REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

DIFERENCIABILIDAD DE LAS FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA

DIFFERENTIABILITY OF FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION

Angela Y. Franco

Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento de Matemática. Panamá

angela.franco@up.ac.pa, https://orcid.org/0000-0002-7085-6870

Jorge E. Hernández U.

Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento de Matemática. Panamá

jorge.hernandezu@up.ac.pa, https://orcid.org/0000-0003-1153-1918

Edilma Judith Díaz B.

Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática. Panamá

edilma.diaz@up.ac.pa, https://orcid.org/0000-0003-3949-9462

Daniel Vásquez S.

Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática. Panamá

daniel.vasquezs@up.ac.pa, *https://orcid.org/0000-0001-8048-4583*

Recibido: 23-7-23 , Aceptado: 7-12-2023

DOI https://doi.org/10.48204/j.saberes.v7n1.a4730

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

RESUMEN

En este artículo se investiga las funciones de variación acotada. Se estudian las propiedades básicas de estas funciones; en particular, se analizan los conjuntos $Cont(f)=\{x\in I: f$ es continua en $x\}$, $Disc(f)=I-Cont(f)$ y $Dif(f)=\{x\in I: f$ es diferenciable en $x\}$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función de variación acotada en I. También se estudia la relación entre los conceptos de variación acotada y continuidad absoluta y se presentan algunos ejemplos que ilustran la teoría desarrollada en este trabajo.

PALABRAS CLAVE: Funciones monótonas, variación acotada, continuidad absoluta, conjunto nulo, diferenciabilidad.

ABSTRACT

In this paper, the functions of bounded variation are investigated. The basic properties of these functions are studied, in particular, the sets $Cont(f)=\{x\in I: f$ is continuous in $x\}$, $Disc(f)=I-Cont(f)$ and $Dif(f)=\{x\in I: f$ is differentiable in $x\}$ are analyzed, where I is an Interval of $\mathbb{R}$ and $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ is a function of bounded variation in I. The relationship between the concepts of bounded variation and absolute continuity is also studied, and some examples are presented that illustrate the theory developed in this work.

KEY-WORD: Monotone functions, bounded variation, absolute continuity, null set, differentiability.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

INTRODUCCIÓN

Las funciones de variación acotada en una variable fueron introducidas por primera vez por el matemático francés Camille Jordan (1838-1922) en un trabajo relacionado con la convergencia de las series de Fourier. Estas funciones son de gran importancia en el análisis real ya que están estrechamente relaciones con las funciones monótonas. Además, permiten responder preguntas sobre la fundamentación del análisis. Y ayudan a extender teorías, como por ejemplo la teoría de integral de Riemann. La noción de variación acotada también está íntimamente conectada con la noción de continuidad absoluta (Dunham, 2018), (Edward, 1994).

El propósito de este trabajo es investigar las funciones de variación acotadas, resaltando sus propiedades básicas; en particular se analizan los conjuntos $Cont(f)=\{x\in I: f$ es continua en $x\}$, $Disc(f)=I-Cont(f)$ y $Dif(f)=\{x\in I: f$ es diferenciable en $x\}$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función de variación acotada. También se estudia la relación entre los conceptos de variación acotada y continuidad absoluta y, se presentan algunos ejemplos que ilustran los conceptos presentados. Este tópico es fundamental en la teoría del análisis real y ha sido bien explorado, por lo que la mayoría de los resultados no son nuevos. Lo que es nuevo es el enfoque.

PRELIMINARES

Definición 1: Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ una función:

i. f es (estrictamente) creciente en I si para todo $x,y\in I$ con $x<y$ se tiene que $f(x)\leq f(y)$ ($f(x)<f(y)$).

ii. f es (estrictamente) decreciente en I si para todo $x, y \in I$ con $x < y$ se tiene que $f(x) \geq f(y)$ ($f(x) > f(y)$).

iii. f es monótona en I si f es creciente o decreciente en I

Si el intervalo I puede ser dividido en un número finito de intervalos tal que f es monótona en cada uno de ellos, entonces f se dice seccionalmente monótona en I.

