	REVISTA SABERES APUDEP **ISSN L 2644-3805** Acceso Abierto. Disponible en: https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep	Volumen 5 Número 2 Julio - Diciembre 2022 Recibido: 8-3-2022 Aceptado: 22-4-2022 pp.76-91	

DOS RESULTADOS DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES ÚTILES EN LAS INVERSIONES ECONÓMICAS Y LAS FINANZAS

TWO RESULTS OF THE CALCULUS OF PROBABILITIES USEFUL IN ECONOMIC INVESTMENTS AND FINANCE

Bracho Rivera René Isaac

Universidad de Panamá. Centro Regional Universitario de San Miguelito. Facultad de Economía. Panamá. rene.bracho@up.ac.pa. https://orcid.org/0000-0002-3247-2075

RESUMEN

El siguiente escrito presenta una revisión de dos de los resultados del cálculo y la teoría de las probabilidades a la luz de aplicaciones en lo financiero, lo actuarial y el ámbito gerencial de los juegos de azar. Estos resultados son: La Esperanza Matemática y la Ley de los Grandes Números.

PALABRAS CLAVES azar, fenómenos aleatorios, probabilidades, incertidumbre, actuarial

ABSTRACTS

The following document presents a review of two of the results of the probabilities calculation and theory of in light of applications in the financial, actuarial and managerial fields of games of chance. These results are: Mathematical Hope and the Law of Large Numbers.

KEYWORDS chance, random phenomena, probabilities, uncertainty, actuarial

INTRODUCCIÓN

El concepto de probabilidades es uno de los más útiles descubrimientos de la ciencia matemática al punto que representó una evolución en la forma en que los seres humanos enfrentamos e interpretamos los fenómenos aleatorios. Antes de la aparición de la noción de probabilidades, la humanidad interpretaba los sucesos en los que intervenía el azar mediante la superstición o el misticismo apelando a la "suerte" como herramienta.

Hoy definimos a la probabilidad como: la medida de la incertidumbre que tiene un observador sobre la ocurrencia de un evento. (Landro, 2012). Matemáticamente, la probabilidad puede definirse como una función medible que recorre un trayecto desde el espacio muestral hacia el intervalo cerrado [0,1]. Su expresión formal es: $\Omega \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Y en asociación con los eventos pertenecientes al espacio muestral se pueden definir diversas operaciones algebraicas con conjuntos, Sin embargo, la palabra probabilidades fue mencionada por primera vez en la literatura matemática en el siglo XVII de la mano de George Hooper. Este detalle pasa desapercibido ya que comúnmente se establece que el cálculo de probabilidades comenzó con la formulación del problema del juego inconcluso por Fray Luca Pacioli (S. XV), Girolamo Cardana (S.XVI), las correspondencias entre Pierre Fermat y Blas Pascal (S.XVII) y el trabajo de Christiaan Huygens (S.XVII). Lo cierto es que los autores de estos trabajos precursores del cálculo de probabilidades no reflexionaban en términos de probabilidades sino de valor esperado o esperanza matemática.

El aporte innovador de Pascal y Fermat que les hizo acreedores al título de fundadores del cálculo de probabilidades fue la introducción de la revolucionaria idea de imaginar el futuro matemáticamente. Aplicaron esta innovación a la solución del problema del juego inconcluso presentado por Pacioli.

Por otro lado, es de gran utilidad recordar algunos conceptos fundamentales del cálculo y teoría de las probabilidades:

- Modelo de probabilidad: es un tipo de modelo matemático que incorpora la probabilidad para representar un fenómeno o proceso aleatorio dentro de la realidad física o el contexto humano.
- Espacio muestral: "Es el conjunto de todos los posibles resultados diferentes (resultados muestrales) que puede generar el experimento. Para el lanzamiento de un dado será S = (1,2,3,4,5,6)". (Bouza, 2020, p. 4).
- Evento: es todo subconjunto o colección de elementos perteneciente al espacio muestral incluyendo el conjunto vacío.

