	REVISTA SABERES APUDEP **ISSN L 2644-3805** Acceso Abierto. Disponible en: https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep	Volumen 4 Número 2 Julio-Diciembre 2021 Recibido: 11/02/21; Aceptado: 17/04/21 pp. 122-136	

DEMOSTRACIONES DE LA IRRACIONALIDAD DE $\sqrt[n]{p}$, π y e.

PROOFS OF THE IRRATIONALITY OF $\sqrt[n]{p}$, π and e.

Darío Herrera Díaz

Universidad de Panamá, Departamento de Matemática. Panamá.

dario.herrera@up.ac.pa , https://orcid.org/0000-0003-4792-3374

RESUMEN

El trabajo presenta demostraciones de la irracionalidad de $\sqrt[n]{p}\,,\pi$ y e, utilizando criterios elementales de la Matemática. La irracionalidad de los números de la forma $\sqrt[n]{p}$, p primo y $n \in Z^+$, queda establecida al verificar que éstos sean raíces de un polinomio, no nulo, con coeficientes enteros; mientras que la irracionalidad de π y e se demuestra a partir de las herramientas elementales del cálculo diferencial e integral. Al hacer la transposición didáctica de algunas demostraciones que utilizan criterios elementales de la Matemática, el trabajo propone pruebas alternativas a las tradicionales o clásicas.

PALABRAS CLAVE Prueba, Irracionalidad de π, Irracionalidad de e, Irracionalidad de $\sqrt[n]{p}$.

ABSTRACT

This paper presents proofs of the irrationality of $\sqrt[n]{p}\,,\pi$ y e, using elementary criteria of the maths. La irrationality of the numbers of the form $\sqrt[n]{p}$, p prime and $n \in Z^+$, is established by verifying that these are roots of a nonzero polynomial whit integer coefficients; while the irrationality of π and e it is proved from the elementary tools of differential and integral calculus. When doing the didactic transposition of some tests that use elementary criteria of the maths, this paper proposed alternative proofs to the traditional or classical one.

KEYWORDS: Proof, Irracionality of π, Irracionality of e, Irracionality of $\sqrt[n]{p}$.

INTRODUCCIÓN

Las primeras demostraciones, probables, de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$ son de carácter geométrico, y se reducen a establecer que el lado y la diagonal de un cuadrado o de un pentágono regular, respectivamente, no tiene una unidad común de medida; es decir, no son conmensurables (Boyer,1986, p.107-108). Sin embargo, las demostraciones tradicionales de la irracionalidad de $\sqrt{2}, \sqrt{3},$ y $\sqrt{5}$ que se presentan en los niveles preuniversitarios y en los primeros años universitarios consisten en suponer que estos números son de la forma $\frac{p}{q}$, con p y q primos entre sí; y llegar, a través de argumentos análogos, a la conclusión que p y q son múltiplos de $2, 3$ y 5, respectivamente; contradiciendo el hecho que el máximo común divisor de p y q es uno ($(p, q) = 1$). Para demostrar la irracionalidad de π se continúa con esta tendencia, al asumir que $\pi^2 = \frac{p}{q}$ (Spivak, 1978, p.418).

En este trabajo, lo primero que se hace es una transposición didáctica de la demostración geométrica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ presentada por Fel'dman y Nesteresnko (1998, p.12-13); seguidamente se analiza el criterio que establece la irracionalidad de $\sqrt[n]{p}$ con tan sólo verificar que estos números sean raíces de un polinomio Mónico con coeficientes enteros (Niven, 1985, p.15-16). Finalmente se hace una síntesis de las demostraciones exhibidas por Niven (1985, p.16-19), Parks (1986) y Castro (1989); en las cuales se emplean, principalmente, el teorema fundamental del cálculo y el teorema de Weierstrass.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2644-3805

Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep

Volumen 4 Número 2
Julio-Diciembre 2021

Recibido: 11/02/21;
Aceptado: 17/04/21
pp. 122-136

DESARROLLO

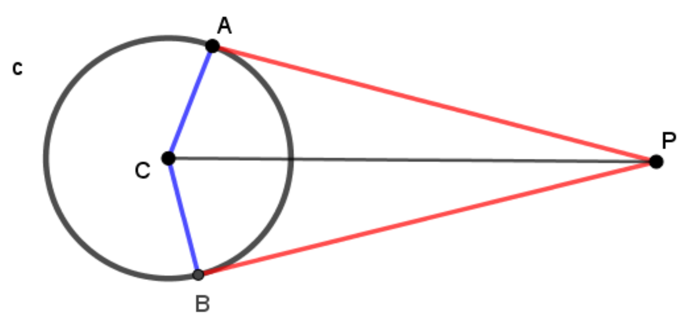
1. Prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, por medio del Análogo Geométrico del Algoritmo de Euclides para el máximo común divisor de dos enteros.

Probar que el lado y la diagonal de un cuadrado no tienen una unidad común de medida, es equivalente a demostrar la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Definición 1: Dos segmentos de longitudes a y b, respectivamente, se llaman conmensurables si existe un segmento de longitud c y dos números enteros positivos n y m de forma que $a = nc$ y $b = mc$. Dos segmentos se llaman inconmensurables, si no son conmensurables.

Propiedad 1. Los dos segmentos tangentes a una circunferencia desde un punto exterior son congruentes y determinan ángulos congruentes con el segmento que une el punto exterior al centro. (Figura 1)

Figura 1. Dos segmentos tangentes a una circunferencia desde un punto exterior



$\overline{AP} \cong \overline{BP}$

$\angle CPA \cong \angle CPB$

Fuente: Elaboración propia (2021).

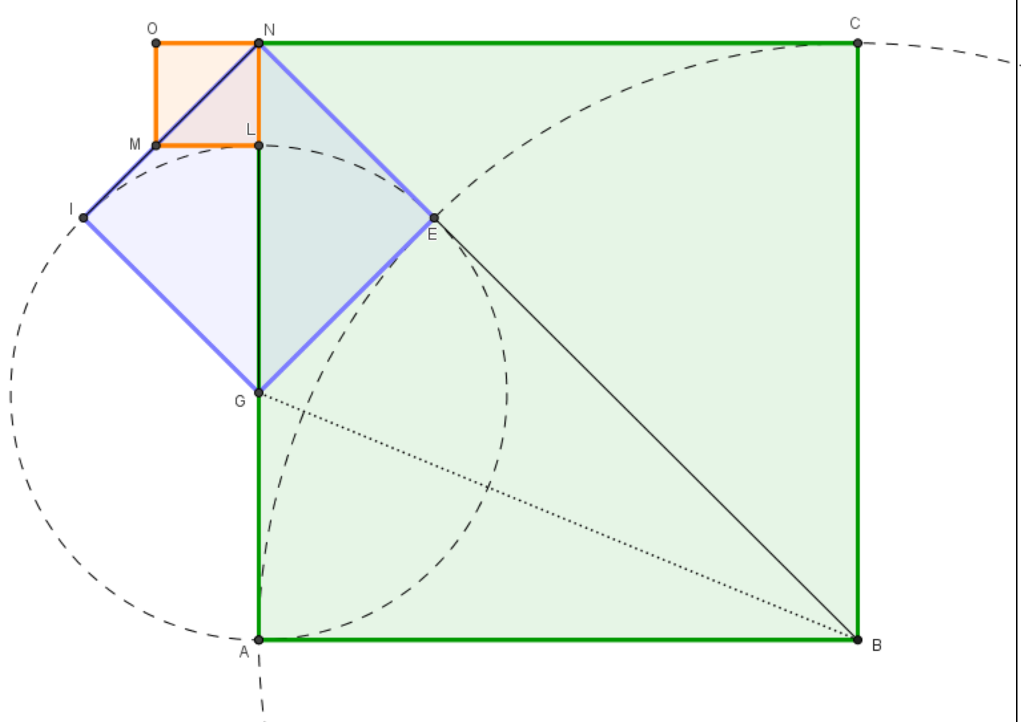
El análogo geométrico del Algoritmo de Euclides, para el máximo común divisor de dos enteros, nos permite probar que el lado y la diagonal de un cuadrado no son conmensurables.

