

La geometría y su relación con el pensamiento espacial en la educación superior

Geometry and its relationship with spatial thinking in higher education

¹ Mariela González Murillo

Universidad de Panamá. Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnologías, Departamento de Matemática. Panamá. Email: mariela.gonzalezm@up.ac.pa.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2086-700X>

² Miguel Ángel Cañizales Mendoza

Universidad de Panamá. Facultad de Psicología, Departamento Psicología Industrial, Organizacional y Social. Panamá. E-mail: miguelangel.cañizales@up.ac.pa. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7433-2118>

³ Manuela Foster Vega

Universidad de Panamá. Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnologías, Departamento de Matemática. Panamá. Email: manuela.foster@up.ac.pa. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5601-1222>

⁴ Nayarith Yojairiz Gordon Walcott

Universidad de Panamá. Dirección de Investigación y Orientación Psicológica. Panamá. Email: Nayaruth.gordonr@up.ac.pa.

Fecha de recepción: 6 de julio de 2024

Fecha de aceptación: 23 de octubre de 2024



DOI <https://doi.org/10.48204/red.v4n1.6614>

Resumen

Este estudio examina la relación entre el aprendizaje de la geometría y el desarrollo de habilidades del pensamiento espacial en estudiantes de primer año 2023, de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología de la Universidad de Panamá. Se utilizó un enfoque cuantitativo de tipo correlacional, con un diseño preexperimental con pruebas pretest y postest en un solo grupo de estudiantes. La muestra final estuvo compuesta por 20 participantes, seleccionados mediante un muestreo no probabilístico por conveniencia, aunque inicialmente se había previsto contar con 29 participantes. Para la obtención de información, se utilizaron dos instrumentos: un cuestionario de 20 ítems que midió el aprendizaje de la geometría y la prueba psicométrica estandarizada Batería General de Pruebas de Aptitud (GATB) para evaluar el pensamiento espacial. El análisis estadístico realizado mediante la Prueba del Coeficiente de Correlación de Pearson mostró una relación significativa entre las dos variables. La correlación, que inicialmente era moderada, tendió a fuerte,

lo que sugiere que un mayor desarrollo del pensamiento espacial está asociado con un mejor desempeño en geometría, reduciendo la posibilidad de un bajo rendimiento en esta materia.

Palabras claves: Geometría, Pensamiento Espacial, Aprendizaje, Cognición, Educación Matemática.

Abstract

This study investigates the relationship between geometry learning and the development of spatial thinking skills in first year students of the Faculty of Natural, Exact and Technological Sciences of the University of Panama, year 2023. A quantitative correlational approach was used, with a pre-experimental design of pretest and posttest evaluation in a particular group of students. The final sample consisted of twenty participants, selected by means of non-probabilistic convenience sampling, although it was initially planned to have twenty-nine participants. Two instruments were used for data collection: a 20-item questionnaire measuring geometry learning and the standardized psychometric General Aptitude Test Battery (GATB) to assess spatial thinking. Statistical analysis, performed using Pearson's correlation, showed a significant relationship between the two variables. The correlation, initially moderate, tended to become strong, suggesting that greater development of spatial thinking is associated with better performance in geometry, reducing the probability of deficient performance in this subject.

Key words: Geometry, Spatial Thinking, Learning, Cognition, Mathematics Education.

Introducción

La Matemática, pilar fundamental en el desarrollo del pensamiento lógico y el razonamiento, se entrelazan con diversos campos del conocimiento, contribuyendo a la formación de habilidades y competencias importante para la participación activa en la vida productiva de una nación. En este contexto, la geometría, rama que explora las formas compuestas por líneas y curvas, se erige como un claro ejemplo de la aplicación práctica de las matemáticas en campos como la arquitectura y la ingeniería civil.

Desde la antigua Grecia, la exploración de las formas geométricas ha fascinado a la humanidad. Considerada una de las ramas más intuitivas y tangibles de la matemática, la geometría no sólo permite la resolución de problemas concretos y una mejor comprensión de nuestro entorno (Hershkowitz et al., 1994), sino que también fomenta el desarrollo de habilidades esenciales como el pensamiento crítico, la intuición, la resolución de problemas, la formulación de conjeturas, el razonamiento deductivo y la argumentación lógica (Jones, 2003).

El aprendizaje de la geometría desempeña un gran papel en la enseñanza de la matemática. Según la teoría de Van Hiele (1986), este aprendizaje se desarrolla de forma gradual, desde el reconocimiento básico de formas hasta la comprensión abstracta de conceptos geométricos. Este proceso no sólo fortalece las habilidades matemáticas, sino que también promueve el desarrollo del razonamiento espacial, una habilidad fundamental en diversas disciplinas y profesiones (Battista, 1999). Duval (1998) destaca que la enseñanza y el aprendizaje de la geometría implican al menos tres actividades cognitivas esenciales: construcción, razonamiento y visualización.

El pensamiento espacial, según la definición de Lohman (1979), es la capacidad de generar, retener y manipular imágenes visuales abstractas, y es un componente clave en el aprendizaje de la geometría. Clements y Battista (1982) sostienen que el pensamiento científico se basa en gran medida en el

pensamiento espacial para la transmisión y presentación de información durante los procesos de aprendizaje y resolución de problemas. Gómez Morales (2018) refuerza esta noción al afirmar que el pensamiento espacial abarca la capacidad de visualizar y manipular objetos que no existen físicamente dentro de un espacio determinado.

