

Modelando una solución de la ecuación de la onda en coordenadas polares utilizando Python

Modeling a solution of the wave equation in polar coordinates using Python

Eric A. Acevedo¹ y María T. Ortega O².

¹Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática, Panamá, eric.acevedo@up.ac.pa, <https://orcid.org/0009-0004-5925-6497>

²Universidad de Panamá, Facultad de Informática, Electrónica y Comunicación, Departamento de Informática, Panamá, maria.ortegao@up.ac.pa, <https://orcid.org/0009-0000-3629-9751>

DOI: <https://doi.org/10.48204/j.colonciencias.v13n2.a8744>

Resumen

La ecuación de la onda es un problema clásico en Física y Matemáticas, ampliamente aplicado al estudio de vibraciones, acústica y propagación de ondas en medios circulares o radiales. Esta ecuación describe cómo una perturbación se desplaza en el espacio y el tiempo. A nivel regional, la mayoría de los trabajos se han centrado en geometría cartesiana, sin embargo, al expresarla en coordenadas polares se incorporan términos adicionales que reflejan la simetría radial y angular, lo que permite modelar fenómenos como la vibración de membranas circulares o la propagación en medios cilíndricos. Es por eso que el objetivo de esta investigación consistió en modelar la solución de la ecuación de la onda en coordenadas polares mediante la aplicación del método explícito de diferencias finitas implementado en Python y así desarrollar un esquema reproducible que permita simular y visualizar la evolución temporal de las ondas en medios con simetría radial. Para ello la metodología empleó el método de diferencias finitas, discretizando tanto la variable radial como la angular y construyendo una malla que facilita la simulación temporal. Además, Python se utilizó como herramienta principal por su flexibilidad y disponibilidad de librerías científicas (NumPy, Matplotlib), que permiten implementar algoritmos y generar visualizaciones.

El esquema numérico incluye condiciones iniciales y de frontera, esenciales para garantizar estabilidad y realismo en la simulación. Los resultados muestran patrones de propagación

coherentes con la teoría, evidenciando estructuras nodales y dinámicas oscilatorias propias de medios circulares. Las visualizaciones obtenidas permiten analizar la influencia de parámetros como el número de onda y el modo angular en el comportamiento de la solución.

Estas investigaciones ayudan a fortalecer la comprensión de fenómenos ondulatorios en geometrías no cartesianas, aportan recursos pedagógicos valiosos para la enseñanza y la investigación, y promueven el acceso a metodologías avanzadas mediante software libre y a impulsar aplicaciones en ingeniería, acústica, óptica y física computacional.

Palabras clave: ecuación de la onda, coordenadas polares, método de diferencias finitas, simulación numérica, Python

Abstract

The wave equation is a classic problem in physics and mathematics, widely applied to the study of vibrations, acoustics, and wave propagation in circular or radial media. This equation describes how a disturbance travels through space and time. Regionally, most work has focused on Cartesian geometry; however, expressing it in polar coordinates incorporates additional terms that reflect radial and angular symmetry, allowing the modeling of phenomena such as the vibration of circular membranes or propagation in cylindrical media. Therefore, the objective of this research was to model the solution of the wave equation in polar coordinates using the explicit finite difference method implemented in Python, thus developing a reproducible scheme that allows the simulation and visualization of the time evolution of waves in media with radial symmetry. To achieve this, the methodology employed the finite difference method, discretizing both the radial and angular variables and constructing a mesh that facilitates the time simulation. In addition, Python was used as the main tool because of its flexibility and availability of scientific libraries (NumPy, Matplotlib), which allow the implementation of algorithms and the generation of visualizations.

The numerical scheme includes initial and boundary conditions, essential for ensuring stability and realism in the simulation. The results show propagation patterns consistent with the theory, revealing nodal structures and oscillatory dynamics characteristic of circular media. The visualizations obtained allow for the analysis of the influence of parameters such as wave number and angular mode on the solution's behavior.

This research helps strengthen the understanding of wave phenomena in non-Cartesian geometries, provides valuable pedagogical resources for teaching and research, and promotes access to advanced methodologies through open-source software, thus contributing to the democratization of knowledge and fostering applications in engineering, acoustics, optics, and computational physics.

Keywords: wave equation, polar coordinates, finite difference method, numerical simulation, Python

Introducción

Se define la ecuación de la onda como una ecuación diferencial parcial de segundo orden que describe la propagación de ondas en el espacio y el tiempo (Morse & Feshbach, 1953). Se utiliza para modelar fenómenos físicos como el sonido, la luz, las vibraciones mecánicas y las ondas en fluidos o sólidos, siendo esencial en disciplinas como la ingeniería, la física aplicada y las ciencias computacionales (Morton & Mayers, 2005).

Se entiende por ecuación diferencial parcial (EDP) aquella que contiene una función multivariable desconocida, por ejemplo $u(x, y, z, \dots)$, dependiente de variables independientes y de sus derivadas parciales (Smith, 1985).

Este tipo de ecuaciones describen fenómenos físicos como el calor, el sonido y la dinámica de fluidos, entre otros.

Se representa una EDP de segundo orden genérica de la siguiente forma (Zill & Cullen, 2009):

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + c(x, y)u(x, y) = f(x, y) \quad (\text{Zill, 2009})$$

En el contexto de la educación superior, se reconoce que el uso de Python como lenguaje de programación potencia la enseñanza de métodos numéricos, fomenta competencias digitales en estudiantes e investigadores y permite comprender cómo las ecuaciones diferenciales parciales modelan fenómenos físicos reales (Allain, 2024; Langtangen & Linge, 2017). Los principales desafíos se relacionan con la discretización adecuada de las variables radiales y angulares, la definición de condiciones de frontera que aseguren la estabilidad del método y la interpretación de los resultados en términos físicos.

Se estudia la ecuación de la onda en coordenadas polares, y a partir de este enfoque se identifican retos vinculados a la visualización de las simulaciones y a la simplificación del modelo sin pérdida de rigor matemático, con el propósito de que pueda ser utilizado en entornos educativos (Holman & Kunyansky, 2010; Zhu & Zhao, 2019).

