^2 para los modelos ajustados según su estructura de covarianza.

Modelo	Función	$\hat{\sigma}$	$\hat{\rho}$	R^2	AIC	BIC	Iter.
No Correlacionada							
	von Bertalanffy	109.90	---	0.983	1228.594	1239.015	10
	Logística	109.00	---	0.983	1227.066	1237.487	6
	Verhulst	112.40	---	0.982	1233.102	1243.523	7
	Gompertz	109.00	---	0.983	1226.962	1237.383	4
AR(1)							
NLIN	von Bertalanffy	124.62	0.857	0.982	1149.878	1162.904	6
	Logística	121.84	0.865	0.983	1140.905	1153.931	4
	Verhulst	143.41	0.897	0.976	1153.493	1166.518	9
	Gompertz	121.24	0.862	0.983	1141.311	1154.337	3
AR(1) + Varianzas Heterogéneas							
	von Bertalanffy	***	0.771	0.983	914.270	937.717	16
	Logística	***	0.908	0.976	914.820	938.267	45
	Verhulst	***	0.980	0.882	1047.835	1071.282	132
	Gompertz	***	0.876	0.980	904.096	927.543	19
No Correlacionada							
	Cuadrático	112.70	---	0.982	1233.608	1244.029	---
	Cúbico	110.20	---	0.983	1230.201	1243.227	---
AR(1)							
LIN	Cuadrático	120.76	0.756	0.983	1176.042	1188.915	---
	Cúbico	121.79	0.839	0.983	1160.413	1175.800	---
AR(1) + Varianzas Heterogéneas							
	Cuadrático	***	0.774	0.982	931.941	955.114	---
	Cúbico	***	0.799	0.983	928.752	954.396	---

Iter = número de iteraciones para convergencia, R^2 = coeficiente de determinación, $\hat{\sigma}$ = desvío estándar residual estimada, $\hat{\rho}$ = correlación residual estimada, AIC = Criterio de Información de Akaike, BIC = Criterio de Información Bayesiano. *** resultados presentes en Tabla 4.

Hay que indicar que todos los modelos ajustados con una estructura de covarianza heterocedástica y autocorrelacionada de orden 1, estiman valores razonables de desvíos estándares en relación de los desvíos estándares observados por día, salvo el modelo de Verhulst, que sobreestima la varianza en cada día, según lo que indica la Tabla 4, pues la diferencia porcentual entre las varianzas observadas y estimada bajo este modelo, para los días 1, 7, 21, 33 y 42 representa un incremento de 5057.03, 271.68, 170.37, 204.29 y 118.94% respectivamente, debido a que se presentan muchas circunstancias de manejo como deficiencias sanitarias o efectos de competencia de animal, que causan esta alta variación entre los pesos de las aves a medida que avanza la edad de las mismas.

**Tabla 4**

Desvíos estándares estimados por día para modelos con estructura heterocedástica en el tiempo y correlacionada AR(1) según cada ave.

Modelo	Función	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_7$	$\hat{\sigma}_{21}$	$\hat{\sigma}_{33}$	$\hat{\sigma}_{42}$
NLIN	von Bertalanffy	1.2429	17.1887	61.4326	133.1878	167.7655
	Logística	1.8442	30.7603	88.8270	155.9149	201.0988
	Verhulst	51.0546	53.2244	178.8749	441.3466	409.2537
	Gompertz	1.6052	24.3490	72.6048	141.0277	175.1793
	Cuadrática	1.2552	16.1145	69.2027	160.2116	176.2294
LIN	Cúbica	1.3062	16.7828	62.4902	144.2256	166.5897