Teorema 1. El lado AB y la diagonal BN de un cuadrado no son conmensurables.

Demostración:

Para demostrar que el lado AB y la diagonal BN de un cuadrado no son conmensurables, consideremos la figura 2:

Figura 2. Lado y diagonal de un cuadrado



Fuente: Elaboración propia (2021)

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2644-3805

Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep

Volumen 4 Número 2
Julio-Diciembre 2021

Recibido: 11/02/21;
Aceptado: 17/04/21
pp. 122-136

En el cuadrado $ABCN$, sea:

1) E el punto de intersección de la diagonal BN y el circulo centrado en B y radio AB.
2) G el punto de intersección del lado AN y la tangente al círculo descrito en (1) en E.
3) I el punto simétrico de E con respecto a la recta AN

Entonces, $GINE$ es un cuadrado en donde:

4) $EN = BN - BE = BN - AB$, ya que $BE = AB$ por ser el radio del círculo descrito en (1).
5) La diagonal $GN = AN - AG$

$$= AB - GE \qquad \text{Por la propiedad 1, } AG = GE$$

$$= AB - EN$$

$$= AB + AB - EN - AB$$

$$= 2AB - (EN + AB)$$

$$= 2AB - (EN + BE)$$

$$= 2AB - BN$$

Si AB y BN son conmensurables, existe un segmento de longitud c contenido un número exacto de veces tanto en AB , como en BN ($AB = nc$ y $BN = mc$; $n, m \in \mathbb{Z}^{+}$); y, por lo tanto, por 4) y 5), en EN y GN que son los lados y la diagonal, respectivamente, del cuadrado $GINE$.

Si repetimos la construcción descrita en los puntos 1), 2) y 3); en el cuadrado $GINE$, obtendremos el cuadrado más pequeño $MLNO$; cuyo lado y diagonal son ambos múltiplos del segmento original de longitud c.

Continuando con estas construcciones, obtenemos una secuencia infinita de cuadrados cuyos lados son múltiplos del segmento original de longitud c, lo que es imposible, pues los lados de los cuadrados se aproximan a cero; por lo tanto, el lado AB y la diagonal BN no son conmensurables.

2. Un criterio elemental para determinar la irracionalidad de $\sqrt[n]{p}$.

Propiedad 2. (Teorema Fundamental de la Aritmética)

Todo número entero positivo puede descomponerse como producto de factores primos de forma única, salvo el orden de dichos factores.

Teorema 2. Si un número real α satisface la ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$$

Con coeficientes enteros, entonces α es o bien un entero o bien un número irracional.

Prueba:

Supongamos que $\alpha \in \mathbb{Q}$, es decir,

$\alpha = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ y $(p, q) = 1$

Tendríamos que,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = -\left(a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} \ldots + a_0\right)$$

$$p^n = -q^n\left(a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} \ldots + a_0\right)$$

$$p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q \ldots + a_0q^{n-1})$$

Si $q > 1$, entonces cualquier divisor primo de q dividiría a p^n y por el Teorema Fundamental de la Aritmética también dividiría a p, contradiciendo el hecho que

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2644-3805

Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep

Volumen 4 Número 2
Julio-Diciembre 2021

Recibido: 11/02/21;
Aceptado: 17/04/21
pp. 122-136

$(p, q) = 1$. Luego $q = 1$, lo que establece que α es o bien un entero o un número irracional.

Haciendo uso del teorema precedente se obtiene que:

- ✓ Si n es un entero que no es un cuadrado perfecto, $\sqrt{n}$ es número irracional.