Se reconocen aplicaciones actuales del estudio de la ecuación de la onda, entre ellas la simulación de fenómenos acústicos en recintos circulares, el análisis de vibraciones en estructuras mecánicas y la propagación de ondas electromagnéticas en antenas y guías de onda (Morse & Feshbach, 1953; Mohanty, Kumar, & Dahiya, 2013). En todos estos casos, el modelado en coordenadas polares ofrece ventajas al representar con mayor fidelidad la geometría del problema.

Se destacan los aportes de este estudio en dos dimensiones: por un lado, la generación de un modelo computacional accesible y replicable que puede ser utilizado como base para investigaciones más avanzadas (Langtangen & Linge, 2017; Duarte González, Pichardo Silva, & Ramírez Mairena, 2019); por otro, la posibilidad de extender su aplicación hacia áreas interdisciplinarias como la optimización de fracturamiento hidráulico en formaciones no convencionales, la simulación de membranas vibrantes, el análisis sísmico en ingeniería

civil, el estudio de ondas ultrasónicas en medicina y la modelación de procesos energéticos. De esta manera, se busca fortalecer la enseñanza de métodos numéricos en la región y ofrecer una herramienta práctica para investigadores interesados en el modelado de fenómenos ondulatorios en geometrías no cartesianas.

El objetivo de esta investigación consistió en modelar la solución de la ecuación de la onda en coordenadas polares mediante la aplicación del método explícito de diferencias finitas implementado en Python. Esto permite posteriormente evaluar la estabilidad y la convergencia del esquema numérico, analizar la capacidad del modelo para representar fenómenos ondulatorios en dominios circulares y valorar su utilidad como recurso pedagógico en la enseñanza de métodos numéricos y en la formación de competencias digitales en estudiantes e investigadores.

Metodología

Esta investigación se desarrolló siguiendo un enfoque cuantitativo y computacional, estructurado en las siguientes etapas:

Formulación matemática: Se parte de la definición de una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP), su clasificación y los ámbitos en los que se utilizan (Smith, 1985; Morton & Mayers, 2005; Duarte González, Pichardo Silva, & Ramírez Mairena, 2019). Se desarrolla la Serie de Taylor en varias variables, que constituye la base para el Método de Diferencias Finitas aplicado a funciones multivariantes (Belu & Belu, 2007; Langtangen & Linge, 2017).

Posteriormente se definió la ecuación de la onda en coordenadas cartesianas (Zill & Cullen, 2009):

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= 0, & t > 0 \\ u(L, t) &= 0, & t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < L \end{aligned}$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L$$

Posteriormente se definió la ecuación de la onda en coordenadas polares, expresada como una ecuación diferencial parcial dependiente de las variables radial, angular y temporal. Se establecieron las condiciones iniciales y de frontera necesarias para garantizar la estabilidad del modelo (Holman & Kunyansky, 2010; Mohanty et al., 2013; Zhu & Zhao, 2019):

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = c^2 u_{tt}$$

Condición Inicial

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$$

Condición de frontera ($r = R$)

$$u(R, \theta, t) = 0$$

Periodicidad Angular

$$u(r, 0, t) = u(r, 2\pi, t)$$

Discretización mediante diferencias finitas: Se aplicó el método explícito de diferencias finitas, que establece un esquema numérico para resolver ecuaciones diferenciales parciales (como la de la onda), en donde el valor de la solución en el tiempo futuro se calcula directamente a partir de valores conocidos en el tiempo presente y pasado, transformando las derivadas espaciales y temporales en expresiones algebraicas discretas (LeVeque, 2007; Behera & Behera, 2024). Se construyó una malla bidimensional con coordenadas (r_i, θ_j) que discretiza tanto la variable radial como la angular, permitiendo simular la propagación de la onda en dominios circulares.

$$\Omega = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq R; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Implementación computacional en Python: El esquema numérico se codificó en Python utilizando librerías científicas como NumPy para el cálculo matricial y Matplotlib para la

visualización gráfica (Allain, 2024; Amadeusferro, 2023). Se diseñaron funciones que automatizan la iteración temporal y la representación de los resultados, como `plot_snapshot(U, t)`, `animate_wave(U, times)`, `scipy.special.jn(n, x)`.

Validación del modelo: Se verificó la estabilidad y convergencia del método mediante la aplicación de condiciones iniciales controladas y pruebas con diferentes parámetros físicos, como el número de onda, la frecuencia angular, la velocidad de propagación, el radio, el ángulo y el tiempo. Se compararon los resultados obtenidos con soluciones analíticas simplificadas y con comportamientos esperados de la teoría de ondas (Morton & Mayers, 2005; Morse & Feshbach, 1953; Berg, 2025).

Análisis de resultados: La interpretación de las simulaciones gráficas se realizó mediante la generación de representaciones de la solución numérica en coordenadas polares en distintos instantes de tiempo. A través de estas visualizaciones se identificaron patrones de propagación radial, simetrías circulares y fenómenos de interferencia característicos de las ondas en geometrías radiales. Dichos patrones fueron contrastados con soluciones teóricas conocidas de la ecuación de onda, lo que permitió evaluar la capacidad del modelo para reproducir fenómenos físicos. Con base en esta comparación se valoró la claridad con la que las simulaciones ilustran conceptos fundamentales de propagación de ondas, resaltando su utilidad como recurso pedagógico en la enseñanza de métodos numéricos (Press et al., 2007; Strikwerda & Nagel, 1986).

Al analizar la EDP de segundo orden se observa que en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, las EDP de segundo orden se clasifican en (Smith, 1985; Evans, 2010):

Parabólicas si $\Delta = B^2 - AC = 0$ en Ω .

Hiperbólicas si $\Delta = B^2 - AC > 0$ en Ω .

Elípticas si $\Delta = B^2 - AC < 0$ en Ω .