Los parámetros estimados para cada modelo, sea no lineal o polinómico, bajo distintas estructuras de covarianzas, están presentes en la Tabla 5, junto a sus respectivos desvíos estándares. Se observa una disminución en los coeficientes de variación por parámetro $\%CV = 100 \left(SD(\beta) / \hat{\beta} \right)$ al aplicar una estructura residual de covarianza diferente al de una estructura homocedástica e independiente, en el que toma el parámetro α correspondiente al peso de madurez, y para cada función ajustada, el modelo de Gompertz muestran valores de 12.08, 6.35 y 3.50% para el ajuste bajo una estructura de covarianza independiente, correlacionada AR(1) y una estructura de covarianza heterocedástica y correlacionada AR(1) respectivamente. Las otras funciones como Logística reportan valores respectivos de 9.31, 5.09 y 2.97%; von Bertalanffy reportan valores de 28.04, 11.94 y 13.04; y Verhulst reporta valores de 4.61, 3.29 y 1.72%.

Mientras que el parámetro κ , correspondiente a la tasa de maduración, muestra igual tendencia para el ajuste bajo una estructura de covarianza independiente, correlacionada AR(1) y una estructura de covarianza heterocedástica y correlacionada AR(1), donde el modelo de Gompertz tiene valores de %CV respectivos de 8.94, 6.67 y 2.00%; el modelo de von Bertalanffy muestra valores respectivos de 20.40, 8.33 y 7.14%; para el modelo logística 7.13, 5.56 y 1.55%; y el modelo de Verhulst 5.16, 3.83 y 0.78%. Lo cual es indicativo que el coeficiente de variación de cada parámetro estimado disminuye a medida que el proceso de estimación considera estructuras de covarianzas correlacionadas y con heterogeneidad de varianzas.



Tabla 5

Parámetros estimados ± desvíos estándares estimados de los modelos estimados bajo diferentes estructuras de covarianzas, tiempo de inflexión y peso de inflexión estimados.

Modelo	Función	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\kappa}$	\hat{m}	TI (Día)	PI (g)	
No Correlacionada								
	von	9290.00 ±	0.87 ±	0.0196 ±	---	49.02	2752.59	
	Bertalanffy	2605.00***	0.01***	4E-3***				
	Logística	3949.00 ±	---	0.0561 ±	6.56 ±	33.52	1556.98	
		367.60***		4E-3***	0.26***			
	Verhulst	2802.00 ±	38.25 ±	0.1162 ±	---	31.36	1401.00	
		129.30***	4.31***	6E-3***				
	Gompertz	4581.00 ±	4.86 ±	0.0447 ±	---	35.37	1685.26	
		553.50***	0.20***	4E-3***				
AR(1)								
NLIN	von	7314.63 ±	0.91 ±	0.0240 ±	---	41.85	2167.30	
	Bertalanffy	873.01***	0.02***	2E-3***				
	Logística	4076.83 ±	---	0.0540 ±	6.41 ±	34.40	1609.71	
		207.24***		3E-3***	0.23***			
	Verhulst	3133.23 ±	25.87 ±	0.0991 ±	---	32.83	1566.61	
		103.23***	2.21***	3.8E-3				
	Gompertz	4542.97 ±	4.90 ±	0.0450 ±	---	36.32	1671.27	
		288.39***	0.20***	3E-3***				
	AR(1) + VARIANZAS HETEROGÉNEAS							
		von	15357.89 ±	0.87 ±	0.0140 ±	---	68.52	4550.48
	Bertalanffy	2006.21***	0.005***	1E-3***				
	Logística	3684.82 ±	---	0.0580 ±	6.83 ±	33.13	1449.16	
		109.53***		9E-4***	0.04***			
	Verhulst	2993.96 ±	36.78 ±	0.1274 ±	---	28.30	2993.96	
		51.66***	0.801***	1E-3***				
	Gompertz	4527.98 ±	4.95 ±	0.04 ± 8E-	---	39.98	1665.75	
		158.29***	0.03***	4***				
Método Lineal	Modelo	β_0	β_1	β_2	β_3	TI (Día)	PI (g)	
No Correlacioanda								
	Cuadrático	9.37 ±	14.16 ±	0.91 ±	---	---	---	
		23.95	3.00***	0.07***				
	Cúbico	48.57 ±	-2.21 ±	1.89 ±	-0.01 ±	63.00	4910.28	
		28.94	7.67	0.43***	7E-3*			
LIN	AR(1)							
		Cuadrático	13.72 ±	14.31 ±	0.89 ±	---	---	---
			27.28	2.05***	0.04***			
		Cúbico	48.98 ±	-2.81 ±	1.91 ±	-0.02 ±	31.83	1249.68
			28.09	3.38	0.18***	3E-3***		
	AR(1) + VARIANZAS HETEROGÉNEAS							