Otro aspecto importante son los enfoques para interpretar las probabilidades:

- Enfoque A priori o Clásico: Dicha perspectiva está íntimamente relacionada con la Regla de Laplace. Y está apoyada en la presencia de patrones de simetría y equiprobabilidad latente en algunos sucesos aleatorios. Estas propiedades permiten el cálculo de probabilidades de forma teórica y previa a la realización de los experimentos aleatorios. La definición de probabilidades aportada por Pierre Simón De Laplace propone la fórmula fundamental del cálculo de probabilidades, en donde la probabilidad es el cociente de un evento y el espacio muestral:

  $$P = \frac{\#A}{\#\Omega} \;;$$

  Donde (#A) es la cardinalidad de un evento A (subconjunto del espacio muestral). Y (#Ω) es la cardinalidad del espacio muestral.
- Enfoque Frecuentista: Este enfoque toma en cuenta las veces que se repite un suceso de forma fáctica y observable. A este modelo también se le denomina a posteriori porque requiere la realización previa del experimento

aleatorio y a las probabilidades estimadas en este enfoque se les llama "frecuencias relativas".

La probabilidad en este enfoque es definida como un límite al que se llega cuando aumenta el número de veces que se realiza el experimento aleatorio. Es decir, un valor (límite) al cual se aproxima la función, cuando el número de ensayos del experimento aleatorio tiende a infinito.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

Donde: n(A) es el número de veces que ocurre el evento A; n es el número de ensayo o veces en que se repite el experimento aleatorio.

- Enfoque Axiomático: Esta perspectiva define la probabilidad mediante la formalización axiomática. Dicho grado de tratamiento matemático representó un avance destacado en la teoría de las probabilidades debido que hasta ese momento las investigaciones en este campo estaban enfocadas a la aplicación y cálculo de estas medidas, pero no se habían presentado las definiciones fundamentales. Fue el matemático ruso Andrei Kolmogorov quien aportó estas definiciones. Se plantea que la probabilidad es una función cuyo recorrido parte del espacio muestral hacia el conjunto de los números reales (intervalo [0,1]). Constituyendo el espacio muestral un espacio medible definido junto a la sigma álgebra (Ƒ).

  De esta definición se derivan los axiomas de la probabilidad:

  - Axioma 1: La probabilidad de un evento no es mayor que 1 ni menor que cero.

    $$\mathbf{0 \leq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \leq 1}$$

  - Axioma 2: La probabilidad del espacio muestral es 1.

    $$\boldsymbol{P}(\Omega) = \mathbf{1}$$

  - Axioma 3: Ante dos eventos mutuamente excluyentes la probabilidad de la unión de ambos conjuntos de estos eventos es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos.

$$P\bigcup_{n=1}^{\infty} A_j = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_j)$$

- Enfoque Logicista: esta visión tiene antecedentes en menciones que hizo Simon D. Poisson, pero realmente, es profundizada por el célebre economista John M. Keynes y otros estadísticos matemáticos influenciados por la filosofía analítica de Wittgenstein, Russell y Moore.

  Para la escuela logicista la probabilidad es entendida como “grado de creencia… que es función del conocimiento definido por un conjunto de argumentos”. Lo que define a la medida de probabilidad es una relación entre una proposición y una estructura de conocimiento, condicionada por la verdad de dicho conocimiento. (Landro, 2015, p.46). Formalmente, sería

$$P(A/B) = \frac{A}{B}; A \subset \Omega; A = \{w/s(w)\ \ es\ verdadera\}$$

- Enfoque Subjetivista: En dicha perspectiva la probabilidad es definida como una medida de la cantidad de información o conocimiento que posee un observador sobre el potencial resultado de un experimento aleatorio. Este enfoque implicó una evolución de la cosmovisión dinámica de la realidad física y el contexto humano hacia un paradigma aleatorista. Una visión de la ciencia marcada por la irrupción de los descubrimientos en física cuántica. En consecuencia, la probabilidad como un valor estocástico y subjetivamente variable.