En la educación superior, la geometría igualmente desempeña un papel crucial en el desarrollo de habilidades cognitivas esenciales para el éxito académico y profesional en diversas disciplinas (Gardner, 1983; Piaget, 1952; Bruner, 1966). Esta rama de la matemática no solo fomenta habilidades como la visualización, el razonamiento espacial y la comprensión de las relaciones espaciales, sino que también cobra cada vez mayor relevancia en un mundo impulsado por la tecnología y la innovación (Sorby, 2009; Lave y Wenger, 1991; Sweller, Ayres y Kalyuga, 2011). Gardner (1983) en su teoría de las inteligencias múltiples, reconoce el razonamiento espacial como una inteligencia fundamental, en campos como la ingeniería, la arquitectura y las artes visuales.

La conexión intrínseca entre el aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial está respaldada por diversas teorías en psicología cognitiva, pedagogía y educación matemática. Piaget (1952) enfatiza la importancia de la manipulación y visualización de objetos para el crecimiento cognitivo, mientras que Bruner (1966) abogó por la integración de tres tipos de representación (enactiva, icónica y simbólica) para enriquecer la experiencia de aprendizaje en esta rama de la matemática. Desde una perspectiva sociocultural, Lave y Wenger (1991) sostienen que su aprendizaje, se beneficia de un enfoque situado en contextos de la vida real. Por otro lado, la teoría de la carga cognitiva subraya la importancia de gestionar de manera eficiente esa carga durante la instrucción en geometría (Sweller, Ayres y Kalyuga, 2011).

Numerosos estudios científicos también destacan la importancia del aprendizaje de la geometría y su impacto en el desarrollo del pensamiento espacial. Uttal et al. (2013) demuestran que la enseñanza explícita de conceptos espaciales mejora significativamente estas habilidades, que son transferibles a otros dominios como las matemáticas y las ciencias. Newcombe y Stieff (2012) destacan la importancia del pensamiento espacial en los campos STEM, mientras que Sorby (2009) observa mejoras notables en los estudiantes de ingeniería que participaron en cursos de desarrollo espacial. Cheng y Mix (2014) encontraron que la instrucción centrada en las habilidades espaciales impacta positivamente en las habilidades matemáticas. Además, Wai, Lubinski y Benbow (2009) muestran que las habilidades espaciales tempranas pueden predecir el éxito en las carreras STEM.

Es importante destacar que el movimiento de las Matemáticas Modernas, surgido en la década de 1960, tuvo un impacto significativo en la enseñanza de la geometría. Este movimiento, liderado por matemáticos franceses promotores del formalismo y la teoría de conjuntos, limitó el acceso al conocimiento geométrico y, en consecuencia, el desarrollo del pensamiento espacial y la visualización (Guzmán, 1989). Las repercusiones de este movimiento aún se sienten en algunos sistemas educativos, incluido el panameño, donde la geometría ha experimentado un “descuido injustificado desde una perspectiva didáctica, histórica y científica” (Guzmán, 1989).

El sistema educativo actual tiende a dejar de lado las habilidades cognitivas relacionadas con el pensamiento espacial y la enseñanza de la geometría básica. Como señalan Abrate, Delgado y Pochulu (2006), la presión de un currículo académico extenso lleva a muchos docentes a priorizar la aritmética y el álgebra. Sin embargo, esta priorización puede afectar negativamente el desarrollo de la orientación espacial y las habilidades de pensamiento espacial de los estudiantes. Báez e Iglesias (2007) añaden que la enseñanza de la geometría a menudo se ve obstaculizada por la falta de comprensión de su importancia o por deficiencias en el dominio de los conceptos geométricos por parte de los docentes. En este contexto, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál es la relación entre el aprendizaje de la geometría y el desarrollo de habilidades de pensamiento espacial en los estudiantes de primer

año del año 2023 de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnológicas de la Universidad de Panamá?. Esto se constituye en el objetivo de este estudio.

Aunque la importancia de la geometría y el pensamiento espacial es innegable, existe una notable falta de estudios sobre este tema en América Latina. La mayor parte de las investigaciones provienen de países como Estados Unidos, Reino Unido, Australia y Alemania, lo que revela un vacío en la investigación educativa en el contexto latinoamericano, particularmente en Panamá. Esta falta de estudios locales limita la capacidad de adaptar estrategias pedagógicas efectivas y culturalmente relevantes que podrían mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y el pensamiento espacial en la región.

Además, esta investigación pretende, concientizar a las autoridades educativas sobre la importancia de fortalecer la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, promoviendo así la toma de decisiones basadas en evidencias que puedan servir de base para futuras políticas educativas. Se espera que este estudio contribuya al desarrollo de habilidades cognitivas esenciales, ampliando las oportunidades de éxito académico y profesional de los estudiantes. Adicionalmente, este conocimiento ayudará a los estudiantes a desarrollar habilidades espaciales cruciales para su éxito en campos relacionados con las ciencias naturales y la tecnología.