Cuadrático	32.54 ± 0.44***	6.78 ± 0.60***	1.05 ± 0.02***	---	---	---
Cúbico	34.03 ± 0.56***	5.09 ± 0.72***	1.32 ± 0.06***	-0.006± 1E-3***	73.33	5139.40

*Significancia estadística (P<0.05); ***Significancia estadística (P<0.0001)

En los modelos de Gompertz (GM) y Logística (LG), los valores de peso de madurez o asintótico estimados ($\hat{\alpha}$) son parecidos a los descritos por Demuner *et al.* (2017) para la raza Cobbs, y tienden a disminuir cuando se ajustan los modelos considerando una estructura residual heterocedástica y autocorrelacionada ($\hat{\alpha}_{GM} = 4527.98$, $\hat{\alpha}_{LG} = 3684.82$, $\hat{\alpha}_{VH} = 2993.96$, $\hat{\alpha}_{VB} = 15357.89$) respecto al ajuste de los modelos con una estructura homocedástica e independiente ($\hat{\alpha}_{GM} = 4581.00$, $\hat{\alpha}_{LG} = 3949.00$, $\hat{\alpha}_{VH} = 2802.00$, $\hat{\alpha}_{VB} = 9290.00$), mientras que en el modelo de von Bertalanffy (VB) y Verhulst (VH) sucede lo contrario, pues las estimaciones de este parámetro aumentan, similar a lo mostrado por Demuner *et al.* (2017), que reporta este aumento cuando se aplica una estructura heterocedástica y correlacionada al modelo para la función de von Bertalanffy, mientras el valor desciende para la función logística y de Gompertz.

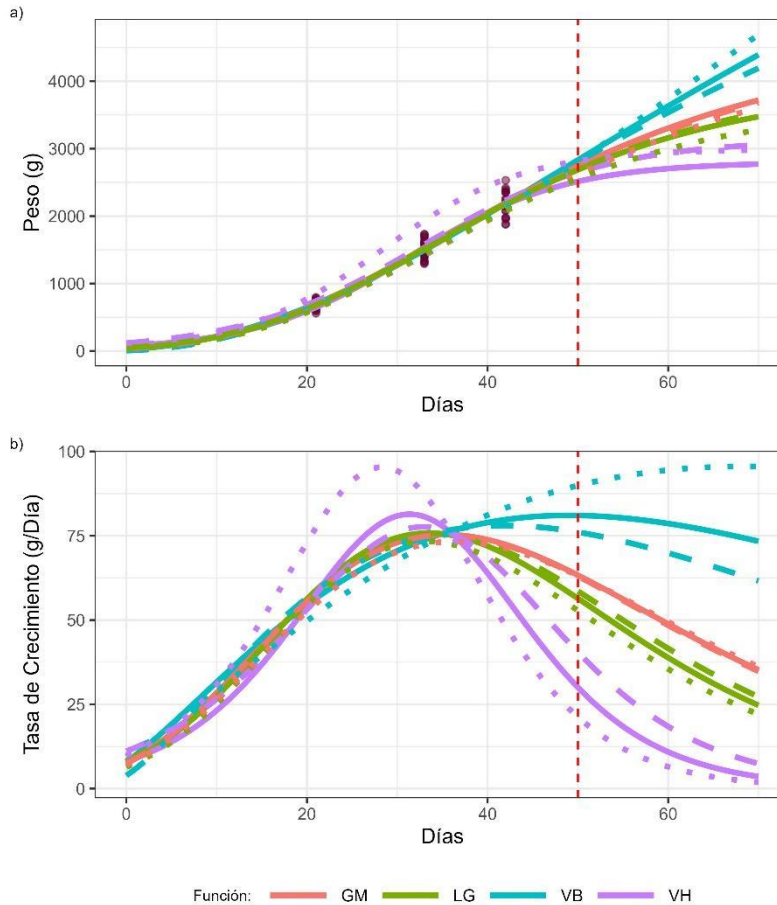
Además, Galán *et al.* (2023) en un estudio para aves de la raza Andaluza Azul, y Demuner *et al.* (2017) para la raza Cobbs, señalan que α estimado por el modelo de von Bertalanffy presentaba mayores valores que el resto de las funciones ajustadas, sugiriendo que las aves presentan un peso de maduración muy superior al resto de valores estimados por las otras funciones.

