Revista Colegiada de Ciencias. Vol.5, No.2, abril-septiembre, 2024, ISSNL 2710-7434

TRES SERIES FAMOSAS EN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

THREE FAMOUS SERIES IN THE HISTORY OF THE MATHEMATICS

José Antonio Camarena Berrío
Universidad de Panamá. Centro Regional Universitario de Veraguas. Panamá.
jose.camarenab@up.ac.pa; https://orcid.org/0009-0005-4807-4492
Ángela Yaneth Franco
Universidad de Panamá. Centro Regional Universitario de Veraguas. Panamá.
angela.franco@up.ac.pa; https://orcid.org/0000-0002-0538-1688

Artículo recibido: 13 de diciembre de 2023
Artículo aceptado: 16 de enero de 2024.

DOI https://doi.org/10.48204/j.colegiada.v5n2.a5026

RESUMEN

Las series armónica, armónica alternada y p–serie con $p = 2$. (problema de Basilea),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots$$

son unas de las series infinitas más célebres de la matemática. Ellas se usan como ejemplos y contraejemplos para ilustrar la teoría de la convergencia de series. En este artículo, se presentan algunas de las contribuciones de los matemáticos que se dedicaron al estudio de la convergencia de estas tres series; resaltando los aportes de Nicole Oresme, Pietro Mengoli, Nikolaus Mercator y Leonhard Euler.
Palabras clave: Convergencia, serie armónica, serie alternada, p–serie, problema de Basilea.

ABSTRACT

The harmonic, alternated harmonic and p–series with $p = 2$ (Basel problem) series,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots$$

are some of the most famous infinite series in mathematics and, they are used as examples and counterexamples to illustrate the theory of convergence of series. In this article some of the contributions of the mathematicians who dedicated themselves to the study of the convergence of these three series are presented. The contributions of Nicole Oresme, Pietro Mengoli, Nikolaus Mercator and Leonhard Euler are highlighted.
Keywords: Convergence, divergence, harmonic series, alternated series, p–series, Basel proble

INTRODUCCIÓN

Aunque las definiciones formales de series y series convergente no fueron establecidas hasta después de los trabajos de Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) y Karl Weirstrass (1815 –1897), las series han sido estudiadas desde la antigua civilización griega por matemáticos como Arquímedes de Siracusa (287 ac – 212 ac), quien derivó la identidad elemental

$$\mathbf{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3}$$

de la cual se infiere que

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{4}{3}$$

Estos estudios produjeron muchos resultados útiles y, en general, correctos; aunque bajo los estándares modernos sus demostraciones no eran totalmente satisfactorias.

El primer obstáculo que enfrentaban los matemáticos al estudiar las series numéricas era determinar la convergencia o divergencia de la serie numérica y, el segundo obstáculo era determinar la suma total (o límite) de la serie convergente. Aunque muchos resultados, sobre series numéricas particulares, se lograron sin probar primeramente que la serie era convergente.

Además de las series geométricas, se estudiaron muchas series numéricas interesantes. Por ejemplo, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) estudió la serie de los recíprocos de los números triangulares

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\cdots$$

la cual es una serie telescópica, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

De igual manera, Leibniz obtuvo la suma de la serie de los recíprocos de los números piramidales

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n(n+1)(n+2)}{2}}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\cdots=\frac{3}{2}$$

El objetivo de este trabajo es presentar las contribuciones de los matemáticos, a través de la historia, de tres series numéricas que jugaron un papel preponderante en el desarrollo y evolución del cálculo diferencial e integral y, en el nacimiento del análisis real. Estas series son la serie armónica, la serie armónica alternada y la p–serie con $p=2$ (conocida como el problema de Basilea)

Revista Colegiada de Ciencias. Vol.5, No.2, abril-septiembre, 2024, ISSNL 2710-7434

MATERIALES Y MÉTODOS

Para lograr el objetivo planteado en este trabajo se toman las tres series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \qquad ,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Se presentarán varias demostraciones de que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, a pesar de que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Posteriormente, se presentarán varias contribuciones de matemáticos probando que la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ es convergente y, se calcula su suma total. Finalmente, se presenta la historia de la p–serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, así como alguna demostración de que su suma total es $\frac{\pi^2}{6}$; usando tanto técnicas antiguas como técnicas modernas.