Materiales y métodos

Este estudio, con un enfoque cuantitativo correlacional, utilizó un diseño preexperimental, que incluyó la aplicación de una evaluación inicial y una final al mismo grupo de participantes. La población estuvo compuesta por 63 estudiantes de primer año de la Licenciatura en Matemática, distribuidos en 33 del turno matutino y 30 del turno nocturno. La selección de la muestra fue intencional, basada en criterios como el año de ingreso, la edad y las asignaturas cursadas. Tras un proceso de selección y depuración, la muestra definitiva quedó compuesta por 20 estudiantes del turno matutino, ya que seis abandonaron la carrera y otros seis solo completaron una de las dos pruebas, ya sea el pretest o el postest. Cabe señalar que el grupo del turno nocturno participó únicamente en la prueba piloto del instrumento de conocimientos básicos de geometría, cuyo objetivo era evaluar la confiabilidad y validez de este.

Para analizar la relación entre las variables de estudio, se utilizaron dos tipos de evaluaciones diferentes. La primera fue la General Aptitude Test Battery (GATB), prueba psicométrica estandarizada ampliamente reconocida para medir diferentes habilidades cognitivas, incluyendo el razonamiento espacial. La GATB ha sido validada por su confiabilidad en la evaluación de aptitudes cognitivas y perceptuales, particularmente en la capacidad espacial (Hartigan y Wigdor, 1989; Mellon et al., 1996; US Department of Labor, 1983). Esta prueba fue aplicada por un equipo de psicólogos, quienes también se encargaron de sistematizar los datos obtenidos. Las dos variables de interés fueron evaluadas tanto antes como después del curso de Geometría I. La segunda evaluación fue diseñada específicamente para este estudio, con el propósito de medir los conocimientos básicos de geometría de los participantes. Esta prueba objetiva abarcó contenidos del Programa Oficial de Matemáticas del Ministerio de Educación de Panamá, centrados en los temas de geometría correspondientes desde séptimo a noveno grado.

Se llevó a cabo una prueba piloto para evaluar la confiabilidad y validez del instrumento diseñado para medir los conocimientos geométricos básicos. Los datos fueron procesados utilizando el

Coeficiente de Kuder-Richardson (KR-20), obteniendo un valor de $r = 0.84$, lo que sugiere una confiabilidad adecuada. Además, el instrumento fue sometido a Juicio de Expertos, en el que participaron cuatro especialistas con más de 20 años de experiencia en la enseñanza de la geometría. Se alcanzó un acuerdo del 93 %, lo que se considera un excelente nivel de concordancia, permitiendo así la implementación de la prueba. El Coeficiente de Validez de Contenido (CVC) arrojó un valor de 0,93, lo que refleja una alta validez del instrumento. Como resultado de esta evaluación, se eliminaron cinco ítems, quedando la prueba final reducida a 20 ítems, de los cuales nueve se centraban en conceptos y propiedades, tres en visualización, tres en razonamiento y modelado geométrico, uno en medición y otro en simetría.

La recolección de datos comenzó a principios de abril de 2023, durante el turno matutino. Los psicólogos administraron el pretest de la GATB, cuya duración aproximada fue de 90 minutos. Al día siguiente, se aplicó la prueba de conocimientos básicos de geometría (pretest), con una duración de 45 minutos. Posteriormente, los estudiantes asistieron al curso de Geometría I, el docente no participó directamente en la investigación; tampoco se alteró el contenido del curso para los fines del estudio. Al concluir el curso a finales de junio, se aplicarán nuevamente las mismas pruebas (postest) en el mismo orden y con la misma duración: primero la prueba psicométrica GATB y, al día siguiente, la prueba de conocimientos básicos de geometría.

Los resultados obtenidos del pretest y postest de la GATB, que proporcionaron los datos para la variable "Desarrollo del Pensamiento Espacial", fueron organizados, tabulados y analizados por expertos de la Dirección de Investigación y Orientación Psicológica de la Universidad de Panamá. Asimismo, los resultados del pretest y postest de la prueba de conocimientos geométricos, que aportaron información sobre la variable "Aprendizaje de la Geometría", fueron procesados utilizando Microsoft Office Excel, a través del cual se calcularon los estadísticos descriptivos como la media, la varianza, la desviación estándar, así como los valores máximos y mínimos para ambas evaluaciones. Para el análisis de la relación entre las variables de estudio, se empleó la Prueba de correlación de Pearson, y para comparar los resultados obtenidos en el pretest y postest se utilizó la Pruebas t-Student para muestras relacionadas. El análisis estadístico fue realizado con el programa SPSS versión 25.

Todos los participantes aceptaron firmar el consentimiento informado, asegurándose la privacidad de la información suministrada mediante la asignación de códigos de identificación anónimos.

Resultados y discusión

Resultados

Con el objetivo de recopilar información sobre las variables de estudio, se administró una batería de pruebas que incluía el General Aptitude Test Battery (GATB) y una evaluación de conocimientos básicos en geometría. La muestra inicial, compuesta por 29 estudiantes, se redujo a 20 participantes debido a factores como la deserción académica y la incompletitud en la aplicación de los instrumentos de medición. Los resultados obtenidos, presentados en las Tablas 1 y 2, permiten caracterizar los niveles de aprendizaje geométrico y el desarrollo del pensamiento espacial, respectivamente, en los estudiantes de primer semestre 2023 de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología de la Universidad de Panamá.