Los valores predichos de los pesos (g.) son función de los parámetros estimados en la Tabla 5 y gráficamente están expresados en la Figura 1(a). En general, dentro del periodo de 1 a 40 días la mayoría de los modelos se comportan similarmente, y luego de este tiempo, los valores de von Bertalanffy ajustados con las tres situaciones de estructuras de covarianza consideradas, tienden a ser mayor que el resto de las funciones ajustadas. En este caso, altos valores estimados de α hacen que los pesos estimados por su respectiva función sean más grandes, porque cada función es directamente proporcional a α , según lo indicado por la Figura 1(a), donde los valores ajustados por von Bertalanffy son mayores que los estimados por el resto de las funciones, más evidentes luego de los 40 días, con la excepción del modelo de Verhulst ajustado con una estructura de covarianzas heterocedástica y correlacionada AR(1), donde tiene un sesgo en sus estimaciones en el periodo entre los 20 y 50 días, por lo que sus valores de AIC y BIC referentes a la bondad de ajuste, fueron los más altos respecto a los otros modelos, indicativo que no tuvo mejor ajuste respecto a los otros modelos.



Figura 1

Comparación de las curvas de los modelos de von Bertalanffy (VB), Logística (LG), Verhulst (VH) y Gompertz (GM) ajustadas según una estructura residual independiente y homocedástica (línea sólida), estructura correlacionada AR(1) (línea rayada) y estructura heterocedástica y correlacionada AR(1) (línea punteada) para la variable crecimiento (a.) y la tasa de crecimiento (b.)



Los valores predichos de la tasa de crecimiento (g/día) visibles en la Figura 1(b) muestran una tendencia similar en el periodo entre 1 a 35 días en casi todos los modelos, con la excepción del modelo de Verhulst en el caso del ajuste con estructura de covarianza independiente y una estructura heterocedástica y autocorrelacionada (81.39 y 95.36 g/día respectivamente en su tiempo de inflexión), ya que arroja valores estimados superiores al resto de funciones ajustadas, en la que incluso presentan un mayor tasa de crecimiento máxima ($y'' = 0$) en un tiempo de inflexión menor que el resto de funciones ajustadas. Salvo los modelos concernientes a la función de von Bertalanffy, el resto de las funciones tienden a una disminución de la tasa de crecimiento luego de los 38 días debido a que tienen un tiempo de inflexión más precoz y por tanto llegan a su tasa de crecimiento máxima antes que las correspondientes a los modelos de von Bertalanffy.



Tabla 5

Correlación entre parámetros estimados en cada modelo.