Si $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ es creciente en I y c es punto interior de I, entonces $f(c-) = \lim_{x \to c^-} f(x)$ y $f(c+) = \lim_{x \to c^+} f(x)$ existen y

$$f(c-) = \sup\{f(x) : x < c\} \leq f(c) \leq \inf\{f(x) : x > c\} = f(c+)$$

Si f es decreciente en I, entonces

$$f(c-) = \inf\{f(x) : x < c\} \geq f(c) \geq \sup\{f(x) : x > c\} = f(c+)$$

Definición 2: Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona en I y c un punto interior de I.

i. El salto a izquierda de f en c se denota por σ_c^- y se define por

$$\sigma_c^- = f(c) - f(c-)$$

ii. El salto a derecha de f en c se denota por σ_c^+ y se define por

$$\sigma_c^+ = f(c+) - f(c)$$

iii. El salto de f en c se denota por σ_c y se define por

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86
UNIVERSIDAD DE PANAMÁ 1935

$$\sigma_c = \sigma_c^+ + \sigma_c^- = f(c+) - f(c-)$$

Si $I = [a,b]$, entonces

$\sigma_a = \sigma_a^+$ y $\sigma_b = \sigma_b^-$

Observe que si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona en I y c es un punto interior de I, entonces f es continua en c sí y sólo sí $\sigma_c = 0$.

Teorema 1: Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona en $[a,b]$. Entonces el conjunto $Disc(f) = \{x \in [a,b] : f$ es discontinua en $x\}$ es a lo sumo enumerable.

Demostración

Suponga que f es creciente en $[a,b]$ (si f es decreciente, tome $-f$ en lugar de f). Como f es creciente, se tiene que $\sigma_c \geq 0$ para todo $c \in [a,b]$. Por lo tanto,

$$Disc(f) = \{x \in [a,b] : \sigma_x > 0\}$$

Para cada número natural n tome puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que

$$a \leq x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n \leq b$$

Para cada $j,\ 0 \leq j \leq n$ tome puntos t_j tales que

$$a = t_0 \leq x_1 < t_1 < x_2 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < x_n \leq t_n = b$$

Como f es creciente en $[a,b]$, se tiene que

$\sigma_{x_j} \leq f(t_j) - f(t_{j-1})$, para $1 \leq j \leq n$

Por lo tanto,

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{x_2} + \ldots + \sigma_{x_n} \leq \sum_{j=1}^{n} \left(f(t_j) - f(t_{j-1}) \right) = f(b) - f(a)$$

Esto implica que el conjunto

$$D_k = \left\{ x \in [a,b] : \sigma_x \geq \frac{1}{k} \left(f(b) - f(a) \right) \right\}$$

tiene a lo sumo k puntos. Luego, como $Disc(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$, se tiene que D es a lo sumo numerable.

Definición 3: Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ tiene medida cero o es un conjunto nulo y se denota por $m(A) = 0$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos abiertos $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} l(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$. El valor $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ es llamado la **longitud total** de los intervalos (a_n, b_n), sin el requerimiento que estos intervalos sean disjuntos dos a dos. Si una propiedad se satisface para todos los puntos de un conjunto A, excepto posiblemente para los puntos de un subconjunto de medida cero, se dice que la propiedad se satisface casi en todas partes (c.t.p) en A.

Propiedades:

1. Si $A \subset B$ y $m(B)=0$, entonces $m(A)=0$.
2. Si A es un conjunto a lo sumo enumerable, entonces $m(A)=0$.
3. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos nulos, entonces $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto nulo.

Los siguientes resultados son debidos al matemático francés Henri León Lebesque (1875-1941) (Royden, 2010), (Grave, 2009), (Folland, 2007).

Teorema 2: Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. f es (Riemann) integrable en $[a,b]$ sí y sólo sí

$m(\{x \in [a,b] : f$ es discontinua en $x\})=0$

o sea que f es continua c.t.p en $[a,b]$.

Teorema 3: Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces f es diferenciable c.t.p en $[a,b]$

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

Definición 4: Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función

i. f es uniformemente continua en I si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ siempre que $x, y \in I$ sean tales que $|x - y| < \delta$.

ii. f es absolutamente continua en I si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda colección finita de intervalos abiertos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ disjuntos dos a dos en I con $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, se tiene que $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

iii. f es lipschitziana en I si existe una constante $k > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, para todo $x, y \in I$. k se llama la constante de Lipschitz.

Propiedades: Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones y $M > 0$

1. Si f es uniformemente continua en I, entonces f es continua en I. La reciproca no es cierto, pero si $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado y f es continua en I, entonces f es uniformemente continua en I.

2. Si f es absolutamente continua en I, entonces f es uniformemente continua en I. La reciproca no es cierto. La función $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) & , \quad 0<x\leq 1 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

es uniformemente continua en $[0,1]$, pero no es absolutamente continua en $[0,1]$.(Gelbaum, 2003).