Tabla 1*Escala de Evaluación de los Resultados de la Prueba de Conocimiento Básico de Geometría*

Intervalos	Categorías	Interpretación
0 – 10	Bajo	Nivel bajo de conocimiento en geometría o aprendizaje de la geometría
11 – 14	Regular	Nivel regular de conocimiento en geometría o aprendizaje de la geometría
15 – 20	Alto	Nivel alto de conocimiento en geometría o aprendizaje de la geometría

Tabla 2*Escala de resultados de la Prueba Psicométrica GATB para el Factor Espacial*

Intervalos	Categorías	Interpretación
70 – 89	Bajo	Bajo nivel del desarrollo de pensamiento espacial
89 – 100	Medio	Nivel regular del desarrollo de pensamiento espacial
100 – 250	Alto	Alto nivel del desarrollo de pensamiento espacial

Nota. La tabla se confeccionó de los datos suministrados por la Dirección de Investigación y Orientación Psicológica de la Universidad de Panamá.

Los resultados del pretest y postest, presentados en la Tabla 3, muestran un incremento positivo en el desempeño de los estudiantes tanto en el aprendizaje en geometría como en el desarrollo del pensamiento espacial. Al comparar los puntajes obtenidos en ambas evaluaciones, se observa una tendencia al aumento en los puntajes en el postest, lo que sugiere una mejora significativa en ambas variables. Específicamente, la distribución de los puntajes en el postest se desplaza hacia rangos más altos, lo que indica un progreso en la comprensión de los conceptos geométricos y en la capacidad para visualizar y manipular objetos espaciales. Estos resultados apoyan la hipótesis de que la intervención pedagógica implementada (Curso de Geometría I) ha tenido un impacto positivo en el desarrollo de estas habilidades cognitivas.

Tabla 3

Datos Obtenidos de la Prueba Pretest y Postest de las variables Aprendizaje de la Geometría y Desarrollo del Pensamiento Espacial

Aprendizaje de la Geometría						Desarrollo del Pensamiento Espacial					
Pretest			Postest			Pretest			Postest		
Puntaje	<i>f</i>	%	Puntaje	<i>f</i>	%	Puntaje	<i>f</i>	%	Puntaje	<i>f</i>	%
3	1	5	6	3	15	79	1	5	82	2	10
4	2	10	7	2	10	82	1	5	83	1	5
5	2	10	8	2	10	83	1	5	86	1	5
6	3	15	9	4	20	86	4	20	92	3	15
7	2	10	10	2	10	89	3	15	99	3	15
8	5	25	11	1	5	99	2	10	102	3	15
10	2	10	12	2	10	102	4	20	105	1	5
12	3	15	13	2	10	109	3	15	109	1	5
			15	1	5	115	1	5	112	2	10
			16	1	5				115	1	5
									125	1	5
									128	1	5
N=20		100	N=20		100	N=20		100	N=20		100

El análisis de los datos obtenidos en el pretest y postest revela una mejora significativa tanto en el aprendizaje de la geometría como en el desarrollo del pensamiento espacial. En cuanto al aprendizaje de geometría, se observa una disminución del 20 % en el porcentaje de estudiantes con un bajo nivel de conocimientos, junto con un incremento del 15 % en aquellos que alcanzan un nivel regular y una proporción leve pero significativa (5%) que logró un nivel alto. Respecto al desarrollo del pensamiento espacial, los resultados son igualmente prometedores, con una reducción del 30 % en el porcentaje de estudiantes con bajo desarrollo y un aumento del 20 % en aquellos que alcanzaron un nivel intermedio. Además, se registra un incremento del 10 % en el porcentaje de estudiantes con un alto nivel de desarrollo. Estos resultados confirman la efectividad del curso de Geometría en la promoción de estas habilidades cognitivas.

Tabla 4

Distribución de Frecuencia de las Categorías de las Variables Aprendizaje de la Geometría y el Desarrollo del Pensamiento Espacial en el Pretest y Postest

Variables	Pretest				Postest			
	Aprendizaje de la Geometría				Aprendizaje de la Geometría			
Desarrollo de Pensamiento Espacial	Bajo	Regular	Alto	Total	Bajo	Regular	Alto	Total
Bajo	10 50%	0 0%	0 0%	10 50%	4 20%	0 0%	0 0%	4 20%
Medio	2 10%	0 0%	0 0%	2 10%	6 30%	0 0%	0 0%	6 30%
Alto	5 25%	3 15%	0 0%	8 40%	3 15%	6 30%	1 5%	10 50%
Total	17 85%	3 15%	0 0%	20 100%	13 65%	6 30%	1 5%	20 100%

Prueba de la normalidad en el pretest y postest de las variables Aprendizaje de la Geometría y Desarrollo del Pensamiento Espacial

Con el propósito de determinar la prueba estadística más apropiada para el análisis de los datos, se llevó a cabo una evaluación preliminar de la normalidad de la distribución de las variables "Aprendizaje de la Geometría" y "Desarrollo del Pensamiento Espacial", en ambos momentos de la medición (pretest y postest). Dado el tamaño reducido de la muestra (20 estudiantes), se decidió utilizar la prueba de Shapiro-Wilk, un método estadístico ampliamente empleado para evaluar la normalidad en muestras pequeñas. Se fijó un nivel de significancia de $\alpha = .05$ con el fin de identificar si las distribuciones se desviaban de manera significativa de la normalidad. Los criterios establecidos fueron los siguientes:

- $p\text{-valor} > \alpha = .05$; los datos presentan una distribución normal.
- $p\text{-valor} < \alpha = .05$; los datos no presentan una distribución normal.