Para ello basta considerar la ecuación $x^2 - n = 0$ y así obtenemos, por ejemplo, que: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ son irracionales

- ✓ Si m es un entero positivo que no es la n-ésima potencia de algún entero, entonces $\sqrt[n]{m}$ es irracional.

Para ello basta considerar la ecuación $x^n - m = 0$ y así obtenemos, por ejemplo, que: $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[7]{3}$ son irracionales.

3. **Prueba de la irracionalidad de π y e .**

Como señala Lagarias (2013), la primera prueba de la irracionalidad del número e fue dada por el matemático suizo Leonhard Paul Euler en 1737; y la deduce a partir de la expansión de e en fracción continua, determinada por él; a saber:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

Por otro parte, Dorrego (2014) refiere que la primera demostración de la irracionalidad de π aparece en las Actas de la Academia de Ciencias de Berlín y fue publicada por Johann Lambert en 1768; la cual se apoya en la expansión, determinada por él, de $\tan x$ en términos de una fracción continua; a saber:

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2644-3805

Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep

Volumen 4 Número 2
Julio-Diciembre 2021

Recibido: 11/02/21;
Aceptado: 17/04/21
pp. 122-136

$$\tan x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \cdots}}}}$$

Las pruebas que se presentan a continuación, siguiendo la idea central del presente trabajo, son una síntesis de las presentadas por Niven(1985, p.16), Parks (1986) y Castro (1989).

Propiedad 3. (Teorema Fundamental del Cálculo)

Supóngase que f es continua sobre $[a, b]$, entonces:

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f, es decir, $F' = f$

Propiedad 4. (Teorema de Weierstrass)

Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superior e inferiormente, es decir, existen M, N tal que $N \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$

Definición 2. (Función Especial para $c \in \mathbb{R}^+$)

Sea $c \in \mathbb{R}^+$, f una función continua de $[0, c]$ en $\mathbb{R}$ y positiva en $(0, c)$. Se dice que f es una función especial para c (F.E. para c), si existe una sucesión de funciones $f_1, f_2, \ldots$ de $[0, c]$ en $\mathbb{R}$, derivables en $(0, c)$ tales que $f_1'(x) = f(x)$, $f_k'(x) = f_{k-1}(x)$; para todo $k \geq 2$ y tal que $f_k(0)$, $f_k(c)$ son enteros para todo $k \geq 1$.

Definición 3. (Conjunto Especial de polinomios para $c \in \mathbb{R}^+$)

Sea $c \in \mathbb{R}^+$. Se dice que un conjunto $\mathcal{P}$ de polinomios sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto especial de polinomios para c si, $\forall g(x) \in \mathcal{P}$;

$$g(0), g(c), g'(0), g'(c), \ldots, g^{(k)}(0), g^{(k)}(c), \ldots, \in \mathbb{Z}$$

Es decir, $\mathcal{P} = \{g(x) \in \mathbb{R}[x]: g(0), g(c), g'(0), g'(c), \ldots, g^{(k)}(0), g^{(k)}(c), \ldots, \in \mathbb{Z}\}$.

Ejemplo 1. Si $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y $c = \frac{m}{n}$; es claro que $t(x) = m - 2nx \in \mathcal{P}$

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2644-3805
Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep
Volumen 4 Número 2
Julio-Diciembre 2021
Recibido: 11/02/21;
Aceptado: 17/04/21
pp. 122-136

Lema 1: Sean $g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$, entonces

$$(g(x)h(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x)$$

Prueba: (Por inducción).