3. Si f es lipschitziana en I, entonces f es absolutamente continua en I
4. Si f y g son absolutamente continuas en I, entonces $|f|,\ Mf,\ f+g,\ f-g$ y fg son absolutamente continuas en I. Además, si existe una constante $C>0$ tal que $|g(x)|\geq C$ para todo $x\in I$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es absolutamente continua en I.
5. Si f es diferenciable en $I=[a,b]$ y $|f'(x)|\leq M$ para todo $x\in[a,b]$, entonces f es lipschitziana en $[a,b]$ y, por ende, absolutamente continua en $[a,b]$.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función y $P=\{x_0=a,\ x_1,\ x_2,...,\ x_n=b\}$; una partición de $[a,b]$; o sea $x_0=a<x_1<x_2<...<x_n=b$. La norma de P se denota por $\|P\|$ y se define por

$$\|P\|=\text{m}\acute{a}x\{x_i-x_{i-1}:i=1,2,...,n\}$$

La familia de todas las particiones de $[a,b]$ se denota por $\wp([a,b])$. Para cada $P=\{x_0,\ x_1,...,\ x_n\}\in\wp([a,b])$ denote

$$V_P(f)=\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|$$

La **variación total** de f sobre $[a,b]$ se denota por $V_a^b(f)$ y se define por

$$V_a^b(f)=\sup\{V_P(f):P\in\wp([a,b])\}$$

Claramente se tiene que $0\leq V_a^b(f)\leq\infty$

Definición 5: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función. f es de variación acotada en $[a,b]$ si $V_a^b(f)<\infty$. El conjunto de las funciones de variación acotada en $[a,b]$ se denota por $V[a,b]$; es decir,

$$V[a,b]=\{f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}/\ V_a^b(f)<\infty\}$$

Ejemplo 1:

- Si $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función constante, entonces $V_P(f)=0$ para toda $P\in\wp([a,b])$. Por lo tanto, $V_a^b(f)=0$ y $f\in V[a,b]$.

- Si $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona en $[a,b]$, entonces $V_P(f)=|f(b)-f(a)|$ para toda $P\in\wp([a,b])$. Por lo tanto, $V_a^b(f)=|f(b)-f(a)|<\infty$ y $f\in V[a,b]$

- Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1 & ,\text{ si } x\in\mathbb{Q} \\ 0, & ,\text{ si } x\in I_r=\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

y sea $I=[a,b]$ con $a<b$. Como $\mathbb{R}$ y I_r son densos en I, para cada número natural n se puede construir una partición $P_n=\{x_0,\ x_1,\dots,\ x_{n+1},\ x_{n+2}\}$ de $[a,b]$ tal que $x_0=a$, $x_i\in\mathrm{I}_r\cap[a,b]$ si i es impar y $x_i\in\mathbb{Q}\cap[a,b]$ si i es par, $1\le i\le n+1,\ x_{n+2}=b$. Luego,

$$\begin{aligned} V_{P_n}(f) &= \sum_{i=1}^{n+2}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &\ge |f(x_2)-f(x_1)|+|f(x_3)-f(x_2)|+\cdots+|f(x_{n+1})-f(x_n)| \\ &= n \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$V_a^b(f)\ge\sup\{V_{P_n}:n\in\mathbb{N}\}=\infty$$

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

Esto implica que f no es de variación acotada en todo intervalo $I=[a,b]$ de $\mathbb{R}$, con $a<b$

Teorema 4: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función y $P=\{x_0,\ x_1,\dots,\ x_n\}\in\wp([a,b])$. Si P' es un refinamiento de P (o sea que $P'\in\wp([a,b])$ y $P\subset P'$), entonces $V_P(f)\leq V_{P'}(f)$

Demostración:

Como todo refinamiento de P se puede obtener agregando puntos a P, uno a uno, es suficiente probar el teorema en el caso cuando se agrega justamente un punto; o sea, $P'=\{x_0,\ x_1,\dots,\ x_{j-1},\ c,\ x_j,\dots,\ x_n\}$ para algún $1\leq j\leq n$. Como

$$
\begin{aligned}
\left|f(x_j)-f(x_{j-1})\right| &= \left|f(x_j)-f(c)+f(c)+f(x_{j-1})\right| \\
&\leq \left|f(x_j)-f(c)\right|+\left|f(c)+f(x_{j-1})\right|
\end{aligned}
$$