Los resultados de esta prueba, presentados en la Tabla 5, indican que los valores de p obtenidos para ambas variables, en los dos momentos evaluados, superan el umbral de .05. En cuanto a la variable

Aprendizaje de Geometría, los niveles de significancia tanto en el pretest ($p = .3154$) como en el postest ($p = .3094$) son superiores a $.05$, lo que sugiere que los datos de esta variable siguen una distribución normal. De manera similar, los niveles de significancia para la variable Desarrollo del Pensamiento Espacial en el pretest ($p = .1467$) y postest ($p = .450$) también superan el umbral de $.05$. Esto indica que no se encontraron suficientes evidencias para rechazar la hipótesis nula de normalidad, lo que confirma que los datos se ajustan a una distribución normal.

En consecuencia, se justificó el uso de pruebas estadísticas paramétricas para el análisis subsiguiente. En este caso, se seleccionó la prueba t de Student para muestras relacionadas con el objetivo de comparar las medias del pretest y postest de cada variable, y se empleó el Coeficiente de Correlación de Pearson para examinar la relación entre ambas variables.

Tabla 5

Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk

Variable		Shapiro- Wilk		
		Estadístico	gl	Sig.
Aprendizaje de la Geometría	pretest	0.9410	20	.3154
	postest	0.9404	20	.3094
Desarrollo de Pensamiento Espacial	pretest	0.9245	20	.1467
	postest	0.9541	20	.4500

Nota. gl: Grado de libertad; Sig.: Nivel de significancia

Prueba t de Student para muestras relacionadas variable Aprendizaje de la Geometría

Los pasos seguidos para llevar a cabo esta prueba fueron los siguientes:

1. Formulación de las hipótesis:

- H_0 : No hay una diferencia significativa entre las medias de los puntajes obtenidos en el pretest y postest de la variable Aprendizaje de la Geometría.
- H_a : Existe una diferencia significativa entre las medias de los puntajes obtenidos en el pretest y postest de la variable Aprendizaje de la Geometría.

2. Nivel de significancia: Se definió un nivel de significancia de $\alpha = .05$ (5%).

3. Selección de la prueba estadística: Como se indica en la Tabla 5, los niveles de significancia obtenidos en las mediciones del pretest y postest para la variable Aprendizaje de la Geometría superan el umbral de $p = .05$, lo que sugiere que los datos presentan una distribución normal. Por lo tanto, se decidió emplear pruebas estadísticas paramétricas, como la prueba t de Student para muestras relacionadas, para el análisis de los datos, utilizando el software SPSS, versión 25.

Tabla 6

Prueba t-Student para Muestras Relacionadas Variable Aprendizaje de la Geometría

	Pretest	Postest	t	gl.	d
--	---------	---------	---	-----	---

Variable	Media (M)	Desviación estándar (DE)	Media (M)	Desviación estándar (DE)	t	gl.	Sig. (bilateral)	d
Aprendizaje de la Geometría	7.45	3.10	9.80	2.95	4.76	19	< .0001	.83

Nota. Sig. (bilateral): Nivel de significancia; gl: Grado de libertad; t: valor t Student; d: valor d de Cohen

4. Decisión: El análisis de los datos mediante la prueba t de Student para muestras relacionadas, presentado en la Tabla 6, evidencia una mejora sustancial en el rendimiento de los estudiantes en el área de geometría tras la implementación del curso. Los puntajes medios obtenidos en el postest (M = 9.80, DE = 2.95) superan de manera significativa a los obtenidos en el pretest (M = 7.45, DE = 3.10), como lo demuestra el valor de t (t = 4.76, gl = 19, p < .0001). El tamaño del efecto, estimado en d = 0.83, indica que el curso ha tenido un efecto práctico y relevante sobre el aprendizaje de los estudiantes.

Prueba t de Student para muestras relacionadas variable Desarrollo del Pensamiento Espacial

Para realizar esta prueba se siguieron estos pasos:

1. Planteamiento de las hipótesis:

Ho: No existe una diferencia significativa en las medias de los promedios obtenidos en el Pretest y Postest de la variable Desarrollo del Pensamiento Espacial

Ha: Existe una diferencia significativa en las medias de los promedios obtenidos en el Pretest y Postest de la variable Desarrollo del Pensamiento Espacial

2. Nivel de significancia. $\alpha = 5\%$ (p = .05)

3. Elección de Prueba Estadística: Para evaluar la normalidad de las distribuciones de las variables 'Aprendizaje de la Geometría' y 'Desarrollo del Pensamiento Espacial', se llevó a cabo la prueba de Shapiro-Wilk. Los resultados, presentados en la Tabla 5, indican que ambas variables cumplen con el supuesto de normalidad (p > .05), lo cual justifica el uso de pruebas paramétricas como la prueba t de Student con el programa SSPS versión 25.

Tabla 7

Prueba t-Student con Muestras relacionadas: Variable Desarrollo del Pensamiento Espacial

Variable	Pretest		Postest		t	gl.	Sig. (bilateral)	d
	Media (M)	Desviación Estándar (DE)	Media (M)	Desviación Estándar (DE)				
Desarrollo del Pensamiento Espacial	94.75	10.32	100.9	13.28	3.76	19	.0013	.52

Nota. Sig.(bilateral): Nivel de significancia; gl: Grado de libertad; t: valor de t-Student; d: valor de d de Cohen

4. Decisión: El análisis de los datos, mediante la prueba t de Student para muestras relacionadas, como se muestra en la Tabla 7, indica que el curso de Geometría I ha tenido un impacto positivo y significativo en el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes. Los puntajes medios obtenidos en el postest ($M = 100.9$, $DE = 13.28$) superan de manera considerable a los obtenidos en el pretest ($M = 94.75$, $DE = 10.32$), como lo demuestra el valor de t ($t = 3.76$, $gl = 19$, $p = .0013$). El tamaño del efecto, estimado en $d = 0.52$, sugiere una mejora moderada pero consistente en las habilidades espaciales de los estudiantes.