Para $n = 1$

Sean $g(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ y $h(x) = \sum_{i=0}^{s} b_i x^i$. Entonces

$$g'(x) = \sum_{i=0}^{m-1}(i+1)a_{i+1}x^i \quad , \quad h'(x) = \sum_{i=0}^{s-1}(i+1)b_{i+1}x^i, \text{ y}$$

$$(g(x)h(x))' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

$$(g(x)h(x))' = \left(\sum_{i=0}^{m-1}(i+1)a_{i+1}x^i\right)h(x) + g(x)\left(\sum_{i=0}^{s-1}(i+1)b_{i+1}x^i\right)$$

$$\begin{aligned}(g(x)h(x))' &= \left(\sum_{i=0}^{m-1}(i+1)a_{i+1}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{s} b_i x^i\right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \right)\left(\sum_{i=0}^{s-1}(i+1)b_{i+1}x^i\right) \\ &= (a_1b_0 + b_1a_0) + (2a_1b_1 + 2a_2b_0 + 2b_2a_0)x + \cdots \\ &\quad +(m+s)(a_0b_{m+s} + a_1b_{m+s-1} + a_2b_{m+s-2+} \ldots + \\ &\quad a_{m+s}b_0) \\ &= \sum_{j=0}^{m+s-1} d_j x^j\end{aligned}$$

Donde $d_j = (j+1)\sum_{i=0}^{j+1} a_i b_{j+1-i}$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}g(x)h(x) &= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \right)\left(\sum_{i=0}^{s} b_i x^i \right) \\ &= a_0b_0 + (a_ob_1 + a_1b_0)x + \cdots + (a_0b_{n+s} + a_1b_{n+s-1} + \cdots + \\ &\quad a_{n+s}b_0)x^{n+s} \\ &= \sum_{j=0}^{n+s} c_j x^j\end{aligned}$$

Donde $c_j = \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}$

Luego,

$$(g(x)h(x))' = \sum_{j=0}^{m+s-1}(j+1)c_{j+1}x^j$$

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2644-3805

Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep

Volumen 4 Número 2
Julio-Diciembre 2021

Recibido: 11/02/21;
Aceptado: 17/04/21
pp. 122-136

$$= \sum_{j=0}^{m+s-1} \left((j+1)\sum_{i=0}^{j+1} a_i b_{j+1-i}\right) x^j$$
$$= \sum_{j=0}^{m+s-1} d_j x^j$$

Por lo tanto,

$$(g(x)h(x))' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$
$$(g(x)h(x))' = \binom{1}{0} g^{1-0}(x)h(x) + \binom{1}{1} g(x)h^1(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} g^{1-k}(x)h^k(x)$$

Supongamos que se tiene para n, Hipótesis de Inducción (H.I). Veámoslo para $n+1$.

En efecto,

$$\left(g(x)h(x)\right)^{(n+1)} = \left[\left(g(x)h(x)\right)^{(n)}\right]'$$
$$= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x)\right]' \text{ Por H.I.}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x)\right)'$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(g^{(n-k+1)}(x)h^{(k)}(x) + g^{(n-k)}(x)h^{(k+1)}(x)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k+1)}(x)h^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x)h^{(k+1)}(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n+1-k)}(x)h^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} g^{(n-k+1)}(x)h^{(k)}(x)$$
$$= g^{(n+1)}(x)h^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] g^{(n+1-k)}(x)h^{(k)}(x)$$
$$+g^{(0)}(x)h^{(n+1)}(x)$$
$$= g^{(n+1)}(x)h(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} g^{(n+1-k)}(x)h^{(k)}(x) + g(x)h^{(n+1)}x$$

La última expresión se obtiene del hecho que: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Finalmente se tiene que,

$$\left(g(x)h(x)\right)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} g^{(n+1-k)}(x)h^{(k)}(x)$$

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2644-3805

Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep

Volumen 4 Número 2
Julio-Diciembre 2021

Recibido: 11/02/21;
Aceptado: 17/04/21
pp. 122-136

Lema 2: Si $g(x), h(x) \in \mathcal{P}$, entonces $g(x)h(x) \in \mathcal{P}$.

La prueba se sigue del Lema 1.