La Serie Armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Los matemáticos rápidamente notaron que una condición necesaria para que una serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$sea convergente es que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, resultado conocido con el nombre **Criterio del n–ésimo término.** Sin embargo, la primera persona en verificar que esta condición no es suficiente es el matemático francés Nicole Oresme (1323 – 1382), quien en un tratado escrito alrededor del año 1350 probó de forma simple y elegante que la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

es divergente. Su método es el siguiente (Edward, 1994)

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\ &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\end{aligned}$$

Como la serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

es divergente, la serie armónica es divergente.

En 1650, el matemático italiano Pietro Mengoli (1626 – 1686) en su obra Novae quadraturae arithmeticae seu de additione fractionum, presentó una demostración sobre la divergencia de la serie armónica, basado en la siguiente desigualdad (Bell, 2018)

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}+\frac{2n}{n^2-1} > \frac{1}{n}+\frac{2n}{n^2} = \frac{3}{n}$$

Su método consistía en agrupar los términos de la serie armónica en bloques de tres y, aplicar la desigualdad anterior.

Revista Colegiada de Ciencias. Vol.5, No.2, abril-septiembre, 2024, ISSNL 2710-7434

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots &= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots \\
&> 1+\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\frac{3}{12}+\cdots \\
&= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots
\end{aligned}
$$

Si tomamos

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

Entonces se tiene que

$$S>1+S$$

Aplicando esta desigualdad repetidamente se obtiene que

$$S>1+S>2+S>3+S>4+S>\cdots$$

Por consiguiente,

$$S>1,\ \ S>2,\ \ S>3,\ \ S>4,\ldots$$

y la serie armónica es convergente.

Una demostración similar a la de Mengoli es agrupar los términos de la serie armónica en bloques de dos y aplicar la desigualdad

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{2n+1}{n(n+1)}>\frac{2n}{n(n+1)}=\frac{2}{n+1}$$

$$
\begin{aligned}
S &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\
&> 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+\frac{2}{8}+\frac{2}{10}\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots \\
&= \frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{2}+S
\end{aligned}
$$

o sea que

$$S>\frac{1}{2}+S$$

con lo que se concluye que la serie armónica es divergente.

Similar a esta demostración, se obtiene la siguiente demostración, suponiendo que la serie armónica es convergente con suma S

Revista Colegiada de Ciencias. Vol.5, No.2, abril-septiembre, 2024, ISSNL 2710-7434

$$
\begin{aligned}
S &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \\
&= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\
&> \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots \\
&= S
\end{aligned}
$$

Con la contradicción $S > S$se concluye que la serie armónica es divergente.

Haciendo uso de las propiedades de las integrales impropias y el teorema de la convergencia dominada se pueden justificar los pasos de la siguiente demostración, que no es totalmente rigurosa

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots &= \int_0^1 dx+\int_0^1 x dx+\int_0^1 x^2 dx+\cdots+\int_0^1 x^{n-1} dx+\cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^n dx \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right) dx \\
&= \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{1-x} \\
&= \lim_{b\to 1^-}[0-ln(1-b)] \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Haciendo uso del cambio de variable $t = e^x$, se obtiene la siguiente demostración equivalente a la anterior

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1-e^x} dx &= \int_{-\infty}^{0} e^x\left(\frac{1}{1-e^x}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{(n+1)x}\right) dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{(n+1)x} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}e^{(n+1)x}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

Como

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1-e^x}dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-1} \frac{e^x}{1-e^x}dx + \lim_{b\to 0^-} \int_{-1}^{b} \frac{e^x}{1-e^x}dx \\ &= \lim_{a\to-\infty} [-ln(1-e^x)]_{a}^{-1} + \lim_{b\to 0^+} [-ln(1-e^x)]_{-1}^{b} \\ &= -ln(1-e^{-1}) + \infty \\ &= \infty\end{aligned}$$

se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

La siguiente demostración hace uso de las propiedades de los logaritmos, las series telescópicas y la desigualdad $x \geq ln(1+x)$, para todo $x > -1$.
En efecto,