  La interpretación subjetivista fue considerada por estadísticos y epistemólogos de la talla de R. Fisher y J. Neyman.
- Enfoque Propensionalista: la interpretación de este modelo concibe a la probabilidad de un evento como una medida derivada de la tendencia a generar frecuencias relativas (visión de K. Popper) o como tendencia del fenómeno o sistema de eventos para generar determinado resultado (visión de Miller, D. W.).

1. La Esperanza Matemática

Uno de los resultados de la teoría de las probabilidades que es de gran utilidad para las ciencias puras y aplicadas es el concepto de esperanza matemática o valor esperado. Este concepto es derivado de un razonamiento lógico por expectativas inherente al racionalismo filosófico de la modernidad.

En la actualidad, definimos a la esperanza matemática como el promedio de una variable aleatoria, pero, históricamente este concepto estuvo en el centro de la combinación entre apuestas, ganancias y expectativas, inherentes a los juegos de azar. De la síntesis de estas categorías surgió el contexto que dio origen a las probabilidades.

La esperanza matemática tiene dos expresiones formales dependiendo del tipo de variable aleatoria que esté presente en el fenómeno o proceso a estudiar.

Por un lado, está el caso discreto en el cual la esperanza matemática es:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} Xp(X = x_i)$$

Y por otro lado, está el caso continuo en el que la expresión es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} Xf_x d_x$$

1.1. La Esperanza Matemática en Decisiones de Inversión

En una situación hipotética, nos encontramos en el momento post-pandemia. Un actor económico cuenta con ahorros y capital y debe tomar una decisión sobre inversión. Se presentan tres (3) alternativas de inversión: la primera, en instrumentos de renta variable (acciones) en las bolsas de los Estados Unidos; la segunda, en un depósito a plazo en un banco panameño; y la tercera, emprender un negocio en Panamá.

La decisión tiene un alto contenido de incertidumbre y un componente de riesgo ya que los años inmediatamente post-pandemia tienen volatilidad y cambios profundos en los mercados, los patrones de consumo y los modelos de negocios. Adicionalmente, existen tres escenarios de recuperación y desempeño macroeconómico del país, representados por la forma geométrica de la recuperación:

- Forma de V: que ocurra un restablecimiento rápido (probabilidad = 0.10). Es decir, que se repare la actividad económica a los niveles de 2019 en los 12 meses posteriores a la epidemia.
- Forma de U: sucedería una restauración moderada (probabilidad = 0.40). La restauración de los números previos a la epidemia puede tomar 3 años.
- Forma de L: acontecería una recuperación lenta (probabilidad = 0.50). Los niveles de 2019 se alcanzan en un periodo superior a 3 años.