Lema 3. Sea $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y $c = \frac{m}{n}$, entonces:

$$g_k(x) = \frac{x^k(m-nx)^k}{k!} \in \mathcal{P}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Prueba: Por inducción

1. $g_0(x) = 1$. Luego $g_0(x) \in \mathcal{P}$
2. Supongamos que $g_{k-1}(x) \in \mathcal{P}$.

Es evidente que $g_k(0) = g_k(c) = 0$; luego basta probar que $g'_k(x) \in \mathcal{P}$ para, por la misma definición de $\mathcal{P}$, concluir que $g_k(x) \in \mathcal{P}$. Ahora bien:

$$g'_k(x) = \frac{1}{k!}[kx^{k-1}(m-nx)^k - knx^k(m-nx)^{k-1}]$$

$$= \frac{1}{k!}x^{k-1}(m-nx)^{k-1}[k(m-nx) - knx]$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}x^{k-1}(m-nx)^{k-1}(m-2nx)$$

$$= g_{k-1}(x)t(x)$$

Donde $t(x) = m - 2nx$,del ejemplo 1.

Como $g_{k-1}(x) \in \mathcal{P}$ (H.I) y $t(x) \in \mathcal{P}$, por el lema 2 se tiene que

$$g_{k-1}(x)t(x) \in \mathcal{P}$$

Luego, $g'_k(x) \in \mathcal{P}$.

Lema 4. Si f es F.E para c , entonces:

$$\int_0^c f(x)g(x)dx \in \mathbb{Z}; \forall g(x) \in \mathcal{P}$$

Prueba.

Sea $g(x) \in \mathcal{P}$, con $gr(g) = d$; se tiene, aplicando integración por partes y la propiedad 3 que:

$$\int_0^c f(x)g(x)dx = \left[f_1 g - f_2 g' + f_3 g'' - \cdots + (-1)^d f_{d+1} g^{(d)}\right]_0^c$$

De donde, $\int_0^c f(x)g(x)dx \in \mathbb{Z}$; $\forall g(x) \in \mathcal{P}$.

Teorema 3: Si f es F.E para c, entonces c es irracional.

Prueba:

Sea f una F.E para c y supongamos que c es racional, es decir, $c = \frac{m}{n}$. Sin pérdida de las generalidades, supóngase que $m, n \in \mathbb{Z}^+$

Por los lemas 3 y 4 se tiene que:

(*) $$\int_0^c f(x)g_k(x)dx \in \mathbb{Z}$$

Como f y g_k son continuas es $[0, c]$ y positivas en $(0, c)$ se sabe que

(**) $$\int_0^c f(x)g_k(x)dx > 0$$

Ahora en vista de que la función $h(x) = x(m - nx)$ es continua en $[0, c]$ y positivas en $(0, c)$, al igual que f se tiene por el Teorema de Weierstrass que existen $L > 0$ y $M > 0$ tales que:

$$f(x) \leq M \quad \text{y} \quad h(x) \leq L\ , \ \forall x \in [0, c]$$

Luego,

$$0 < \int_0^c f(x)g_k(x)dx \leq cM\frac{L^k}{k!} \qquad \forall k \in N$$

Pero, en vista de que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{L^k}{k!} = 0$$

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall K \geq N$,

$$0 < cM\frac{L^k}{k!} < 1$$

De donde, $\forall K \geq N$ se tiene que:

$$0 < \int_0^c f(x)g_k(x)dx < 1$$

Contradiciendo (*), por lo que nuestra suposición es falsa y c es irracional.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2644-3805

Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep

Volumen 4 Número 2
Julio-Diciembre 2021

Recibido: 11/02/21;
Aceptado: 17/04/21
pp. 122-136

Corolario 1. Si $\cos r$ y $\operatorname{sen} r$ son racionales, con $0 < |r| \leq \pi$, entonces r es irracional.

Demostración:

Si $\cos r$ y $\operatorname{sen} r$ son racionales, existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m \cos|r|$ y $m \operatorname{sen}|r|$ son enteros.