Ecuación tipo parabólica:

Un ejemplo de EDP parabólica es la ecuación de calor o difusión, utilizada para modelar el flujo de calor a lo largo de una varilla de longitud L , en la cual la temperatura es uniforme en cada sección transversal. También se emplea para estudiar la difusión de gases (Zill & Cullen, 2009). La EDP que modela este fenómeno es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u = (x, t) \text{ (Zill. 2009)}$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u(0, t) = u_1$$

$$u(L, t) = u_2$$

Ecuación de tipo hiperbólica:

Un ejemplo de EDP hiperbólica es la ecuación de la onda. Los fenómenos oscilatorios de diferente naturaleza, como las vibraciones de cuerdas y membranas, las oscilaciones acústicas del gas en tubos y las oscilaciones electromagnéticas, se describen mediante ecuaciones de tipo hiperbólico (Morton & Mayers, 2005; Morse & Feshbach, 1953). La más simple es la ecuación de vibraciones de la cuerda, también denominada ecuación ondulatoria unidimensional (Zill & Cullen, 2009). Este tipo de ecuaciones se utilizan igualmente para modelar la ecuación de advección y la ecuación de onda (Smith, 1985; Press, Teukolsky, Vetterling, & Flannery, 2007).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; u(x, t) \text{ (Zill. 2009)}$$

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L$$

Ecuación de tipo elíptica:

Se determinan los procesos a ciclo fijo, en los cuales la función buscada no depende del tiempo, mediante ecuaciones de tipo elíptico. Los representantes típicos de estas ecuaciones son la Ecuación de Poisson y la Ecuación de Laplace (Smith, 1985; Evans, 2010).

Ecuación de Poisson $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ donde $f(x, y)$ es una función definida sobre una región R de borde S .

Ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ es una función definida sobre una región plana.

Estas ecuaciones se pueden escribir utilizando la siguiente notación:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ donde } u = u(x, y) \text{ (Zill. 2009)}$$

Serie de Taylor

La Serie de Taylor de una variable real se define como una serie de potencias que se prolonga hasta el infinito, en la cual cada uno de los sumandos se eleva a una potencia mayor que la del término antecedente. Cada elemento de la Serie de Taylor corresponde a la n -ésima derivada de la función f evaluada en el punto a , dividida entre el factorial de n ($n!$), y multiplicada por $(x - a)^n$ (Burden & Faires, 2011; Smith, 1985).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

La Serie de Taylor proporciona un método eficaz para aproximar el valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto (Burden & Faires, 2011; Smith, 1985). Para realizar esta aproximación se consideran únicamente algunos términos de la serie, mientras que el resto se interpreta como un error denominado término residual. El número de términos que se incluyen en la aproximación depende del criterio de quien aplica la serie.

En el caso de la Serie de Taylor en varias variables, la construcción es similar, salvo que cada variable se acompaña de su correspondiente derivada parcial. Por ejemplo:

$$f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a) + \dots$$

En general, en m variables, si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$ el polinomio de orden 1 es

$$f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a})(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{a})(x_m - a_m)$$

que se puede abreviar como

$$f(a) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})(x - a_i) \quad (1)$$

En dimensión $m = 2$, con $x_1 = x$ y $x_2 = y$, al igualar la expresión (1) a z se obtiene la ecuación del plano tangente. Esto es lógico porque el plano tangente representa la mejor aproximación lineal de la función en el entorno del punto considerado (Burden & Faires, 2011). En dimensiones superiores, el resultado son hiperplanos tangentes, es decir, planos de dimensión m . Para el polinomio de orden dos, se debe tener en cuenta que el producto de dos términos de grado 1, como xy , se considera de grado 2. En consecuencia, lo que se hace es sumar a la expresión (1) los términos correspondientes, recordando que $2! = 2$ (Smith, 1985; Morton & Mayers, 2005).

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a})(x_1 - a_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{a})(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(\vec{a})(x_m - a_m)^2$$

El caso de dos variables, que es bastante común, correspondería a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a})(x - a_1)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a})(x - a_1)(y - a_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a})(y - a_1)^2$$

Donde se ha supuesto que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se cumple porque todas sus derivadas son continuas.

Escrito con sumatorias, el polinomio de Taylor para una función de dos variables es:

$$f(a, b) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, b)(x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(\vec{a})(x_i - a_i)(y_j - a_j)$$

Este polinomio también lo podemos escribir de la siguiente forma

$$f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2} [f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2]$$

Ecuación de la Onda en Coordenadas Polares

Ahora se transforma la ecuación de la onda dada en coordenadas rectangulares en coordenadas polares.

Ecuación de la Onda en Coordenadas Cartesianas

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

En coordenadas polares (r, θ, t) es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

A lo que es lo mismo

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = c^2 u_{tt}$$

Aproximaciones mediante Diferencias Finitas

Método de Diferencias Finitas

Se define el Método de Diferencias Finitas como un procedimiento de carácter general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

definidas en recintos finitos (LeVeque, 2007; Smith, 1985). Se caracteriza por su sencillez conceptual y constituye un procedimiento adecuado para la resolución de ecuaciones bidimensionales (Morton & Mayers, 2005).

El primer paso para la aplicación del método consiste en discretizar el recinto del plano en el que se desea resolver la ecuación mediante una malla, por conveniencia cuadrada. Los puntos de la malla se separan una distancia h en ambas direcciones x e y . Posteriormente, se obtiene una aproximación en diferencias de las derivadas primera y segunda utilizando únicamente valores de la función. Dichas aproximaciones se pueden obtener mediante desarrollo en Serie de Taylor o bien mediante interpolación polinómica, por ejemplo, utilizando polinomios interpoladores de Legendre (Belu & Belu, 2007; Duarte González *et al.*, 2019).

Diferencias Finitas en Coordenadas Cartesianas

$$u_x = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x} + 0(\Delta x)$$

$$u_x = \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + 0(\Delta x)$$

$$u_x = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + 0(\Delta x^2)$$

$$u_y = \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y} + 0(\Delta y)$$

$$u_t = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + 0(\Delta t)$$

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + 0(\Delta x^2) \quad \text{Calor}$$

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + 0(\Delta x^2) \quad \text{Onda unidimensional}$$

$$u_{tt} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + 0(\Delta t^2) \quad (\text{Duarte, 2019})$$

Diferencias Finitas en Coordenadas Polares

Discretización Explícita

Malla Espacial y Temporal

$$r_i = i\Delta r$$

$$\theta_j = j\Delta\theta$$

$$t^n = n\Delta t$$

Aproximaciones con diferencias finitas

Derivada temporal (segundo orden, explícita)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1}}{(\Delta t)^2}$$

Derivada Radial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \approx \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta r)^2}$$

Derivada Angular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \approx \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta \theta)^2}$$

Término $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$

$$\frac{1}{r_i} \frac{\partial u}{\partial r} \approx \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta r}$$

En diferencias finitas, tenemos:

$$2u_{i,j}^n - u_{ij}^{n-1} + c^2 \Delta t^2 \left[\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2r_i \Delta r} (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) \right. \\ \left. + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta \theta)^2} \right]$$