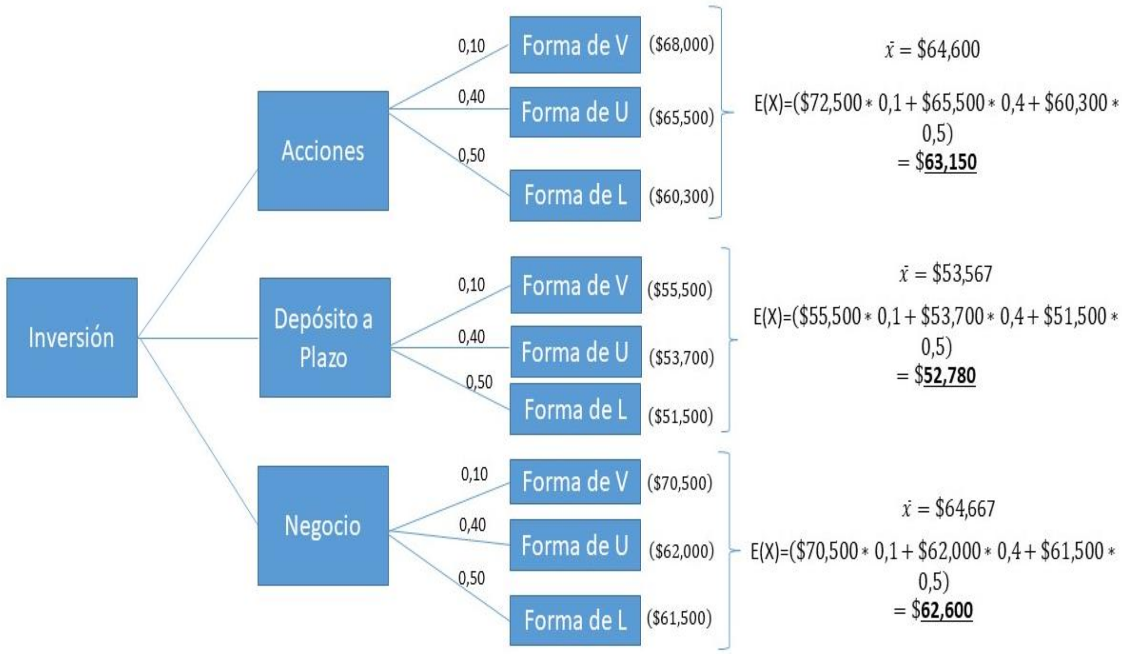

Figura 1. Árbol de Probabilidades de la Situación Hipotética

2. La Ley de los Grandes Números

El estudio de los fenómenos y variables aleatorias alcanzó un gran nivel de desarrollo con la formulación de teoremas que describen el comportamiento de las sucesiones de las medias aritméticas de estas variables.

Una de las colecciones de estos teoremas es reconocida como la Ley de los Grandes Números y su demostración fue aportada por el matemático Jacob Bernoulli a inicios del siglo XVIII.

Esta ley en alguna medida complementa al concepto de esperanza matemática ya que al introducir la noción de convergencia, permite que la esperanza matemática pueda ser considerada como la media aritmética a largo plazo cuando el número de repeticiones o tamaño muestral tiende a infinito.

La convergencia es una idea con varios usos en la ciencia matemática. Para efectos de la ley de los Grandes Números puede ser subdividida en dos definiciones: la convergencia en probabilidad y la convergencia en probabilidad 1.

La primera trata de un patrón en el que, al crecer el número de repeticiones de un experimento aleatorio o el tamaño de una muestra, se produce una sucesión aleatoria, y el límite de la probabilidad de las diferencias entre la sucesión y una constante (Y) es igual a cero.

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - Y| \geq \epsilon) = 0$$

La segunda refuerza la primera. Y describe un patrón en el que al aumentar el número de repeticiones de un experimento aleatorio o el tamaño de una muestra, el límite de la probabilidad de la igualdad entre la sucesión y una constante (Y) es igual a uno.

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = Y) = 1$$

De ambas ideas se derivan las dos formulaciones de la Ley de los Grandes Números: la Ley Débil de los Grandes Números y la Ley Fuerte de los Grandes Números.

A respecto, el teorema de la ley débil de los grandes números es *"Sea X1, X2,… una secuencia de variables aleatorias independientes, cada una de ellas con la misma media μ y con varianza menor o igual a v < ∞. Entonces para todo ε > 0,*

$$\mathit{lim}_{n \to \infty} P(|M_n - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

Es decir; las medias convergen en probabilidad a la media común μ". (Evans & Rosenthal, 2005, p.226).

Y la ley fuerte de los grandes números se define por este teorema "*Sea X1, X2,… una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cada una de ellas con una media finita μ. Entonces,*

$$\lim_{n \to \infty} P(M_n = \mu) = 1$$

Es decir; las medias convergen en probabilidad a una media común μ". (Evans & Rosenthal, 2005, p.230).

3.1. La Ley de los Grandes Números en el Aseguramiento

El negocio de los seguros constituye una de las actividades de financieras de gestión del riesgo con antecedentes históricos que se remontan a civilizaciones antiguas como Egipto, Babilonia y China. Por su parte, durante la edad media, los contratos de seguros florecieron en ciudades del mediterráneo europeo como Génova y Venecia.

Suponga que en medio de la epidemia debido a la alta demanda por seguro de vida que existe en un sector de la población económicamente activa que se encuentra asalariada, una aseguradora prepara una póliza de vida que cuesta a los clientes una mensualidad de $10.00 y paga $20,000 en caso de que el asegurado fallezca. El contrato plantea un mínimo de 5 años que el asegurado debe mantener la cobertura de la póliza para no incurrir en penalidad.