	No Correlacionada		AR(1)		AR(1) + VAR. HETER.	
	von Bertalanffy					
	β	κ	β	κ	β	κ
α	-0.4745	-0.9943	-0.7850	-0.9890	0.9990	-0.9900
β	---	0.5622	---	0.8580	---	-0.9880
	Logística					
	κ	m	κ	m	κ	m
α	-0.9695	-0.5627	-0.9620	-0.6970	-0.8110	0.9850
κ	---	0.7374	---	0.8330	---	-0.793
	Verhulst					
	β	κ	β	κ	β	κ
α	-0.5287	-0.8840	-0.6920	-0.9080	0.077	-0.3900
β	---	0.8502	---	0.8950	---	0.5010
	Gompertz					
	β	κ	β	κ	β	κ
α	-0.5903	-0.9756	-0.7450	-0.9700	0.9890	-0.8700
β	---	0.7463	---	0.8650	---	0.8560

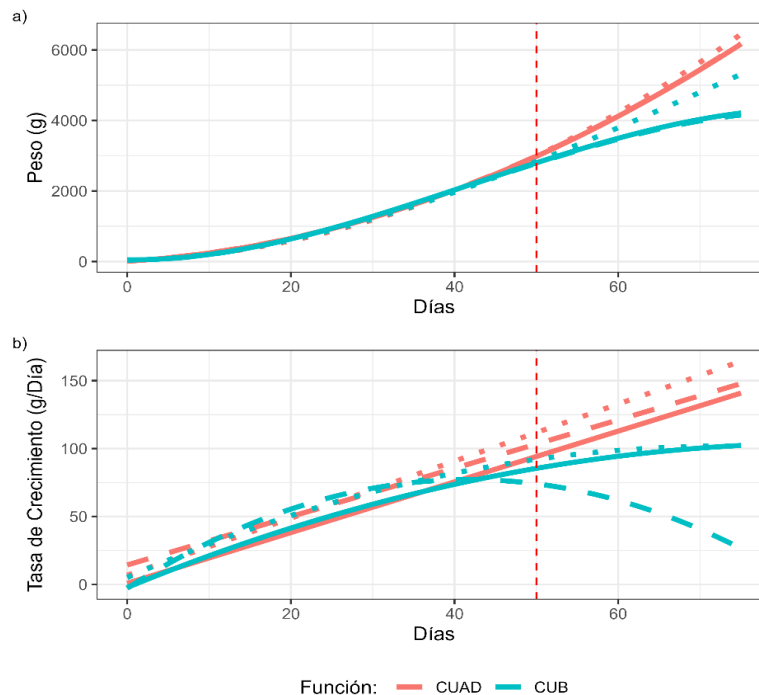
Los valores reportados para el parámetro estimado referente al parámetro de madurez ($\hat{\kappa}$) tienden a disminuir cuando se ajustan con una estructura residual heterocedástica y autocorrelacionada respecto a una estructura homocedástica e independiente, específicamente para los modelos de von Bertalanffy y Gompertz, mientras aumenta para los modelos logística y de Verhulst, lo que repercute en el tiempo de inflexión, ya que para todas las funciones, sea [4.1], [4.2], [4.3] y [4.4] sus valores estimados de este parámetro son inversamente proporcional a κ , por lo que el tiempo de inflexión se reduce a medida que aumenta κ ($\rho_{\kappa, TI} = -0.7054$). Los tiempos de inflexión (día) estimados rondan entre los 28 hasta los 68 días, destacando que el modelo de von Bertalanffy presentaba el tiempo de inflexión más largo, debido a sus bajos valores de κ , similar a lo reportado por Mouffok *et al.* (2019) y Demuner *et al.* (2017) en estudios de pollos de la línea Cobb, donde señalan que el modelo de von Bertalanffy estimaba los menores valores de κ respecto a los otros modelos, indicando que las aves de la muestra tenían una madurez menor a la indicada por los otros modelos.