Condición Inicial

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$$

Condición de Frontera ($r = R$)

$$u(R, \theta, t) = 0$$

Periodicidad Angular

$$u(r, 0, t) = u(r, 2\pi, t)$$

Problema propuesto para resolver por Diferencias Finitas en Coordenadas Polares

Problema Propuesto

$$u(r, \theta, 0) = 16r^2 - 8r \sin \theta$$

$$u(0, \theta, t) = 0$$

$$u(1, \theta, t) = 0$$

$$u(r, \theta, t) = u(r, 2\pi, t)$$

$$u_t(r, 0, t) = u_t(r, 2\pi, t)$$

$$u_t(r, \theta, 0) = 0$$

Resultados

Utilizando Python para modelar el problema

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation

# Parámetros físicos y de malla
c = 1.0
R = 1.0
Nr = 120                                # puntos radiales (incluye r=0 y r=R)
Ntheta = 180                            # puntos angulares
dr = R / Nr
dtheta = 2*np.pi / Ntheta

# Condición CFL conservadora
dt = 0.35 * min(dr, dr*dtheta) / (np.sqrt(2) * c)
Nt = 600
```

```
# Mallas
r = np.linspace(0, R, Nr+1) # i=0..Nr
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, Ntheta, endpoint=False) # j=0..Ntheta-1
rr = r[:, None]
tt = theta[None, :]

# Inicialización
u = 16.0 * rr**2 - 8.0 * rr * np.sin(tt) # u(r,θ,0)
u_prev = u.copy() # u_t=0 -> u_prev = u
u_next = np.zeros_like(u)

# Índices angulares periódicos
jp = (np.arange(Ntheta) + 1) % Ntheta
jm = (np.arange(Ntheta) - 1) % Ntheta

# utilidades
def polar_terms(u_arr):
    u_rr = np.zeros_like(u_arr)
    u_r = np.zeros_like(u_arr)
    u_tt = np.zeros_like(u_arr)

    # Interior radial
    u_rr[1:Nr, :] = (u_arr[2:Nr+1, :] - 2*u_arr[1:Nr, :] + u_arr[0:Nr-1, :]) /
(dr**2)
    u_r[1:Nr, :] = (u_arr[2:Nr+1, :] - u_arr[0:Nr-1, :]) / (2*dr)

    # Angular periódico
    u_tt[:, :] = (u_arr[:, jp] - 2*u_arr + u_arr[:, jm]) / (dtheta**2)
    inv_r = np.zeros_like(r)
    inv_r[1:] = 1.0 / r[1:]
    inv_r2 = np.zeros_like(r)
    inv_r2[1:] = 1.0 / (r[1:]**2)
    return u_rr, (inv_r[:, None])*u_r, (inv_r2[:, None])*u_tt
def step(u, u_prev):
    t1, t2, t3 = polar_terms(u)
    u_new = 2*u - u_prev + (c**2)*(dt**2)*(t1 + t2 + t3)
    # Fronteras
    u_new[0, :] = 0.0
    u_new[Nr, :] = 0.0
    return u_new

# Conversión a cartesiano para visualizar
def to_cart(u_arr):
    RR, TT = np.meshgrid(r, theta, indexing='ij')
    X = RR * np.cos(TT)
    Y = RR * np.sin(TT)
    return X, Y, u_arr

# Figura y animación
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6,6))
X, Y, Z = to_cart(u)
pcm = ax.pcolormesh(X, Y, Z, shading='auto', cmap='RdBu_r', vmin=-
np.max(np.abs(u)), vmax=np.max(np.abs(u)))
ax.set_aspect('equal')

ax.set_title("Ecuación de la onda en coordenadas polares")
fig.colorbar(pcm, ax=ax)
```

```
def init():
    pcm.set_array(Z.ravel())
    return pcm,
def update(frame):
    global u, u_prev
    u_new = step(u, u_prev)
    u_prev, u = u, u_new
    X, Y, Z = to_cart(u)
    pcm.set_array(Z.ravel())
    return pcm,