Se tiene que

$$
\begin{aligned}
V_P(f) &= \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right| \\
&= \left|f(x_j)-f(x_{j-1})\right|+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right| \\
&\leq \left|f(x_j)-f(x_{j-1})\right|+\left|f(c)-f(x_{j-1})\right|+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right| \\
&= V_{p'}(f)
\end{aligned}
$$

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

Teorema 5: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función y $c\in(a,b)$. Entonces $f\in V[a,b]$ sí y sólo sí $f\in V[a,c]$ y $f\in[c,b]$. Además, si $f\in V[a,b]$ entonces

$$V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f)$$

Demostración:

Suponga que $f\in V[a,b]$. Sea $P\in\wp([a,c])$, entonces $P'=P\bigcup\{b\}$ es una partición de $[a,b]$. Además,

$$V_{P'}(f)=V_P(f)+|f(b)-f(c)|\le V_a^b(f)$$

De donde

$$V_P(f)\le V_a^b(f)-|f(b)-f(c)|$$

Esto implica que

$$V_a^c(f)=\sup\{V_P(f):P\in\wp([a,c])\}\le V_a^b(f)-|f(b)-f(c)|<\infty$$

Por consiguiente, $f\in V[a,c]$. Similarmente se prueba que $f\in V[c,b]$.

Suponga que $f\in V[a,c]$ y $f\in V[c,b]$. Sea $P\in\wp([a,b])$ y sea $P'=P\bigcup\{c\}$. Entonces P' es un refinamiento de P; además $P_1=P'\bigcap[a,c]$ es una partición de $[a,c]$, $P_2=P'\bigcap[c,b]$ es una partición de $[c,b]$ y $P'=P_1\bigcup P_2$. Por el Teorema 4 se tiene que

$$V_P(f)\le V_{P'}(f)=V_{P_1}(f)+V_{P_2}(f)\le V_a^c(f)+V_c^b(f)$$

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

Por consiguiente

$V_a^b(f) = \sup\{V_P(f) : P \in \wp([a,b])\} \le V_a^c(f) + V_c^b(f) < \infty$ y $f \in V[a,b]$.

Por otro lado, sean $P_1 \in \wp([a,c])$, $P_2 \in \wp([c,b])$ y $P = P_1 \cup P_2$. Entonces $P \in \wp([a,b])$ y

$$V_{P_1}(f) + V_{P_2}(f) = V_P(f) \le V_a^b(f)$$

Luego, para cualquiera $P_2 \in \wp([c,b])$ se tiene que

$$V_a^c(f) = \sup\{V_{P_1}(f) : P_1 \in \wp([a,c])\} \le V_a^b(f) - V_{P_2}(f)$$

De donde

$$V_{P_2}(f) \le V_a^b(f) - V_a^c(f)$$

para toda $P_2 \in \wp([c,b])$. Por lo tanto,

$$V_c^b(f) = \sup\{V_{P_2}(f) : P_2 \in \wp([c,b])\} \le V_a^b(f) - V_a^c(f)$$

y

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) \le V_a^b(f)$$

De todo lo anterior se tiene que

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

A continuación, se presentan algunas de las propiedades algebraicas de las funciones de variación acotada (Natason, 2016), (Krantz, 2018), (Orchinnikov, 2013)

Propiedades: Sean $f, g \in V[a,b]$ y $K \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. f es acotada en $[a,b]$
2. Si $[c,d] \subset [a,b]$, entonces $f \in V[c,d]$
3. $|f|,\ Kf,\ f+g,\ f-g,\ fg \in V[a,b]$
4. Si $\dfrac{1}{g}$ es acotada en $[a,b]$, entonces $\dfrac{1}{g} \in V[a,b]$
5. $V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$
6. $V_a^b(Kf) = |K| V_a^b(f)$
7. Si f es monótona en $[a,b]$, entonces $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$
8. $V_a^b(f) = 0$ sí y sólo sí f es constante en $[a,b]$.

Ejemplo 2: Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & , \text{ si } x \neq 1 \\ 0 & , \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Como f es creciente en el intervalo $[0,1)$, se tiene que f es creciente en todo subintervalo cerrado de $[0,1)$; por lo tanto, $f \in V[a,b]$ para todo $[a,b] \subset [0,1)$. Sin embargo, $f \notin V[0,1]$, ya que f no está acotada en el intervalo $[0,1]$.

Considere ahora la función $g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\begin{cases} x\cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) & , \text{ si } 0<x\leq 1 \\ 0 & , \text{ si } x=0 \end{cases}$$

Note que g es continua en $[0,1]$; sin embargo, g no es de variación acotada en $[0,1]$.