Cabe señalar la fuerte correlación negativa entre los parámetros α y κ ($\rho < -0.80$) para casi todos los modelos ajustados, descritos en la Tabla 5, salvo para el modelo de Verhulst ajustado con una estructura de covarianza heterocedástica y correlacionada, en la que presenta una ligera correlación negativa entre ambos parámetros ($\rho = -0.39$). Brown *et al.* (1976) reporta esta tendencia en un estudio con ganado de raza Jersey, Brahman, cruces de Hereford y Brahman y Angus, donde se observa una correlación negativa de estos parámetros α y κ para las funciones ajustadas de von Bertalanffy, Gompertz, Logística, Richards y Brody bajo una estructura de covarianza residual independiente y homocedástica.



Figura 2

Comparación de las curvas de modelos polinómicos cuadrática (CUAD) y cúbica (CUB) ajustadas según una estructura residual independiente y homocedástica (línea sólida), estructura correlacionada AR(1) (línea rayada) y estructura heterocedástica y correlacionada AR(1) (línea punteada) para la variable crecimiento (a.) y la tasa de crecimiento (b.).



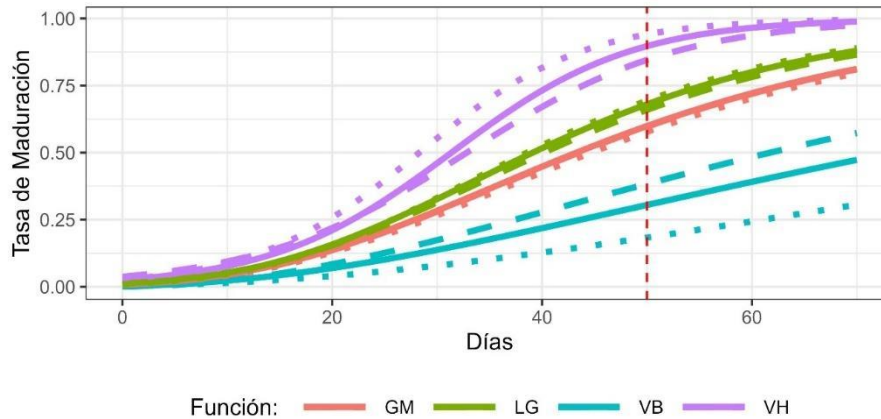
En relación a los modelos lineales polinómicos ajustados en este estudio, descritos en la Figura 2(a) y 2(b), si bien cierto tienen mayor ventajas de computación, al prescindir de valores iniciales requeridos para el proceso iterativo de estimación de parámetros en los modelos no lineales y presentan un ajuste razonable para los datos bajo las tres situaciones de estructura de covarianza residual, presentan menor ajuste de los datos con respecto a los modelos no lineales considerados en este estudio, en base a los valores de AIC y BIC.

La función cuadrática, al no tener punto de inflexión, no permite estimar tanto el tiempo y el peso de inflexión y según lo mostrado en la Figura 2(a) y 2(b) tiene una tasa de crecimiento ascendente a medida que aumenta la edad del ave ($\lim_{t \rightarrow \infty} y \rightarrow \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} y' \rightarrow \infty$), lo cual no corresponde con el comportamiento biológico de la especie. Además, ambas funciones no permiten estimar ciertos parámetros concernientes a aspectos productivos del crecimiento, como lo son el peso de madurez y la tasa de madurez.



Figura 3

Comparación de las curvas de la tasa de maduración de los modelos de von Bertalanffy (VB), Logística (LG), Verhulst (VH) y Gompertz (GM) ajustadas según una estructura residual independiente y homocedástica (línea sólida), estructura correlacionada AR(1) (línea rayada) y estructura heterocedástica y correlacionada AR(1) (línea punteada).