Prueba de hipótesis

Para comprobar las hipótesis se realizan los siguientes pasos:

1. Planteamiento de las hipótesis

Ha: Existe una relación significativa entre el Aprendizaje de Geometría y el Desarrollo del Pensamiento Espacial en los estudiantes de primer año 2023, de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología de la Universidad de Panamá.

Ho: No existe una relación significativa entre el Aprendizaje de Geometría y el Desarrollo del Pensamiento Espacial en los estudiantes de primer año 2023, de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología de la Universidad de Panamá.

2. Establecimiento del Nivel de significancia. Alfa = $\alpha = 5\% = .05$

3. Prueba de Normalidad: Los resultados de las pruebas de normalidad de las variables de estudio se muestra en la Tabla 5, indicando que ambas variables cumplen con el supuesto de normalidad ($p > 0.05$), lo cual justifica el uso de pruebas paramétricas, tal como la Prueba de Coeficiente de Correlación de Pearson.

4. Estadístico de Prueba: Para este análisis, se emplearon los datos obtenidos en las evaluaciones de pretest y postest correspondientes a ambas variables de estudio. Asimismo, se llevó a cabo el cálculo del Coeficiente de Correlación de Pearson utilizando el software SPSS, versión 25. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 8.

Tabla 8

Prueba de Correlación de Pearson: Variables de Aprendizaje de la Geometría y del Desarrollo del Pensamiento Espacial en el Pretest y Postest

Aprendizaje de Geometría y Desarrollo del Pensamiento Espacial	N	r	IC 95 %		R ²	Sig.(bilateral)
			p _i	p _s		
Pretest	20	.541	0.13 a 0.79		0.2934	.0136
Postest	20	.821	0.59 a 0.93		0.673	<.0001

Nota. N: tamaño de la muestra; r: Coeficiente de Correlación de Pearson; IC 95%: Intervalo de confianza al 95%; p_i: Límite Inferior; p_s: Límite Superior; R²: Coeficiente de determinación; Sig.(bilateral): Nivel de significancia.

5. Decisión e interpretación

Los resultados del análisis de evaluación de Pearson, presentados en la Tabla 8, muestran una evolución notable en la relación entre el aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial a lo largo del curso. Durante el pretest, se identificó una calificación positiva moderada ($r =$

0.541, $p = .0136$), que se fortaleció considerablemente en el postest ($r = 0.821$, $p < .0001$), lo que indica una asociación positiva muy fuerte. El aumento en el coeficiente de determinación (R^2), de 0.2934 a 0.673, sugiere que el aprendizaje de la geometría explica una proporción significativamente mayor de la variabilidad en el desarrollo del pensamiento espacial tras la intervención educativa. Estos resultados respaldan la aceptación de la hipótesis alterna y el rechazo de la hipótesis nula en ambas mediciones, pretest y postest, estableciendo una relación significativa entre el Aprendizaje de la Geometría y el Desarrollo del Pensamiento Espacial en los estudiantes.

Discusión

Este estudio evidencia que la enseñanza de la geometría desempeña un papel decisivo en el fortalecimiento del pensamiento espacial, proporcionando pruebas concluyentes de que una formación geométrica bien estructurada puede mejorar considerablemente estas capacidades en los estudiantes panameños. Este impacto no solo se refleja en un mejor desempeño académico, sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar retos cognitivos y profesionales.

Los resultados obtenidos permitieron responder las preguntas de investigación y cumplir con los objetivos planteados, ya que se encontró una evaluación significativa y positiva entre el aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial. En el pretest, el coeficiente de cotización de Pearson fue de 0.541, lo que indica una relación moderada con un nivel de significancia de $p = .0136$, inferior a $\alpha = .05$, demostrando relevancia estadística. En el postest, esta evaluación aumentó a 0.821, indicando una relación fuerte con un p -valor $< .0001$, reafirmando una alta significancia estadística. Estos hallazgos respaldan la hipótesis alternativa y permiten rechazar la hipótesis nula, demostrando una relación estadísticamente significativa entre el aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes de la muestra. La relación entre el aprendizaje de la geometría y el pensamiento espacial se apoya en teorías planteadas por Gardner (1983), Piaget (1952), Bruner (1960), Lave (1988), Wenger (1998) y Sweller (1988), quienes sostienen que la enseñanza de la geometría no solo fortalece habilidades matemáticas específicas, sino que también promueve el desarrollo del pensamiento espacial, una capacidad cognitiva clave.

Uno de los resultados más relevantes es que los estudiantes de primer año del primer semestre de la Licenciatura en Matemática comenzaron con un bajo nivel de conocimientos en geometría, con un promedio de 7.45 puntos en el pretest. Este hallazgo está en consonancia con lo señalado por Báez e Iglesias (2007), quienes indicaron que la geometría no se enseña adecuadamente debido a la falta de preparación de los docentes o al escaso dominio de los contenidos geométricos. Sin embargo, nuestro estudio mostró que el curso de Geometría I fue decisivo para alcanzar resultados positivos. Es importante resaltar que el docente encargado del curso no estuvo involucrado en la investigación y que el contenido del curso no fue alterado para ajustarse a los objetivos del proyecto.