En efecto, para cada número natural n tome la partición

$$P_n=\left\{0,\ \frac{1}{2n},\ \frac{1}{2n-1},\ \frac{1}{2n-2},\cdots,\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$$

Luego,

$$V_{P_n}(g)=\left|g\left(\frac{1}{2n}\right)-g(0)\right|+\left|g\left(\frac{1}{2n-1}\right)-g\left(\frac{1}{2n}\right)\right|+\cdots+\left|g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{3}\right)\right|+\left|g(1)-g\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

De donde

$$V_0^1(g)=\sup\left\{V_P(g):P\in\wp([a,b])\right\}\geq V_{P_n}(g)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

para todo número natural n. Como la serie armónica es divergente, se tiene que $V_0^1(g)=\infty$ y $g\notin V[0,1]$.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

Teorema 6: Sea $f \in V[a,b]$ y sea $v:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$v(x)=\begin{cases} V_a^x(f) & , \text{ si } a<x\leq b \\ 0 & , \text{ si } x=a \end{cases}$$

entonces v y $v-f$ son crecientes en $[a,b]$

Demostración:

Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$, entonces por el Teorema 5,

$$V_a^{x_2}(f)=V_a^{x_1}(f)+V_{x_1}^{x_2}(f)$$

De donde

$$V_a^{x_2}(f)-V_a^{x_1}(f)=V_{x_1}^{x_2}(f)$$ o sea

$$v(x_2)-v(x_1)=V_{x_1}^{x_2}(f)\geq 0$$

Por consiguiente, $v(x_1)\leq v(x_2)$ y v es una función creciente en $[a,b]$. Además,

$$f(x_2)-f(x_1)\leq |f(x_2)-f(x_1)|\leq V_{x_1}^{x_2}(f)=v(x_2)-v(x_1)$$

De donde

$$(v-f)(x_1)=v(x_1)-f(x_1)\leq v(x_2)-f(x_2)=(v-f)(x_2)$$

lo que implica que $v-f$ es creciente en $[a,b]$.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

Corolario 1: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función. Entonces $f\in V[a,b]$ sí y sólo si f es la diferencia de dos funciones crecientes.

Demostración:

Suponga que $f\in V[a,b]$. Luego, por el Teorema 6, las funciones v y $v-f$ son crecientes en $[a,b]$. Además, $f=v-(v-f)$.

Suponga que f es la diferencia de dos funciones crecientes. Entonces, por el Ejemplo 1 y la propiedad (3) de las funciones de variación acotada, se tiene que $f\in V[a,b]$.

Corolario 2: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función. Si $f\in V[a,b]$, entonces f es la diferencia de dos funciones estrictamente crecientes.

Demostración:

Sea $f\in V[a,b]$, entonces por el Corolario 1 existen dos funciones f_1 y f_2 crecientes en $[a,b]$ tal que $f=f_1-f_2$. Sean $g_1(x)=x+f_1(x)$ y $g_2(x)=x+f_2(x)$. Entonces g_1 y g_2 son estrictamente crecientes en $[a,b]$ y $f=g_1-g_2$.

Observación. Como toda función de variación acotada puede escribirse como la suma de dos funciones monótonas, muchas de las propiedades de las funciones monótonas son heredadas por las funciones de variación acotada. En particular, si $f\in V[a,b]$ entonces:

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

- Los límites $f(c-)$ y $f(c+)$ existen para todo $c\in(a,b)$
- El conjunto $Disc(f)$ de las discontinuidades de f es a lo sumo enumerable.

Ejemplo 3: Sea $f:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=sen^2x$. Considere los intervalos $I_1=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $I_2=\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $I_3=\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ y $I_4=\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$. Como f es creciente en los intervalos I_1 y I_2, y decreciente en los intervalos I_3 y I_4; por el Corolario 1, f es de variación acotada en I_1, I_2, I_3 y I_4. Esto implica que $f\in V[0,2\pi]$.