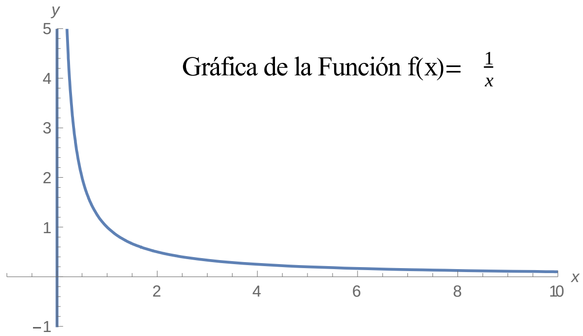
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &\geq \sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [ln(n+1) - ln(n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} ln(n+1) \\ &= \infty\end{aligned}$$

El uso de la desigualdad $x \geq ln(1+x)$ en la demostración anterior se puede evitar, usando el criterio de comparación por límite con la serie telescópica divergente$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
En efectos, por la regla de L' Hopital,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Luego como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ es divergente, por el criterio de comparación por límite, la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Esta última demostración hace uso de la integral de Riemann y del cálculo de área bajo una curva. En efecto considere la función $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



De la figura se tiene que

$$\frac{1}{n+1} < \int_{n}^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n}$$

Denote por $H_n$la n–ésima suma parcial de la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y considere la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde

$$S_n = H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Haciendo uso repetido de la desigualdad anterior, se obtiene

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \int_{n}^{2n} \frac{1}{x} dx = ln\, 2 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

De donde

$$S_n < ln\, 2 < S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}$$

Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = ln\, 2$$

Por consiguiente, la sucesión $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$no es de Cauchy y, por ende, es divergente. Así, la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

La Serie Armónica Alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

La serie armónica alternada o serie de Mercator (también llamada serie de Newton – Mercator) es la expansión en serie de potencias de la función $f(x) = ln(1 + x)$

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

La cual fue publicada por primera vez por el matemático alemán Nikolaus Mercator (1620 –1687) en su libro Logarithmotechnia publicado en 1668. Aquí Mercator encuentra su famosa serie para el área bajo la hipérbola $y = \frac{1}{1+x}$sobre el intervalo $[0, x]$. Él comienza calculando a través de la división de la serie geométrica

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Aunque Mercator no integró término a término, haciendo las justificaciones adecuadas, se obtiene

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+x} &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = ln(1+x) + c$$

Tomando $x = 0$, se tiene que $c = 0$. Así

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = ln(1+x)$$

Observe que por el criterio de las series alternadas de Gottfried Leibniz (1646 – 1716), se sabe que la serie armónica alternada es convergente. Luego, tomando $x = 1$se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = ln\, 2$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} ln\, 2 &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{24}\right) + \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{32}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{8} + \frac{4}{12 \cdot 16} + \frac{4}{20 \cdot 24} + \frac{4}{28 \cdot 32} + \cdots \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \frac{1}{10 \cdot 12} + \frac{1}{14 \cdot 16} + \cdots\end{aligned}$$

Finalmente, usando su fórmula de transmutación, Leibniz (Edward, 1994), (Dunham, 2018), (Komornik, 2022) probó que

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Dividiendo ambos miembros por 2, Leibniz obtuvo

$$\frac{\pi}{8} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14}\right) + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{32}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \cdots$$
$$= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \cdots$$

Además,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right] = \frac{1}{2} ln\, 2$$

La P – Serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (El problema de Basilea)

A través de los siglos XVIII y XIX, las academias científicas propusieron premios a la solución de problemas, con el fin de guiar la investigación científica. En los principios del tiempo de Leonhard Euler (1707 – 1783), había sólo unos cuantos problemas grandes esperando ser resueltos. Los teoremas de Fermat no eran tomados muy en serio para esos tiempos, ya que sólo tenían pocas décadas de antigüedad. Euler, sin embargo, resolvió la mayoría de ellos y presentó solución parcial a el último teorema de Fermat para los casos $n = 3$y $n = 4$. (Dunham, 1999), (Dunham, 2007).