Por otro lado, los estudiantes partieron de un nivel intermedio en cuanto al desarrollo del pensamiento espacial, con un puntaje inicial de 95 puntos, que aumentó significativamente tras el curso, alcanzando los 101 puntos en el postest. Este incremento pone de manifiesto el impacto positivo del curso de Geometría I, el cual se caracterizó por su enfoque en el razonamiento abstracto y deductivo, en la mejora de esta habilidad. El estudio de Newcombe y Stieff (2012) también señala que la capacidad de pensamiento espacial está estrechamente vinculada con el desempeño en tareas complejas de pensamiento y resolución de problemas, habilidades que deben ser desarrolladas desde etapas tempranas y durante toda la educación formal.

El principal aporte de esta investigación radica en la evidencia empírica que respalda la existencia de una tensión fuerte y significativa entre el aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial. Este descubrimiento subraya la importancia de sensibilizar a los docentes de matemáticas sobre la necesidad de impartir una enseñanza de geometría de calidad en todos los niveles educativos en Panamá, promoviendo así el desarrollo de habilidades cognitivas esenciales. En términos generales, los resultados obtenidos se alinean con los objetivos y la hipótesis de la investigación, que postulaba la existencia de una relación entre el aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial, confirmada con un alto nivel de significancia estadística tanto en el pretest como en el postest. El propósito del estudio, que era demostrar esta relación, fue alcanzado con éxito y con relevancia estadística.

Desde una perspectiva metodológica, los resultados fueron satisfactorios, aunque se identifican algunas limitaciones. La disminución en el tamaño de la muestra, debido a la deserción y la incapacidad de algunos estudiantes para completar ambas pruebas, afectó la representatividad de los datos. Además, la falta de un grupo de control limita la generalización de los resultados. No obstante, los resultados obtenidos son replicables en otros contextos educativos, siempre que se empleen metodologías similares y se asegure la calidad del curso de geometría. La metodología utilizada es aplicable a diferentes niveles educativos para evaluar la relación entre el aprendizaje geométrico y el desarrollo del pensamiento espacial.

Este estudio establece un precedente importante para futuras investigaciones en el campo de la educación matemática y el desarrollo cognitivo. Al proporcionar evidencia sólida sobre la importancia del aprendizaje geométrico en el desarrollo de habilidades de pensamiento espacial, este trabajo tiene el potencial de influir significativamente en el diseño de políticas educativas y en la implementación de prácticas pedagógicas.

Conclusiones

Este estudio evidencia de manera concluyente la relación significativa entre el aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes de primer año 2023, de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología de la Universidad de Panamá. A través de un enfoque cuantitativo de tipo correlacional, se logró observar y analizar dicha relación mediante la aplicación de la prueba psicométrica GATB y una evaluación de conocimientos básicos en geometría.

Los resultados muestran una mejora notable en el aprendizaje de la geometría después de cursar Geometría I. En el pretest, el 85 % de los estudiantes presentó un nivel bajo de conocimiento en geometría, cifra que disminuyó al 65 % en el postest, lo que indica un avance positivo. Además, el porcentaje de estudiantes con un nivel de aprendizaje regular aumentó del 15 % en el pretest al 30 % en el postest, mientras que un 5 % alcanzó un nivel alto de conocimiento. De igual manera, se observó un progreso significativo en el desarrollo del pensamiento espacial: el porcentaje de estudiantes con bajo desarrollo de pensamiento espacial descendió del 50 % en el pretest al 20 % en el postest. El número de estudiantes con un desarrollo medio y alto de pensamiento espacial también incrementó, lo que refleja una clara mejora en estas habilidades tras el curso.

La prueba t de Student para muestras relacionadas demostró que el curso de Geometría tuvo un impacto significativo tanto en el aprendizaje de la geometría como en el desarrollo del pensamiento espacial. Las mejoras observadas en los medios de los puntajes entre el pretest y postest, junto con los tamaños del efecto calculados, indican que el curso fue efectivo en promover estas competencias.

El Coeficiente de Pearson arrojó una variación positiva moderada entre el aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial en el pretest, la cual se incrementó a una variación positiva muy fuerte en el postest. Este aumento sugiere que el aprendizaje de la geometría está fuertemente relacionado con el desarrollo del pensamiento espacial, y que el curso de Geometría contribuyó a fortalecer esta relación.

Estos resultados destacan la relevancia de una enseñanza efectiva de la geometría en los niveles de educación básica y media, para fomentar un aprendizaje sólido en esta disciplina. Las mejoras observadas en los estudiantes enfatizan la necesidad de priorizar el desarrollo de habilidades espaciales y geométricas dentro de los planos de estudio, especialmente en áreas relacionadas con la ciencia y la tecnología. La implementación de estrategias pedagógicas que se centran en estos aspectos puede tener un impacto significativo en el éxito académico y profesional de los estudiantes.

El estudio demuestra que el aprendizaje de la geometría no solo potencia el conocimiento específico en esta área, sino que también facilita el desarrollo del pensamiento espacial, una habilidad esencial en diversas disciplinas. Esta investigación proporciona una base sólida para la formulación de futuras políticas educativas, y resalta la importancia de una educación matemática integral que promueva el desarrollo de habilidades críticas y espaciales entre los estudiantes.