ani = animation.FuncAnimation(fig, update, frames=Nt, init_func=init, interval=20,
blit=True)
plt.show()
```

Imágenes generadas por Python en tiempos distintos

A continuación, se presentan las gráficas del campo escalar $u(r, \theta, t)$ en distintos instantes de tiempo.

Tabla 1

Parámetros de simulación

Parámetro	Valor
Radio del dominio (R)	1
Velocidad de onda (c)	1
Puntos radiales (Nr)	120
Puntos angulares (N θ)	180
Paso radial (Δr)	0.008333
Paso angular ($\Delta \theta$)	0.034907
Paso temporal (Δt)	0.000072
Iteraciones simuladas (Nt)	300
Esquema numérico	Diferencias finitas centradas, 2.º orden
Condición de frontera	Dirichlet homogénea ($u=0$)

Nota. Para cada iteración se incluyen 2 tipos de visualización

Mapa de color con contornos superpuestos

Representa la amplitud mediante una escala cromática (rojo = positivo, azul = negativo) con líneas de contorno que delimitan regiones de igual valor.

Mapa de contornos (isolíneas)

Muestra únicamente las curvas de nivel del campo, lo que facilita la identificación de frentes de onda y patrones nodales.

Figura 1

Mapa de color y de contornos $t = 0$

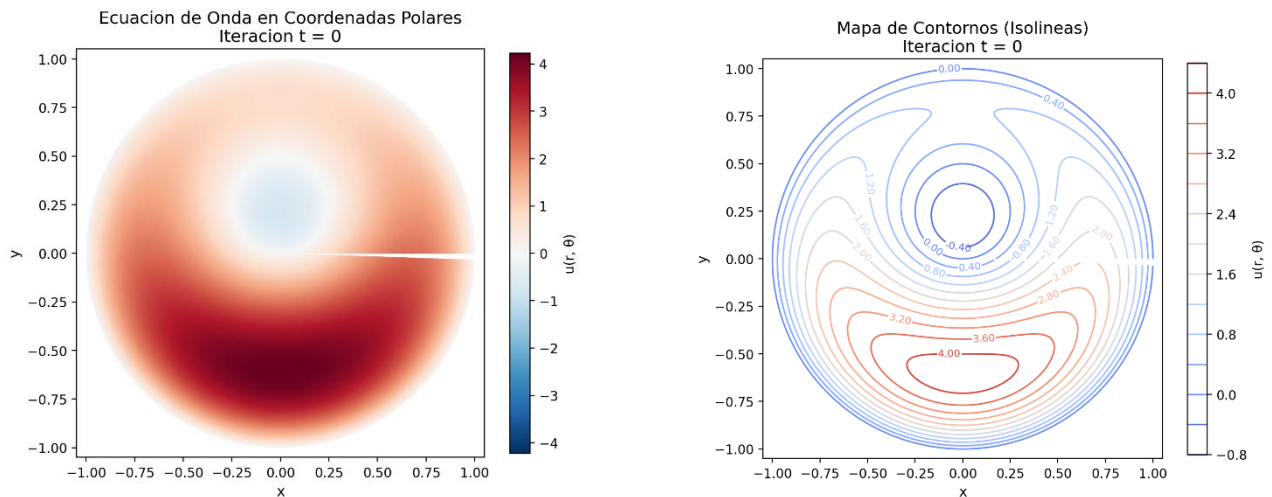


Figura 2

Mapa de color y de contornos $t = 50$

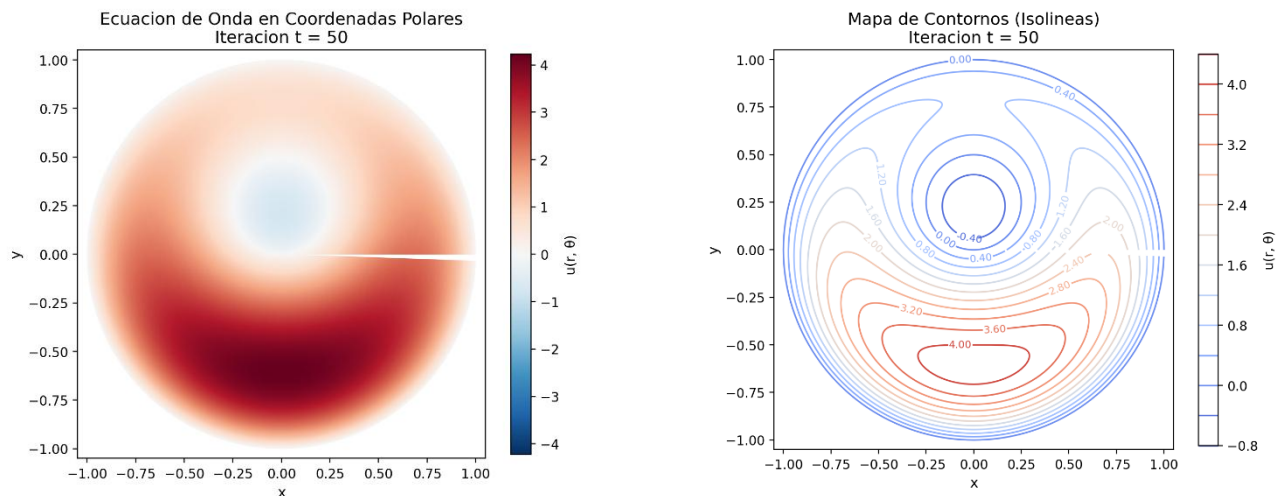


Figura 3

Mapa de color y de contornos $t = 100$

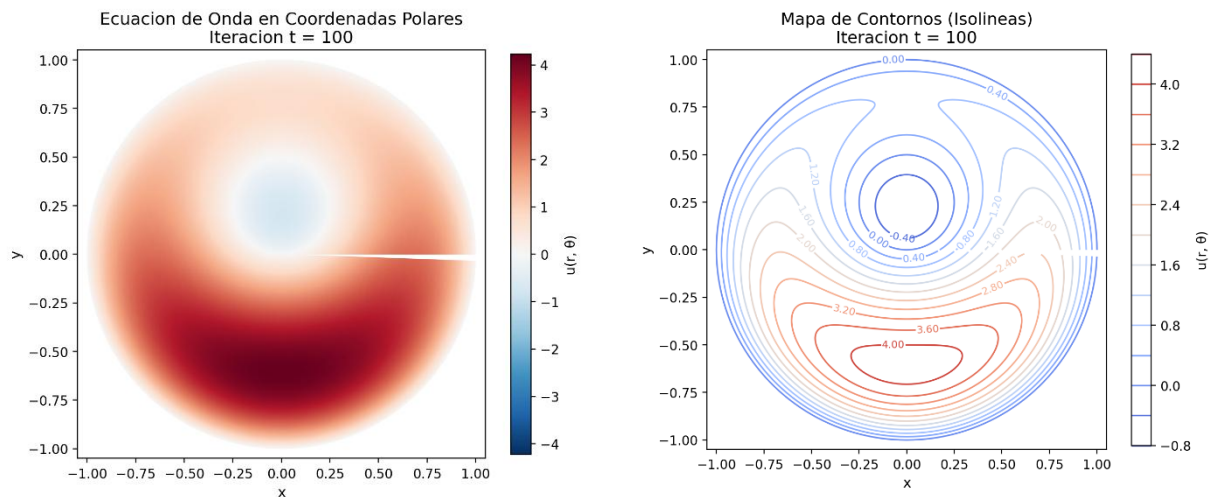


Figura 4

Mapa de color y de contornos $t = 150$

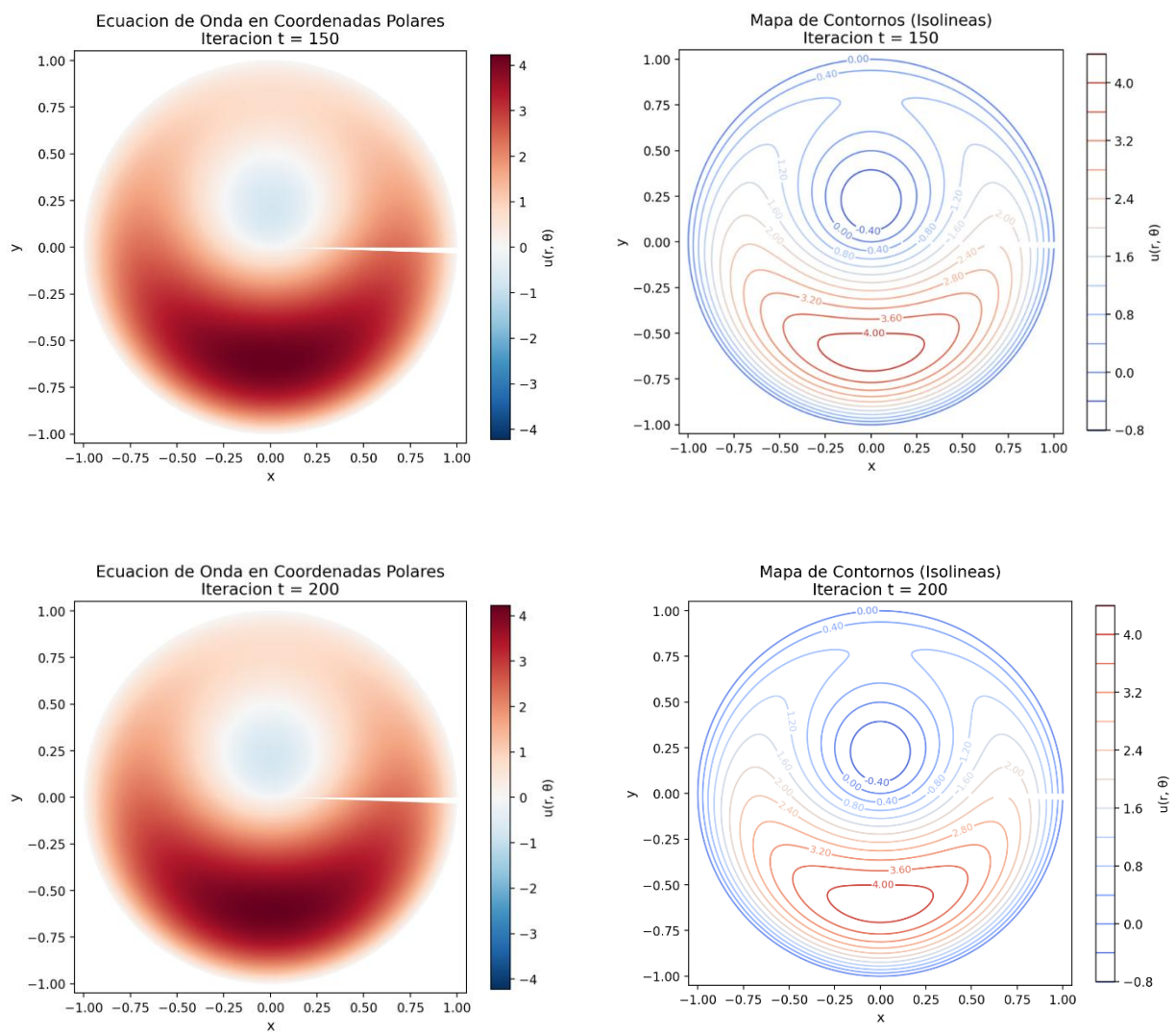


Figura 6

Mapa de color y de contornos $t = 250$

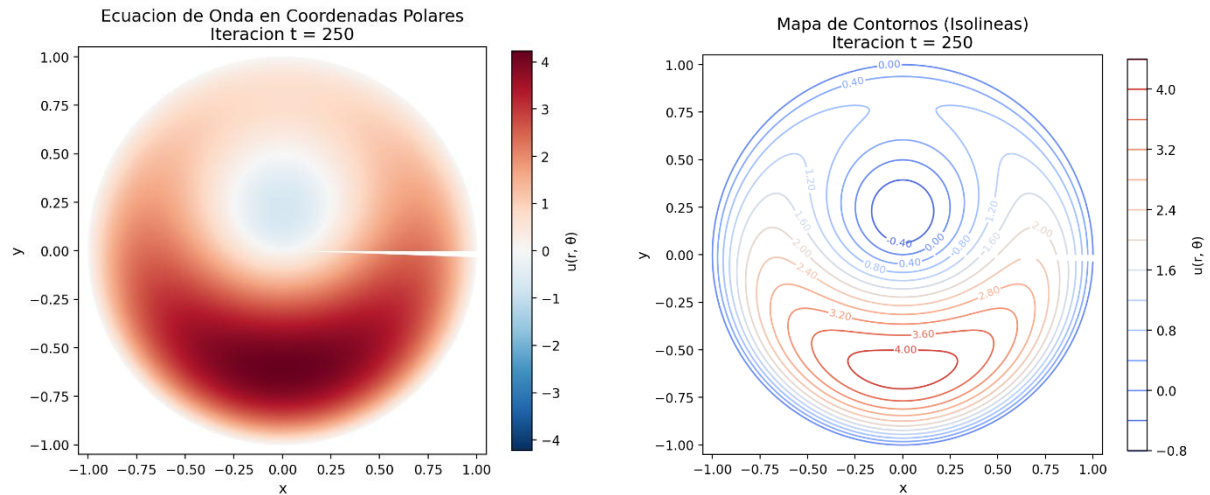
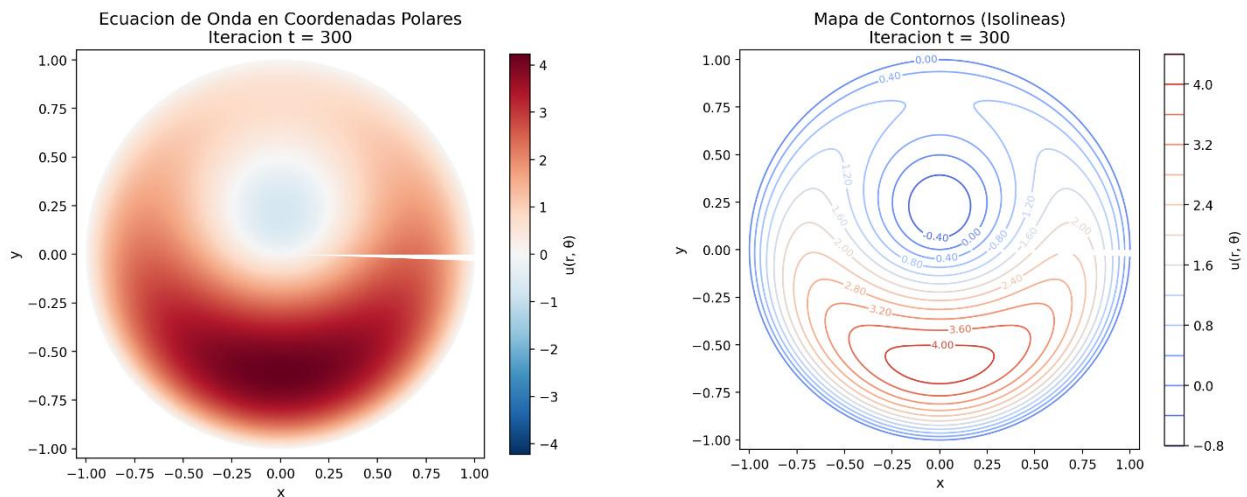


Figura 7

Mapa de color y de contornos $t = 300$



Discusión

Simulación numérica

La perturbación inicial se propaga radialmente desde el centro del disco hacia la frontera externa, con una velocidad consistente con el parámetro $c = 1$. En la frontera $r = R$, los frentes de onda se reflejan debido a la condición de Dirichlet homogénea ($u = 0$), invirtiendo su signo y desplazándose de regreso hacia el centro. La interacción entre ondas incidentes y reflejadas genera patrones complejos de amplitud variable en el interior del dominio. Se observa además la conservación de la energía en el sistema discreto, dentro de los márgenes de precisión del esquema numérico utilizado.

El esquema numérico explícito de segundo orden, garantiza la estabilidad del cálculo durante las 300 iteraciones realizadas. Las gráficas obtenidas muestran de manera consistente los contornos de amplitud, lo que permite un análisis detallado de la dinámica ondulatoria en el dominio circular. La asimetría de la condición inicial dependiente de $\sin(\theta)$ produce patrones de propagación no radiales, cuya dependencia angular persiste a lo largo de toda la simulación.

Visualización

La simulación numérica de la ecuación de la onda en coordenadas polares permitió analizar la propagación de una perturbación inicial dependiente del radio y del ángulo. En el instante inicial $t = 0$ (Figura 1), el mapa de color con contornos superpuestos mostró el perfil definido por $u(r, \theta, 0) = 16r^2 - 8r\sin\theta$, con lóbulos angulares bien marcados y valores nulos en el centro y el borde. El mapa de contornos complementó esta visión al resaltar la asimetría angular introducida por el término sinusoidal.