Póliza

$10.00 (mensual) x 12 meses = $120.00 (anual)

$120.00 anual x 5 años = $600 (5 años)

$$\frac{\$600\ (5\ años)}{\$20{,}000\ (suma\ asegurada)} = 0.03$$

Esta relación entre lo que paga el asegurado durante 5 años y la suma asegurada implica que por cada $6 que aporta el asegurado la empresa asume 200. Esto implica que se requieren 34 personas para alcanzar el punto de equilibrio.

$$P(1\ persona\ fallezca\ en\ 5\ años) \leq P(0.03)$$

No obstante, en el contexto de la Pandemia tenemos que la probabilidad de fallecimiento de una persona si se contagia del COVID-19 es de 0.02.

Si tomamos los datos de la epidemia de un día promedio (17 de octubre de 2020), tenemos la siguiente tabla de contingencia:

Cuadro 1. Tabla de Contigencia de la Situación Hipotética

	Positivo (Covid-19)	**Negativo (Covid-19)**	**TOTAL**
Fallece	11	0	8
No Fallece	601	3579	4180
TOTAL	609	3579	4188

Fuente: Elaboración Propia

Evento F: persona fallezca

Evento C: persona positiva en diagnóstico de COVID-19

Requerimos hallar: $P(F/C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)}$

$$P(F \cap C) = \frac{11}{4188} = 0.003 \approx 0.3\%$$

$$P(C) = \frac{609}{4188} = 0.1454 \approx 14.54\%$$

$$P(F/C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0.003}{0.1454} = 0.02 \approx 2\%$$

$$P(1\ persona\ fallezca\ en\ 5\ años) \leq P(0.03)$$

$$(0.02) < (0.03)$$

3.2. La Ley de los Grandes Números en los Casinos

En Panamá, los casinos durante enero de 2020 (en plena coyuntura de desaceleración de la economía previa a la pandemia), registraron apuestas netas en máquinas tragamonedas por el orden de los $25,097. (INEC, 2020).

$$\frac{\$25{,}097_{Apuestas\ \ Netas}}{\$151{,}708_{Apuestas\ Brutas}} = 0.165 \approx 16.5\%_{margen\ de\ las\ apuestas}$$

$$\$151{,}708_{Apuestas\ Brutas} - \$25{,}097_{Apuestas\ Netas} = \$126{,}611_{Premios\ Pagados}$$

Esto implica un margen bruto en las apuestas de 16.5%, o dicho de otra forma, una relación entre apuestas netas vs. brutas de 0.165. Lo que lo convierte en una actividad rentable. Todo ello, a pesar que la actividad del sector de apuestas disminuyó 1.8% debido a la situación macroeconómica del país.

En este artículo deseamos narrar como opera la Ley de los Grandes Números para garantizar el margen de rentabilidad del negocio de los casinos. Utilizando un caso ficticio.

Supongamos que como gerentes de "*AzarPrize 507"* una hipotética e importante cadena de casinos del país, deseamos comprender el mecanismo de las probabilidades que asegura el carácter lucrativo del negocio. Dicha dinámica es descrita a continuación.

Nuestra cadena posee 6 sucursales en todo Panamá y cada sucursal tiene un lay out con capacidad de alojar 8 máquinas, sumando un total de 48 máquinas. El stock de máquinas está compuesto por Tragamonedas importadas con la siguiente especificación confirmada por el fabricante:

Poseen un algoritmo que se asegura que la ganancia esperada del casino (margen de 6%) esté garantizada con un error de 1% cada millón seiscientas mil (1,600,000) jugadas.