El premio más grande permanecía para el problema de Basilea, que consistía en calcular la suma de los recíprocos de los cuadrados de los números naturales; esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

Este problema fue propuesto por Pietro Mengoli en 1650 en su obra Novae quadraturae arithmeticae seu de additione fractionum y, resuelto por Euler en 1734 donde probó (Hassler, 2022),

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Veamos primeramente la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. En efecto, para todo número natural n se tiene que

$$2n^2 \geq n^2 + n = n(n+1)$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

Ahora bien,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2$$

Luego por el criterio de comparación directa, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Euler se interesó en el problema de Basilea y en 1734 anuncia que lo había resuelto; sin embargo, por las críticas de los matemáticos de su época, Euler se vio obligado a presentar varias demostraciones de este problema. (Dunham, 2007), (Dunham, 2018).

En la siguiente demostración del problema de Basilea, Euler hace uso de las dos representaciones de la función seno. (Edward, 1994)

$$sen\,x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad sen\,x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Como

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \\ &= x\left[1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^4-\cdots\right]\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) &= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \\ &= x\left[1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)x^2+\cdots\right]\end{aligned}$$

Se tiene que

$$\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots=\frac{1}{6}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

En 1735 Euler, presentó una demostración del problema de Basilea, usando herramientas no más controversiales que la integración por partes, el teorema del binomio y relaciones recursivas simples (Kalman, 1993).

Euler comienza la demostración considerando un círculo de radio 1, tomando s como la longitud de arco y $x = sen\,s$, o sea $s = sen^{-1}\,x$. Luego,

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{y} \qquad s = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Multiplicando estos dos valores obtiene

$$sds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Por el teorema del binomio se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8+\cdots$$

De donde

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7+\cdots$$

Por consiguiente

$$sds = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots$$

Posteriormente, Euler integra ambos lados desde $x = 0$ hasta $x = 1$. Esto implica que s varía desde $s = 0$ hasta $s = \frac{\pi}{2}$, es decir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sds = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\cdot 3}\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\int_0^1 \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\int_0^1 \frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots$$

Integrando un término arbitrario, usando integración por partes, Euler obtiene

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -x^{n+2}\sqrt{1-x^2} + (n+1)\int x^n\sqrt{1-x^2}dx \\ &= -x^{n+1}\sqrt{1-x^2} + (n+1)\int \frac{x^n(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= -x^{n+1}\sqrt{1-x^2} + (n+1)\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx + (n+1)\int \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{aligned}$$

De donde,

$$(n+2)\int \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -x^{n+1}\sqrt{1-x^2} + (n+1)\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

y

$$\int \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{n+2}x^{n+1}\sqrt{1-x^2} + \left(\frac{n+1}{n+2}\right)\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Así, Euler obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -\int_0^1 d\left(\sqrt{1-x^2}\right) = 1 \\ \int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3} \\ \int_0^1 \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \frac{4}{5}\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} \\ \int_0^1 \frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \frac{6}{7}\int_0^1 \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \quad \vdots\end{aligned}$$

Así pues

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Finalmente, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es absolutamente convergente, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$
$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

De donde

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

En 1983, Tom Apostol presenta la siguiente demostración del problema de Basilea (Apostol, 1983)

Como

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad , \quad |x|<1$$

se tiene que

$$\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy=\int_0^1\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n\,dxdy$$
$$=\int_0^1\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}x^ny^n\,dxdy$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_0^1y^n\,dy$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int_0^1 y^n dy$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Por otro lado,

$$\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy=\iint_B\frac{1}{1-xy}dxdy$$

donde $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Introduciendo el cambio de variables

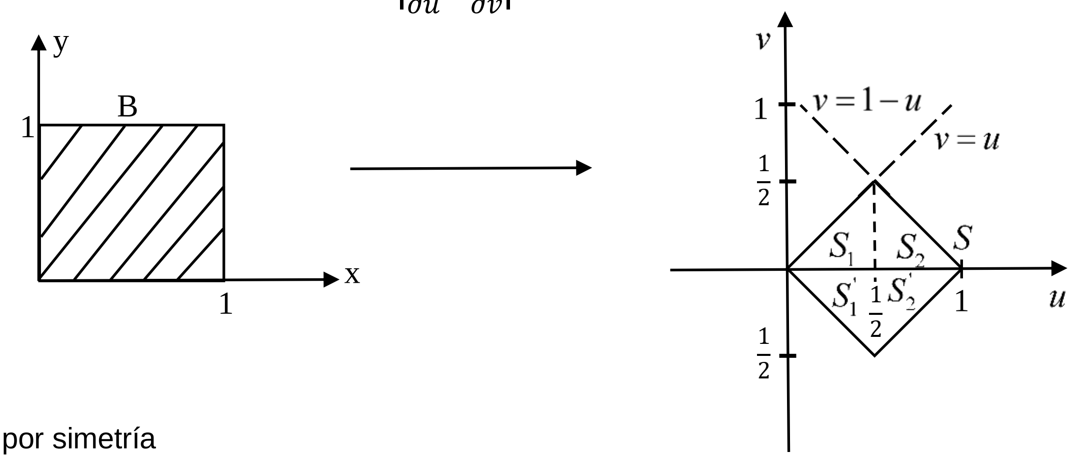
$$u = \frac{x + y}{2} \qquad , \qquad v = \frac{y - x}{2}$$
$$x = u - v \qquad , \qquad y = u + v$$