Los valores estimados de la tasa de maduración (TM) para los modelos no lineales ajustados pueden apreciarse en la Figura 3, que la función logística (LG) y de Gompertz (GM) tienen valores cercanos entre sí, mientras que la función de von Bertalanffy tiene a estimar menores valores que el resto de funciones utilizadas en este estudio para este parámetro, y la función de Verhulst estima mayores valores que el resto de funciones, tomando como referencia a los 40 días, y las funciones ya sean ajustados con una estructura residual independiente ($TM_{LG} = 0.5164$, $TM_{GM} = 0.4478$, $TM_{VB} = 0.2184$, $TM_{VH} = 0.7318$) correlacionada ($TM_{LG} = 0.4970$, $TM_{GM} = 0.4447$, $TM_{VB} = 0.2376$, $TM_{VH} = 0.6706$) y heterocedástica - correlacionada ($TM_{LG} = 0.5272$, $TM_{GM} = 0.4267$, $TM_{VB} = 0.1273$, $TM_{VH} = 0.8162$). La tasa de maduración, al ser estimado mediante una función inversamente proporcional al peso de madurez, disminuye a medida que aumenta el peso de madurez estimado ($\rho = -0.8464$), lo que explica que la función de von Bertalanffy, al ofrecer estimaciones de α mayores al resto, arroje valores menores de la tasa de maduración que el resto de las funciones evaluadas en cualquier punto de la edad del animal.

CONCLUSIONES

Se recomienda el ajuste de modelos no lineales con estructuras de covarianzas residuales correlacionadas por animal y heterocedásticas respecto a la edad, ya que se demuestra que las observaciones en general no siguen una homogeneidad de varianzas en el tiempo, y que las observaciones dentro del animal tienen una alta correlación, , ya que, dentro de un animal, lo cual, les hace tener un mejor ajuste respecto a los modelos no lineales ajustados bajo una estructura residual independiente y homocedástico, a pesar que requiere un mayor esfuerzo computacional en término de iteraciones requeridas para la convergencia del proceso de estimación paramétrica, pues agrega más parámetros al modelo.



Dentro de todas las situaciones de estructuras de covarianzas utilizadas, los modelos de Gompertz y Logística arrojaron mejor ajuste que el resto de los modelos ajustados en este estudio, lo cual se recomienda la conveniente utilización de estos modelos para el ajuste de datos longitudinales de crecimiento en pollos. Además, se sugiere el estudio del ajuste de funciones no lineales mediante metodologías como modelos no lineales mixtos o modelos regularizados (Ridge, Lasso) y a su vez, considerar el ajuste de modelos de regresión Splines o GAM en datos de crecimiento respecto al tiempo, para evaluar la calidad del ajuste de estas metodologías, bajo las condiciones propias del país.

AGRADECIMIENTO

Se agradece al personal técnico y en general, del Centro de Enseñanza e Investigación Agropecuaria de Chiriquí (CEIACHI) relacionados con el programa avícola, por su trabajo diario relacionado en el manejo de los pollos durante el ciclo productivo, lo cual permitió la toma de los datos utilizadas en este estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aggrey, S. E. (2002). Comparison of three nonlinear and spline regression models for describing chicken growth curves. *Poultry Science*, 73, 1822-6. <https://doi.org/10.1093/ps/81.12.1782>
- Asociación Nacional de Avicultores de Panamá. (12 de noviembre 2021). *Indicadores Económicos*. <https://www.anavip.org/index.php/indicadores-economicos/>
- Brown, J. E., Fitzhugh Jr., H. A., & Cartwright, T. C. (1976). A Comparison of Nonlinear Models for describing Weight-Age relationship in Cattle. *Journal of Animal Science*. 42(4), 810-817. <https://doi.org/10.2527/jas1976.424810x>
- Demuner, L. F., Suckeveris, D., Muñoz, J. A., Caetano, V. C., Lima, C. G. D., Faria, D. E. D., & Faria, D. E. D. (2017). Adjustment of growth models in broiler chickens. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, 52, 1241-1252. <https://doi.org/10.1590/S0100-204X2017001200013>
- Galán, I., Arando, A., González, A., Navas, F. J., Salgado, J. I., Díaz, E. y Camacho, M. E. (2023). Caracterización de las curvas de crecimiento biológico de la gallina Andaluza Azul, una raza local amenazada. *Archivos de Zootecnia*, 72(279), 172-177. <https://doi.org/10.21071/az.v72i279.5730>
- Marcu, A., Vacaru-opri, I., Dumitrescu, G., Petculescu, L., Marcu, A., Nicula, M., Pe, I., Dronca, D., Kelcirov, B., & Mari, C. (2013). The Influence of Genetics on Economic Efficiency of Broiler Chickens Growth. *Scientific Papers: Animal Science and Biotechnologies*, 46(2), 339–346. <http://spasb.ro/index.php/spasb/article/view/240/309>
- Mazucheli, J., Souza, R. D., & Philippsen, A. S. (2011). Modelo de crescimento de Gompertz na presença de erros normais heterocedásticos: um estudo de caso. *Revista Brasileira de*