Además, abre la puerta a futuros estudios sobre la relación entre el aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial en diferentes contextos educativos. Las investigaciones futuras podrán brindar información valiosa que permitirá ajustar las estrategias de enseñanza a las necesidades particulares de los estudiantes. Asimismo, se hace indispensable fomentar la colaboración entre instituciones educativas, profesionales de la enseñanza y expertos en psicología cognitiva, con el fin de desarrollar e implementar estrategias educativas integrales. Estas alianzas pueden materializarse mediante talleres, seminarios y programas de intercambio que enriquecen tanto el conocimiento como las prácticas pedagógicas.

Las autoridades educativas deben basar sus decisiones en evidencia empírica, apoyando iniciativas que mejoren la enseñanza de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial. Esto implica la asignación adecuada de recursos, la actualización de los currículos y la implementación de programas de formación docente basados en las mejores prácticas y en los resultados obtenidos de investigaciones sólidas.

Agradecimientos

Deseamos expresar nuestro más profundo agradecimiento a Dios por brindarnos la fortaleza y sabiduría necesarias para llevar a cabo este estudio. Agradecemos sinceramente a Eric Hidalgo, Carmen Rodríguez, Iris Jiménez, Silverio Vergara, Josué Ortiz y Hernán Paredes, quienes, con sus conocimientos y apoyo, contribuyeron de manera significativa a este trabajo. Extendemos nuestra gratitud a la Dirección de Investigación y Orientación Psicológica por su respaldo en la administración y análisis de la prueba psicométrica GATB, con especial mención a Nayarith Gordon y su equipo de colaboradores por su valiosa asistencia. Finalmente, agradecemos a los estudiantes de primer año de la Licenciatura en Matemática, cuya participación y cooperación fueron esenciales para la realización de esta investigación.

Referencias bibliográficas

- Abrate, R., Delgado, G., y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación* (Online), vol. 39, nº1, p.1- 9. <http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf>
- Báez, R., y Iglesias, M. (2007). Principios didácticos que seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL “El Mácaro”. *Enseñanza de la Matemática*, vol.12, p. 67-86.
- Battista, M. T. (1999). The importance of spatial structuring in geometric reasoning. *Teaching Children Mathematics*, vol.6, nº3, p.170-177.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Cheng, Y. L., y Mix, K. S. (2014). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and development*, vol.15, nº 1, p.2-11.
- Clements, D.H., y Battista, M.E. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. GROUWS, D.A. (ed.). New York: McMillan.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, p.37-52.
- Gardner, H. (1983). *Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences*. New York: Basic Books.
- Gómez Morales, J.J. (2018). Desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de séptimo grado con apoyo de materiales manipulables. Bogotá: Universidad Externado de Colombia.
- Guzmán, M.D. (1989). Tendencias actuales de la enseñanza de la Matemática, *Studia Pedagógica. Revista de Ciencias de la Educación*, vol. 21, p.19-26.
- Hartigan, J. A., y Wigdor, A. K. (1989). *Fairness in Employment Testing: Validity Generalization, Minority Issues, and the General Aptitude Test Battery*. Washington, DC: National Academy Press.
- Hershkowitz, R., Villani, V., Mammana, C., Douady, R., Hansen, L., Malkevitch, J., ... y Niss, M. (1994). Perspectivas sobre la enseñanza de la geometría para el siglo XXI: Documento de debate para un estudio del ICMI. *ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.*, 26 (5), 164-168.
- Jones, K. (2003). Issues in teaching and learning of geometry. In *Aspects of teaching secondary mathematics*, p. 137-155. London: Routledge Falmer.
- Lave, J., y Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Lohman, D. F. (1979). *Spatial ability: A review and reanalysis of the correlational literature* (Vol. 8, p. 226). Stanford, CA: School of education, Stanford university.
- Mellon, S. J., Daggett, M., MacManus, V., y Moritsch, B. (1996). *Development of General Aptitude Test Battery (GATB) Forms E and F*. In GATB Improvement Project Final Report (pp. 1-58), edited by R. A. McCloy, T. L. Russell, & L. L. Wise. Washington, DC: U.S. Department of Labor.
- Newcombe, N. S., y Stieff, M. (2012). Six myths about spatial thinking. *International Journal of Science Education*, vol.34, nº6, p.955-971. <https://doi.org/10.1080/09500693.2011.588728>
- Piaget, J. (1952). *The Origins of Intelligence in Children*. New York: International Universities Press.
- Sorby, S. A. (2009). Educational research in developing 3-D spatial skills for engineering students. *International Journal of Science Education*, vol.31, nº3, p.459-480. <https://doi.org/10.1080/09500690802595839>
- Sweller, J., Ayres, P., y Kalyuga, S. (2011). *Cognitive Load Theory*. New York: Springer.
- U.S. Department of Labor. (1983). *USES Test Research Report No. 45*. Washington, DC: U.S. Government Printing Office.
- Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., y Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, vol.139, nº2, p.352-402. <https://doi.org/10.1037/a0028446>
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press.
- Vera, L. (2013). *Medición y Evaluación del Aprendizaje* (6ta. ed.). Hato Rey, PR: Publicaciones Puertorriqueñas.
- Wai, J., Lubinski, D., y Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology*, vol.101, nº4, p.817-835. <https://doi.org/10.1037/a0016127>