En la iteración $t = 50$ (Figura 2), el mapa de color evidenció la expansión radial de la onda con alternancia cromática entre regiones positivas y negativas, mientras que el mapa de contornos permitió identificar con claridad los frentes concéntricos en propagación. A medida que avanzó la simulación, en $t = 100$ (Figura 3) se observaron interferencias constructivas y destructivas en el mapa de color, y el mapa de contornos mostró la complejidad creciente de las curvas de nivel, confirmando la naturaleza oscilatoria del fenómeno.

En estados intermedios, como $t = 150$ (Figura 4), el mapa de color reflejó la interacción de la onda con la frontera externa, donde se produjo la reflexión. El mapa de contornos reveló la superposición entre ondas incidentes y reflejadas, con la aparición de nodos y antinodos incipientes. Posteriormente, en $t = 200$ (Figura 5), la propagación se tornó más homogénea; el mapa de color mostró la reducción progresiva de la amplitud y el mapa de contornos enfatizó la consolidación de la simetría radial.

En $t = 250$ (Figura 6), la alternancia cromática entre regiones positivas y negativas se intensificó en el mapa de color, mientras que el mapa de contornos destacó patrones nodales más definidos en el interior del dominio. Finalmente, en $t = 300$ (Figura 7), el mapa de color mostró un patrón estable con predominio de simetrías circulares, y el mapa de contornos confirmó la periodicidad angular y la fidelidad del modelo numérico para reproducir la física del problema.

Las imágenes correspondientes a los distintos tiempos de simulación muestran cómo la onda conserva estabilidad y coherencia en su propagación (Holman & Kunyansky, 2010; Mohanty *et al.*, 2013). Dichos patrones son característicos de las vibraciones en membranas circulares y confirman la correcta implementación del esquema numérico (Morse & Feshbach, 1953; Zhu & Zhao, 2019). El uso de una condición CFL fue fundamental para garantizar la estabilidad del cálculo durante las 300 iteraciones, tal como se ha señalado en Holman & Kunyansky, 2010; Mohanty *et al.*, 2013). Asimismo, el empleo de Python favoreció la integración de rutinas de visualización y análisis, lo cual enriqueció la interpretación de los fenómenos simulados y permitió validar la calidad de las soluciones. Este enfoque no solo aporta un recurso didáctico para la enseñanza de métodos numéricos y física matemática, sino que también abre la posibilidad de extender el modelo hacia aplicaciones más complejas, como la propagación de ondas en medios heterogéneos o bajo condiciones de frontera dinámicas (Allain, 2024; Amadeusferro, 2023).

Aplicaciones prácticas

En Física, las vibraciones en tambores y placas circulares; en ingeniería, el análisis de estructuras radiales sometidas a cargas dinámicas; en geofísica, la propagación de ondas sísmicas en medios con simetría radial; y en la educación, como recurso pedagógico para enseñar métodos numéricos y ecuaciones diferenciales parciales.

Limitaciones

La simulación numérica de la ecuación de onda en coordenadas polares ofrece resultados claros y reproducibles, aunque es importante reconocer las limitaciones inherentes al método utilizado. En primer lugar, el esquema explícito de diferencias finitas requiere pasos de tiempo muy pequeños para garantizar la estabilidad. Esto implica un costo computacional elevado, ya que se necesitan numerosas iteraciones para cubrir intervalos de tiempo relativamente cortos. En problemas de mayor escala o en tres dimensiones, esta restricción puede volverse prohibitiva (LeVeque, 2007; Smith, 1985). La precisión de los resultados depende directamente de la densidad de la malla polar. Una discretización insuficiente en la dirección radial o angular puede generar errores de truncamiento