- Si $x\in I_1$, entonces

$$v(x)=V_0^x(f)=f(x)-f(0)=sen^2x$$

- Si $x\in I_2$, entonces

$$v(x)=V_0^x(f)=V_0^{\frac{\pi}{2}}(f)+\left|f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|=1+\left|sen^2x-1\right|=2-sen^2x$$

- Si $x\in I_3$, entonces

$$\begin{aligned}v(x)&=V_0^{\frac{\pi}{2}}(f)+V_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f)+\left|f(x)-f(\pi)\right|\\&=1+1+\left|sen^2x-0\right|=2+sen^2x\end{aligned}$$

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X

Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86
UNIVERSIDAD DE PANAMÁ 1935

- Si $x \in I_4$, entonces

$$v(x) = V_0^{\frac{\pi}{2}}(f) + V_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f) + V_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(f) + \left| f(x) - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right|$$

$$= 1 + 1 + 1 + \left| sen^2 x - 1 \right| = 2 - sen^2 x$$

Así,

$$v(x) = \begin{cases} sen^2 x & , \ x \in I_1 \\ 2 - sen^2 x & , \ x \in I_2 \\ 2 + sen^2 x & , \ x \in I_3 \\ 4 - sen^2 x & , \ x \in I_4 \end{cases} \qquad (v - f)(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in I_1 \\ 2 - 2sen^2 x & , \ x \in I_2 \\ 2 & , \ x \in I_3 \\ 4 - 2sen^2 x & , \ x \in I_4 \end{cases}$$

FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA Y CONTINUIDAD

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada y $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$v(x) = \begin{cases} 0 & , \ \text{si} \ \ x = a \\ V_a^x(f) & , \ \text{si} \ \ x \in (a, b] \end{cases}$$

En el Teorema 6 se probó que v es una función creciente en $[a,b]$ y

$$v(y) - v(x) = V_x^y(f)$$

siempre que $a \le x < y \le b$. Además, $v - f$ es una función creciente. Esto implica que los límites laterales $f(c-)$ y $f(c+)$ existen para todo $c \in (a,b)$. También $f(a+)$ y $f(b-)$ existen.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

Teorema 7: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función. Si $f\in V[a,b]$ y $x\in(a,b)$, entonces

$v(x+)-v(x)=|f(x+)-f(x)|$ y $v(x)-v(x-)=|f(x)-f(x-)|$

Demostración:

Sea $x_0\in(a,b)$ y denote $L=|f(x_0+)-f(x_0)|$. Sea $\varepsilon>0$, entonces existe un $\delta>0$ tal que si $x_0<x<x_0+\delta$ entonces

$$L-\frac{\varepsilon}{2}<|f(x)-f(x_0)|<L+\frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $P=\{x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n\}\in\wp([x_0,b])$ tal que $x_0<x_1<x_0+\delta$ y

$$V_{x_0}^{b}-\frac{\varepsilon}{2}<V_P(f)$$

Sea $P'=P-\{x_0\}$. Entonces $P'\in\wp([x_1,b])$ y

$$V_P(f)-V_{P'}(f)=|f(x_1)-f(x_0)|$$

Además,

$$V_P(f)-V_{P'}(f)\geq\left(V_{x_0}^{b}(f)-\frac{\varepsilon}{2}\right)-V_{P'}(f)$$

$$\geq\left(V_{x_0}^{b}(f)-V_{x_1}^{b}(f)\right)-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=V_{x_0}^{x_1.}(f)-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=V_{a}^{x_1.}(f)-V_{a}^{x_0.}-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=v(x_1)-v(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto,

$$v(x_1)-v(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}\leq\left|f(x_1)-f(x_0)\right|$$

para todo x_1 con $x_0<x_1<x_0+\delta$. Pero como $\left|f(x_1)-f(x_0)\right|<L+\frac{\varepsilon}{2}$

se tiene que

$$v(x_1)-v(x_0)<L+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=L+\varepsilon$$

Pero también se tiene que

$$L-\varepsilon<L-\frac{\varepsilon}{2}<\left|f(x_1)-f(x_0)\right|\leq V_{x_0}^{x_1}(f)=v(x_1)-v(x_0)$$

De donde,

$$L-\varepsilon<v(x_1)-v(x_0)<L+\varepsilon$$

En conclusión, se ha probado que si $x_0<x<x_0+\delta$,entonces

$$L-\varepsilon<v(x)-v(x_0)+L+\varepsilon$$

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

Por consiguiente

$$v(x_0+)-v(x_0)=L=\left|f(x_0+)-f(x_0)\right|$$

Así,

$$v(x+)-v(x)=\left|f(x+)-f(x)\right|$$

para todo $x\in(a,b)$.

La segunda igualdad se prueba de manera similar.

Corolario 3: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de variación acotada en $[a,b]$ y $c\in[a,b]$. Entonces f es continua en c sí y sólo sí v es continua en c.