simplemente se obtiene una rotación de los ejes coordenados $\frac{\pi}{4}$radianes en el sentido de las manecillas del reloj. Así,

$$\iint_B \frac{1}{1 - xy} dA = \iint_B \frac{1}{1 - u^2 + v^2} J\, dA$$

donde el jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$



Luego, por simetría

$$\iint_B \frac{1}{1 - xy} dA = 2 \iint_S \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dA$$
$$= I_2 + I_2$$

donde

$$I_1 = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^u \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dvdu = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}\right) \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Tomando el cambio de variable $u = sen \quad \theta$, se obtiene

$$I_1 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} tan^{-1}\left(\frac{sen\, \theta}{\sqrt{1 - sen^2\, \theta}}\right) \frac{cos\, \theta\, d\theta}{\sqrt{1 - sen^2\, \theta}}$$
$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} tan^{-1}(tan\, \theta)\, d\theta$$
$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}\int} tan$$
$$= \frac{\pi^2}{18}$$

$$I_2 = 4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{1-u}\frac{1}{1-u^2+v^2}dvdu = 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} tan^{-1}\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Tomando el cambio de variable $u = cos\, 2\,\theta$, se obtiene

$$\begin{aligned} I_2 &= -4\int_{\frac{\pi}{6}}^{0} tan^{-1}\left(\frac{1-cos\,2\,\theta}{\sqrt{1-cos^2\,2\,\theta}}\right)\frac{2\,sen\,2\,\theta d\theta}{\sqrt{1-cos^2\,2\,\theta}} \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-cos\,2\,\theta}{1+cos^2\,2\,\theta}}\right)d\theta \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} tan^{-1}(tan\,\theta) \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\theta d\theta \\ &= \frac{\pi^2}{9} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\iint_B \frac{1}{1-xy}dA = I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6}$$

o sea

$$\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy = \frac{\pi^2}{6}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy = \frac{\pi^2}{6}$$

Otra forma de probar el problema de Basilea usando integrales dobles es probar que (Kalman, 1993)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{4}{3}\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-x^2y^2}dxdy$$

y utilizando el cambio de variable

$$u = tan^{-1}\left(x\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\right) \quad , \quad v = tan^{-1}\left(y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}\right)$$

$$x = \frac{sen\,u}{cos\,v} \quad , \quad y = \frac{sen\,v}{cos\,u}$$

probar que

$$\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-x^2y^2}dxdy = \iint_B\frac{dudv}{1-u^2v^2}JdA = \iint_B dA = area(B)$$

donde

$$B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, \mathrm{v} > 0, u + v < \frac{\pi}{2}\}$$

y el jacobiano

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1 - u^2 v^2$$

Así

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - x^2 y^2} dxdy = area(B) = \frac{\pi^2}{8}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

La siguiente y última demostración hace uso de las siguientes identidades (Russel,1999)

$$e^{ix} = cos\, x + i\, sen\, x \quad , \quad e^{-ix} = cos\, x - i\, sen\, x$$
$$2\, cos\, x = e^{ix} + e^{-ix} \quad , \quad 2i\, sen\, x = e^{ix} - e^{-ix}$$

Denote

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad , \qquad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(2\, cos\, x)\, dx$$