significativos, afectando la correcta representación de nodos y antinodos. Además, cerca del origen, la presencia de términos singulares exige un tratamiento cuidadoso; de lo contrario, pueden aparecer inestabilidades numéricas o distorsiones en la solución (Morton & Mayers, 2005). Otra limitación es la dificultad de extender el modelo a geometrías más complejas o condiciones de frontera no circulares. El esquema actual está optimizado para dominios con simetría radial y condiciones periódicas en el ángulo, lo que restringe su aplicabilidad a problemas con geometrías irregulares. Asimismo, la simulación no incorpora efectos disipativos ni condiciones materiales heterogéneas, por lo que no refleja fenómenos como la atenuación de ondas en medios reales (Morse & Feshbach, 1953; Zhu & Zhao, 2019).

Finalmente, aunque las visualizaciones obtenidas son útiles para comprender la dinámica de la onda, la interpretación cualitativa puede ocultar errores cuantitativos si no se acompaña de métricas de convergencia y conservación de energía. Por ello, resulta

fundamental complementar las gráficas con análisis numéricos que validen la solidez de los resultados (Allain, 2024; Duarte González *et al.*, 2019).

Conclusiones

El desarrollo de este trabajo permitió comprobar la pertinencia del método de diferencias finitas como herramienta numérica para abordar la ecuación de la onda en coordenadas polares, un problema que presenta complejidades adicionales frente a su formulación en coordenadas cartesianas (LeVeque, 2007; Smith, 1985). La implementación en Python demostró ser flexible y eficiente, ya que permitió la construcción de mallas radiales y angulares, la discretización de derivadas parciales y la simulación de la propagación de ondas en dominios circulares con relativa sencillez (Allain, 2024; Amadeusferro, 2023). Los resultados obtenidos evidencian la capacidad del modelo para aproximar soluciones estables y coherentes con el comportamiento físico esperado, siempre que se respeten las condiciones de estabilidad y convergencia propias del esquema numérico (Morton & Mayers, 2005).

En síntesis, el trabajo confirma que la combinación de diferencias finitas en coordenadas polares y herramientas computacionales modernas constituye una vía sólida para aproximar soluciones de la ecuación de la onda, contribuyendo tanto al ámbito académico como al desarrollo de aplicaciones prácticas en ingeniería y ciencias aplicadas (Morse & Feshbach, 1953; Duarte González *et al.*, 2019).

Declaración no conflicto de interés

Los autores declaran la responsabilidad total del contenido científico presentado y aseguran que no existen conflictos de interés de carácter personal, académico, profesional, institucional, financiero o comercial que pudieron influir en el desarrollo de la investigación, el análisis de los resultados o la publicación del presente artículo.

Participación de los autores

Los autores EAA y MTOO asumieron todas las fases del proceso investigativo, incluyendo la conceptualización, la revisión de la literatura, el análisis de los datos, asimismo, aseguran que se llevaron de manera autónoma la redacción, revisión y edición final del presente manuscrito cumpliendo con los estándares éticos y metodológicos establecidos por la comunidad científica.

Referencias bibliográficas

- Allain, R. (2024). *Modeling waves with numerical calculations using Python*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-031-78291-6>