- Biometria*, 29(1), 91-101. Recuperado de: https://biometria.ufla.br/antigos/fasciculos/v29/v29_n1/A7_mazucheli.pdf
- Mouffok, C., Semara, L., Ghoulmi, N., & Belkasmi, F. (2019). Comparison of Some Nonlinear Functions for Describing Broiler Growth Curves of Cobb500 Strain. *Poultry Science Journal*. 7(1): 51-61. 10.22069/psj.2019.15965.1386
- Nelder, J. A. (1961). The fitting of a generalization of the logistic curve. *Biometrics*, 17(1), 89-110. <https://doi.org/10.2307/2527498>
- Pascalau, S., Cadar, M., Raducu, C., & Marchis, Z. (2017). Evaluation of productive performances in Ross 308 and Cobb 500 hybrids. *Animal Biology & Animal Husbandry*, 9(1), 22-27. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Mirela-Cadar-2/publication/332497136_Evaluation_of_productive_performances_in_Ross_308_and_Cobb_500_hybrids/links/5cb85ab492851c8d22f352e5/Evaluation-of-productive-performances-in-Ross-308-and-Cobb-500-hybrids.pdf
- Pinheiro J. C., & Bates D. M. (2000). *Mixed-Effects Models in S and S-PLUS*. Springer, New York.
- R Core Team (2023). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>.
- Rosero, J. P., Guzman, E. F. y Lopez, F. J. (2012). Evaluación del comportamiento productivo de las líneas de pollos de engorde Cobb 500 y Ross 308. *Bioteología en el sector Agropecuario y Agroindustrial*, 10(1), 8-15. http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S1692-35612012000100002&script=sci_arttext
- Rostagno, H., Teixeira, L., Hannas, M., Juarez, D., Sakomura, N., Perazzo, F., Saraiva, A., Teixeira, M., Rodrigues, P., Oliveira, R., Barreto, S. y Brito, C. (2017). *Tablas Brasileñas para aves y cerdos: composición de alimentos y requerimientos nutricionales*. (4a ed.). Rostagno. Universidad Federal de Viçosa. <https://bitly.ws/UP9f>
- Ruíz, B. (Agosto de 2022). Latin America's 2021 growth restricted to broiler sector. *WattPoultry International*. Recuperado de https://www.poultryinternational-digital.com/poultryinternational/august_2022/MobilePagedArticle.action?articleId=1807213&app=false#articleId1807213
- Spiess, A. N., & Neumeyer, N. (2010). An evaluation of R^2 as an inadequate measure for nonlinear models in pharmacological and biochemical research: a Monte Carlo approach. *BMC Pharmacology*, 10(1), 1-11. <https://doi.org/10.1186/1471-2210-10-6>
- Verhulst, P. F. (1847). Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. 269. Hayez.
- von Bertalanffy, L. (1957). Quantitative laws in metabolism and growth. *The quarterly review of biology*, 32(3), 217-231. <https://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/401873>
- Wickham, H. (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York.



Winsor, C. P. (1932). The Gompertz curve as a growth curve. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 18(1), 1-8. <https://doi.org/10.1073/pnas.18.1.1>