Demostración:

Es una consecuencia directa del Teorema 7.

Corolario 4: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de variación acotada y continua en $[a,b]$. Entonces f puede inscribirse como la diferencia de dos funciones crecientes y continuas.

Demostración:

Esto es una consecuencia directa de los Corolarios 1 y 3.

Teorema 8: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función absolutamente continua en $[a,b]$. Entonces f es de variación acotada en $[a,b]$.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

Demostración:

Sea $\varepsilon = 1$. Como f es absolutamente continua en $[a,b]$, existe un $\delta > 0$ tal que para toda colección finita de intervalos abiertos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ disjuntos dos a dos en $[a,b]$ con $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, se tiene que $\sum_{i=1}^{n}\left|f(b_i) - f(a_i)\right| < 1$.

Sea $P = \{x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n = b\}$ una partición fija de $[a,b]$ tal que $x_i - x_{i-1} < \delta$ para todo $i = 1,\ 2,\ ....,\ n$. Sea $\alpha_0 = x_{i-1} <\ \alpha_1 <\ \alpha_2 <\ ... <\ \alpha_k = x_i$ una partición de $[x_{i-1},\ x_i]$. Entonces $\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i - \alpha_{i-1}) = x_i - x_{i-1} < \delta$. Por consiguiente, $\sum_{i=1}^{k}\left|f(\alpha_i) - f(\alpha_{i-1})\right| < 1$. Esto implica que $V_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \leq 1$. Luego por el Teorema 5,

$$V_a^b(f) = V_{x_0}^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f) + \cdots + V_{x_{n-1}}^{x_n}(f) \leq n$$

Como n es fijo, se tiene que $f \in V[a,b]$.

Corolario 5: Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función absolutamente continua en $[a,b]$. Entonces f puede escribirse como la diferencia de dos funciones crecientes y continuas.

Demostración:

Esto es una consecuencia inmediata del Corolario 4 y el Teorema 8.

FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOSTADA Y DIFERENCIABILIDAD

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.1
Enero- Julio 2024
pp. 57-86

Como por el Corolario1, toda función de variación acotada se puede escribir como la diferencia de dos funciones crecientes, por el Teorema 3 toda función de variación acotada en $[a,b]$ es diferenciable c.t.p en $[a,b]$. Luego, por el Teorema 8, toda función absolutamente continua en $[a,b]$ es diferenciable c.t.p en $[a,b]$.

Del teorema del valor medio se deduce que, si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función diferenciable en $[a,b]$ y existe un $M>0$ tal que $|f'(x)|\leq M$ para todo $x\in[a,b]$, entonces f es lipschitziana en $[a,b]$. Esto implica que f es absolutamente continua y, por ende, de variaciones acotada en $[a,b]$. Además, $V_a^b(f)\leq M(b-a)$.

Teorema 9: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$. Entonces la integral indefinida

$$F(x)=\int_a^x f(t)$$

es absolutamente continua en $[a,b]$ y $F'(x)=f(x)$ c.t.p en $[a,b]$.

Demostración:

Sea $\varepsilon>0$. Como $|f|$ es integrable en $[a,b]$, existe un $\delta>0$ tal que si $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$ es una colección finita de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos en (a,b) con $\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)<\delta$, entonces, $\sum_{i=1}^n\int_{a_i}^{b_i}|f(x)|\,dx<\varepsilon$ (Royden, 2010), (Krantz, 2018).

Sea $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{n}$ una colección finita de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos en (a,b) con $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$, entonces,

$$\sum_{i=1}^{n}\left|F(b_i)-F(a_i)\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{a_i}^{b_i} f(x)dx\right|\leq\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}\left|f(x)\right|dx<\varepsilon$$

Por consiguiente, F es absolutamente continua en $[a,b]$. Por el Teorema 2 f es continua c.t.p en $[a,b]$, luego por el teorema fundamental del cálculo se tiene que $F'(x)=f(x)$ c.t.p en $[a,b]$.