- Amadeusferro. (2023). *Finite-Difference Wave Equation Simulator* (Python) [Repositorio en GitHub]. <https://github.com/amadeusferro/Finite-Difference-Wave-Equation-Simulator>
- Behera, S., & Behera, D. K. (2024). Use of various finite difference methods for solving PDE. *International Journal of Physics and Mathematics*, 6(2), 48–56.
<https://doi.org/10.33545/26648636.2024.v6.i2a.96>
- Belu, R., & Belu, A. C. (2007). Using finite difference methods instead of standard calculus in teaching physics. En *Proceedings of the American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition*. <https://peer.asee.org/using-finite-difference-methods-instead-of-standard-calculus-in-teaching-physics.pdf>
- Berg, I. (2025). *Solving the 2D wave equation with the finite difference method*. Recreational Mathematics. Beltoforum
https://beltoforion.de/en/recreational_mathematics/2d-wave-equation.php
- Duarte González, E. Y., Pichardo Silva, M. J., & Ramírez Mairena, L. V. (2019). *Solución de las ecuaciones diferenciales parciales mediante diferencias finitas* [Informe técnico]. Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, León.
- Holman, B., & Kunyansky, L. (2010). *A second-order finite difference scheme for the wave equation on a reduced polar grid* (Technical Report). University of Arizona.
<https://math.arizona.edu/~leonk/papers/polarFD7.pdf>

- Krishna, G., Kalyanrao, T., & Shrikisan, G. (2021). *New technique for solving time fractional wave equation: Python* [Manuscrito no publicado]. Academia.edu.
<https://www.academia.edu/76599169>
- Langtangen, H. P., & Linge, S. (2017). Finite difference methods for 2D and 3D wave equations. En *Finite difference computing with PDEs* (pp. 241–276). Springer.
- LeVeque, R. J. (2007). *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: Steady-state and time-dependent problems*. SIAM.
- Maas, M. (s.f.). *Apuntes de diferencias finitas* [Apuntes de cátedra]. Universidad de Buenos Aires.
- Mohanty, R. K., Kumar, R., & Dahiya, V. (2012). Cubic spline method for 1D wave equation in polar coordinates. *ISRN Computational Mathematics*, 2012, 1–6.
<https://doi.org/10.5402/2012/302923>
- Morton, K. W., & Mayers, D. F. (2005). *Numerical solution of partial differential equations: An introduction* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Morse, P. M., & Feshbach, H. (1953). *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). *Numerical recipes: The art of scientific computing* (3rd ed.). Cambridge University Press.
- Qingkai, K., Timmy, S., & Alexandre, B. (2020). *Finite difference method*. En *Python Numerical Methods*. University of California, Berkeley.
<https://pythonnumericalmethods.studentorg.berkeley.edu>
- Smith, G. D. (1985). *Numerical solution of partial differential equations: Finite difference methods* (3rd ed.). Oxford University Press.
- Strikwerda, J. C., & Nagel, Y. (1986). *Finite difference methods for polar coordinate systems* (Technical Summary Report No. 2934). Mathematics Research Center, University of Wisconsin-Madison.
- Zhu, N., & Zhao, M. L. (2019). High-order finite difference method for Helmholtz equation in polar coordinates. *American Journal of Computational Mathematics*, 9(3), 174–186. <https://doi.org/10.4236/ajcm.2019.93013>



Revista Colón Ciencias, Tecnología y Negocios

ISSN L: 2313-7819

Vol. 13, Nº 2 Julio – Diciembre 2026

pp. 38-66

Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2009). *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera* (A. E. García Hernández, Trad.; 7ª ed.). Cengage Learning Editores.