Luego

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(2\, cos\, x)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left[e^{ix}\left(1 + e^{-2ix}\right)\right] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ixdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(1 + e^{-2ix}\right) dx \\ &= i\frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(1 + e^{-2ix}\right) dx \end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

se tiene que

$$ln\left(1+e^{-2ix}\right)=e^{-2ix}-\frac{e^{-4ix}}{2}+\frac{e^{-6ix}}{3}-\frac{e^{-8ix}}{4}+\cdots$$

Integrando

$$\int ln\left(1+e^{-2ix}\right)dx=\frac{e^{-2ix}}{-2i}-\frac{e^{-4ix}}{(-4i)\cdot 2}+\frac{e^{-6ix}}{(-6i)\cdot 3}-\frac{e^{-8ix}}{(-8i)\cdot 4}+\cdots$$
$$=-\frac{1}{2i}\left[e^{-2ix}-\frac{e^{-4ix}}{2^2}+\frac{e^{-6ix}}{3^2}-\frac{e^{-8ix}}{4^2}+\cdots\right]$$

De donde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(1+e^{-2ix}\right)dx=-\frac{1}{2i}\left[\left(e^{-\pi i}-1\right)-\frac{\left(e^{-2\pi i}-1\right)}{2^2}+\frac{\left(e^{-3\pi i}-1\right)}{3^2}-\frac{\left(e^{-4\pi i}-1\right)}{4^2}+\cdots\right]$$
$$=+\frac{1}{i}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right]$$

Así pues,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(1+e^{-2ix}\right)dx=-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$
$$=-i\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right]$$
$$=-i\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right]$$
$$=-i\left[E-\frac{1}{4}E\right]$$
$$=-\frac{3i}{4}E$$

Por consiguiente

$$I=i\frac{\pi^2}{8}-\frac{3i}{4}E=i\left[\frac{\pi^2}{8}-\frac{3}{4}E\right]$$

Pero como Ies un número real, se tiene que

$$\frac{\pi^2}{8}-\frac{3}{4}E=0$$

o sea

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\pi^2}{6},$$

Note que se ha probado que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(1+e^{-2ix}\right) dx = 0$$

CONCLUSIONES

1. Se ha probado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, a pesar de que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$. De esto se deduce que la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es necesaria, pero no suficiente, para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente.
2. Aunque se han presentado varias demostraciones de que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, existen muchas otras demostraciones, utilizando diversas herramientas y técnicas matemáticas.
3. Se ha probado que la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente y que converge a $ln\, 2$; sin embargo, ella no es absolutamente converge, o sea que ella es condicionalmente convergente. Esto implica si se reordenan los términos de la serie armónica alternada, este resultado puede cambiar.

4. El primero en determinar el valor de la p–serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ fue Euler 1734, el cual, utilizando varias técnicas, probó que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Euler también probó que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

5. En este artículo se ha probado que

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4} \qquad (Leibniz)$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6} \qquad (Euler)$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{2} \qquad (Euler)$$

La ecuación

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)^2$$

relaciona el problema de Basilea con la serie de Leibniz (Komornik, 2022)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apostol, T. M. (1983). A Proof that Euler Missed, Evaluating ζ (2) the Easy Way. The Mathematical Intelligencer. 5(3). 59-60.

Bell, J. y. Blasjo, V. (2018). Pietro Mengoli's 1650 Proof that the Harmonic Series Diverges. Mathematics Magazine. 91(5). 341-347.

Dunham. W. (1999). Euler: The Master of Us All. The American Mathematical Society.

Dunham. W. (2007). The Genius of Euler: Reflections on his life and work. The Mathematical Association of American.

Dunham, W. (2018). The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue. Princeton University Press.

Edward, C. H. (1994). The Historical Dvelopment of the calculus. Springer.

Hassler, U. y Hossein Kouchack, M. (2022). Basel Problem: Historical perspective and futher proofs from stochastic processes. Euleriana. 2(2). 120 -130.

Kalman, D. (1993). Six Ways to Sum a Series. The College Mathematics Jounal. 24(5). 402-421.

Komornik, V. (2022). A "Luminous" Solution to the Basel Problem. Mathematics Magazine: 95(4). 333-337.

Komornik, V. y Schafke, R. (2021). Leibniz, Newton, and Cauchy; A Complex Relationship. The American Mathematical Monthly. 128(4). 367-369.

Russell, D.C. (1991). Another Eulerian-Type Proof. Mathematics Magazine. 64(5). 349-349.