Teorema 10: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en $[a,b]$, entonces

$$V_a^b(f)=\int_a^b\left|f'(x)\right|dx$$

Demostración:

Como f es continuamente diferenciable en $[a,b]$, f es absolutamente continua y $|f'|$ es integrable en $[a,b]$. Sea $I=\int_a^b\left|f'(x)\right|dx$ y sea $\varepsilon>0$. Entonces existe un $\delta>0$ tal que para toda $P\in\wp([a,b])$ con $\|P\|<\delta$, se tiene que

$$\mathrm{I}-\varepsilon<S(|f'|,P)<I+\varepsilon$$

donde $S(|f'|,P)$ es una suma de Riemann de $|f'|$ asociada a la partición P. Sea $P=\{x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal qué $\|P\|<\delta$. Luego, por el teorema del valor medio, para cada $i=1,\ 2,\ ....,\ n$ existe un $t_i\in(x_{i-1},x_i)$ tal que

$$|f(x_i)-f(x_{i-1})|=|f'(t_i)|(x_i-x_{i-1})$$

Por lo tanto,

$$V_p(f)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}|f'(t_i)|(x_i-x_{i-1})=S(|f'|,P)$$

Como $\|P\|<\delta$, se tiene que

$$\mathrm{I}-\varepsilon<V_P(f)<I+\varepsilon$$

Por consiguiente, $\mathrm{I}-\varepsilon<V_P(f)$ para todo $\varepsilon>0$. Esto implica que $\mathrm{I}\le V_P(f)\le V_a^b(f)$.

Por otro lado, por el teorema fundamental del cálculo, se tiene que para toda partición $P=\{x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\}$ de $[a,b]$

$$V_p(f)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(x)dx\right|$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f'(x)|dx=\int_a^b|f'(x)|dx$$

Por lo tanto, $V_a^b(f)\le\int_a^b|f'(x)|dx=I$. Así,

$$V_a^b(f)=I=\int_a^b|f'(x)|\,dx$$

Teorema 11: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en $[a,b]$. Entonces la función v es continuamente diferenciable en $[a,b]$.

Demostración:

Por el Teorema 10 se tiene que

$$v(x)=\int_a^x |f'(t)|\,dt$$

Luego, por el teorema fundamental del cálculo, $v'(x)=|f'(x)|$. Esto implica que v' es continua en $[a,b]$ y, por ende v es continuamente diferenciable en $[a,b]$.

CONCLUSIONES

1. El reciproco del Teorema 8 es falso, aún si se supone que la función es continua. En efecto, la función de Cantor $C:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ es creciente (y por ende de variación acotada), continua y diferenciable c.t.p en $[0,1]$ ($C'(x)=0$ c.t.p en $[0,1]$); pero no es de variación acotada en $[0,1]$ (Natanson, 2016), (Grave, 2009). (Kannan, 1996).
2. Por el Teorema 11, si f es continuamente diferenciable en $[a,b]$, entonces la función v es continuamente diferenciable en $[a,b]$. Sin embargo, si $f\in V[a,b]$

entonces la existencia de la derivada f' en $[a,b]$ no es suficiente para garantizar la diferenciabilidad de v en $[a,b]$. En efecto, la función $f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(|x|^{-3/2}\right) & , \text{ si } 0<|x|\leq 1 \\ 0 & , \text{ si } x=0 \end{cases}$$

es de variación acotada y diferenciable en $[-1,1]$; pero la función v no es diferenciable en $x=0$.

3. Vito Volterra (1860-1940) presentó un ejemplo de una función $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ con derivada acotada en $[a,b]$ y, por ende, absolutamente continua, pero que f' no era integrable en $[a,b]$, lo que implica que la expresión $f(x)=\int_a^x f'(t)\,dt+f(a)$ no tiene sentido (Dunham, 2018). Por ende, f no es una integral indefinida de Riemann. Es importante investigar si las funciones absolutamente continuas son integrales indefinidas en una teoría más general que la teoría de integración de Riemann.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dunham, W. 2018. The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue. Princeton University Press. USA

Edward, C.H. 1994. The Historical Development of the Calculus. Springer-Verlag. USA.

Folland, G.B. 2007. Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. Wiley. USA

Gelbaum, B.R. and Olmsted, J.M.H. 2003. Counter-example in Analysis. Dover Publications, Inc. USA.

Grave, L. M. 2009. The Theory of Functions of Real Variable. Dover Publications, Inc. USA.

Kannan, R. and Krueger, C.K 1996. Dini Drivates. Springer. USA.

Krantz, S.G.2018. Elementary Introduction to the Lebesgue Integral. Taylor & Francis Group. USA

Natanson, I.P.2016. Theory of Functions of a Real Variable. Volumen I. Dover Publications, Inc. USA

Orchinnikov, S. 2013. Measure, Integral,Derivative: A Course on Lebesgue´s Theory. Springer. USA.

Royden, H.L and Fitzpatrick, P.M 2010. Real Analysis. China Machine Press. China.