Sea $f(x) = m\, senx$, $\forall x \in [0, |r|]$ y $f_1(x) = -m \cos x$, $f_2(x) = -m\, senx$, $f_3(x) = m \cos x$, $f_4(x) = m\, senx$, $f_5(x) = -m \cos x$, $f_6(x) = -m\, senx, \ldots$.

Claramente f es una F.E para $|r|$, entonces $|r|$ es irracional y por lo tanto r es irracional.

Corolario 2. Si $r \in \mathbb{Q}^+$ y $r \neq 1$, entonces $\ln r$ es irracional.

Prueba.

i. Si $r > 1$, $\ln r > 0$. Como $r \in \mathbb{Q}^+$, existen $m, n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $r = \frac{m}{n}$.

Sea $f(x) = ne^x$ y $f(x) = f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_k(x) = \cdots$

Claramente f es una F.E para $\ln r$, por lo tanto $\ln r$ es irracional

ii. Si $0 < r < 1$, $\frac{1}{r} > 1$, luego por (i) $\ln \frac{1}{r}$ es irracional y por lo tanto $\ln r = -\ln \frac{1}{r}$ es irracional.

Del corolario 1 se deduce que π es irracional ya que $cos\, \pi = -1$ y $sen\, \pi = 0$.

Del corolario 2 se deduce que e es irracional ya que, si fuese racional, se tendría en vista de que $e > 1$ que $\ln e = 1$ es irracional, lo que obviamente no es cierto.

CONCLUSIONES

Las primeras pruebas de la irracionalidad de ciertos números no están al alcance; en muchas ocasiones, incluso, de los estudiantes de los primeros años de la Licenciatura en Matemática. Es necesario que el docente procure presentar pruebas alternativas que sean accesibles a la mayoría de los estudiantes; para, posteriormente, abordar las que se dieron inicialmente.

Algunos temas de investigación para estudiantes de Matemática podrían ser la deducción minuciosa de la prueba de la irracionalidad de π y e hechas por Lambret y Euler, respectivamente, así como un estudio histórico, cronológico y comparativo de pruebas de la irracionalidad de éstos y otros números.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial

Castro, I. (1989). Un método elemental para encontrar números irracionales. *Revista Integración, 7* (1), 23-31. Recuperado de: file:///G:/Redacci%C3%B3n%20de%20art%C3%ADculos%20cient%C3%ADficos/Sobre%20art%C3%ADculos/1161-Texto%20del%20art%C3%ADculo-2989-1-10-20101130%20(1).pdf

Dorrego, E. (2014). Sobre la irracionalidad de π: Ideas generales de la demostración de Lambert. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis, 3 (*1-2), 81-93. Recuperado de: http://gcfcf.com.br/pt/files/2017/05/7.-NPSF-v.3-n.1-2-Dorrego1.pdf

Fel'dman, N.I. y Nesterenko, Y. V. (1988). Trascendental Numbers. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 44.* New York: Springer.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2644-3805
Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep
Volumen 4 Número 2
Julio-Diciembre 2021
Recibido: 11/02/21;
Aceptado: 17/04/21
pp. 122-136

Lagarias, J. (2013). Euler't Constant: Euler's Word and modern developments. *The American Mathematical Society, 50* (4), 527-628. Recuperado de: https://www.ams.org/journals/bull/2013-50-04/S0273-0979-2013-01423-X/S0273-0979-2013-01423-X.pdf

Niven, I. (1985). Irrational Numbers. *Carus Mathematical Monographs, 11.* Estados Unidos de América. The Mathematical Association of America.

Parks, A. (1996). π, e and other irrational numbers. *The American Mathematical Monthly, 93* (9), 722-723. Recuperado de: https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~marin/une_autre_crypto/articles_et_extraits_livres/irationalite/Park_A.E._pi_e_and_other_irational_numbers.pdf

Spivak, M. (1978). *Cálculo Infinitesimal, 2*. Barcelona: Editorial Reverté