Cada una de las 48 Tragamonedas registra en promedio unas 100 jugadas diarias, lo que totaliza 4,800 jugadas por día. Lo anterior, indica que cada 166.7 días se alcanza la cantidad de jugadas necesarias para garantizar el margen según el fabricante.

$$48_{maq}\ X\ \frac{100_{jug/dia}}{maq} = 4{,}800_{jug/dia}$$

$$4{,}800_{jug/dia}\ X\ 333.5dias = \ 1{,}600{,}800_{jug}$$

Siendo el promedio de apuestas de $1.50 y el margen de utilidades para el casino de 6%, tenemos que cada *333.5* días el casino está ganando $144,000.

$$1{,}600{,}000_{jug}\ X\ \frac{\$1.50}{jug} = \$2{,}400{,}000$$

$$\$2{,}400{,}000\ X\ 0.06_{margen} = \$144{,}000\ cada\ 333.5\ días$$

$$\$144{,}000\ X\ 0.089_{mes} = \$12{,}816\ cada\ mes$$

Por otro lado, tal como se afirmaba anteriormente, el error probable de las máquinas es de 1% por cada 1,600,000 jugadas. Lo que en términos monetarios sería una pérdida de $24,000 cada 333.5 días en el caso que la apuesta promedio sea de $1.50 (como dijimos arriba):

$$1,600,000_{jug}\ X\ 0.01 = 16,000_{jugadas}$$

$$16,000_{jug}\ X\ \$1.50 = \$24,000$$

$$\$24,000\ X\ 0.089 mes = \$2,136\ mensual$$

Calculado de otra forma:

$$1,600,000_{jug}\ X\ \frac{\$1.50}{jug} = \$2,400,000\ X\ 0.01 = \$24,000$$

En síntesis, en el mecanismo narrado se aprecia la acción de la Ley de los Grandes Números debido que el número millonario de jugadas alcanzadas cada 333.5 días (1,600,000 jugadas) garantiza el alcance de las ganancias esperadas con un error del 1% anunciado por el fabricante.

CONCLUSIONES

Luego de desarrollar este artículo hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- Los enfoques de las definiciones de la probabilidad han cambiado progresivamente pasando de una cosmovisión clásica hacia visiones objetivistas, subjetivistas, logicistas y propensionistas.
- La esperanza matemática además de ser un concepto base en el nacimiento de la noción de probabilidades, constituye un concepto que actualmente posee muchas aplicaciones en la economía y las finanzas. Es una herramienta en la toma de decisiones empresariales.
- La ley de los grandes números es un cuerpo teórico de las matemáticas que la rentabilidad en los negocios de los casinos y de los seguros.

Referencias Bibliográficas

Bouza, C. (2020). Notas del Seminario de Estadística y Probabilidades. Introducción. La Habana, Cuba. Recuperado de: https://amatema.webs.ull.es/anamat_p0304/Matematicas/Didactica%20de%20la s%20Matematicas%20II/historia_problema.pdf

Cañas, J. & Galo, J. (2017). Teorema de Bayes. Proyecto Descartes. Dirección URL: https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/EstadisticaProbab ilidadInferencia/Probabilidad/7TeoremaBayes.html

Devlin, K. (2002). El Lenguaje de las Matemáticas. Editorial Grasindo. Barcelona, España. Dirección URL: https://es.scribd.com/document/422962298/El-Lenguaje-de-LasMatematicas-Keith-Devlin

García, J. (2000). Historia de un Problema: El Reparto de la Apuesta. Revista Suma N°33. P.25-36. Recuperado de: https://amatema.webs.ull.es/anamat_p0304/Matematicas/Didactica%20de%20la s%20Matematicas%20II/historia_problema.pdf

Hawking, S. (2013). Dios Creó los Números. Editorial Crítica. Barcelona, España.

Landro, A. (2012). Bernoulli, De Moivre, Bayes, Price y los Fundamentos de la Inferencia Inductiva. Cuadernos del CIMBAGE N°15 P.33-56 Buenos Aires, Argentina. Recuperado de: dialnet.unirioja.es

Mankiewicz, R. (2005). Historia de las Matemáticas. Del Cálculo al Caos. Ediciones Paidos Ibérica S.A. Barcelona. España.

Soto, E. (2011). Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos. Editado por Aprendematemáticas.org. Tercera Edición. Monterrey, México. Recuperado de: http://wordpress.colegio-arcangel.com/matematicas/files/2012/10/DICM.pdf