REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.2
Julio- Diciembre 2024
pp. 115-132

EL IRRACIONAL NÚMERO DE ORO

THE IRRATIONAL GOLDEN NUMBER

Lorenzo Caballero Vigil

Universidad de Panamá, Extensión Universitaria de Soná, Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología, Panamá.

lorenzo.caballero@up.ac.pa https://orcid.org./0000-0003-0758-7038

Alexander A. Caballero Vigil

Ministerio de Educación, Dirección Regional de Veraguas, Panamá.
alexander.caballero@meduca.edu.pa https://orcid.org/0009-0008-3158-1692

Recibido: 05-03-2024, Aceptado: 15-05-2024

DOI https://doi.org/10.48204/j.saberes.v7n2.a5494

RESUMEN

En este artículo se busca resaltar la increíble presencia que tiene la sección áurea a lo largo del desarrollo de la Matemática y de la humanidad. Para ello, se realizó una revisión bibliográfica para dar inicio con un pequeño recorrido histórico en el cual se muestra su definición, en palabras de diferentes autores. Luego, se presenta su construcción geométrica con sus respectivas demostraciones utilizando segmentos, triángulos isósceles, rectángulos, ángulos y la estrella pentagonal. Finalizamos con un listado de situaciones en las que aparece la proporción áurea a nuestro alrededor, invitando al lector a profundizar más en ellas y seguir descubriendo que la Matemática nos rodea.

Palabras Clave: Sección áurea, extrema y media razón, triángulo áureo, rectángulo áureo, ángulo áureo.

ABSTRACT

This article seeks to highlight the incredible presence of the golden section throughout the development of Mathematics and humanity. For this purpose, a bibliographic review was carriedout to begin with a short historical tour in which its definition is shown, in the words of different authors. Then, its geometric construction is presented with its respective demonstrations using segments, isosceles triangles, rectangles, angles and the pentagonal star. We end with a list of situations in which the golden ratio appears around us, inviting the reader to go deeper into them and continue discovering that Mathematics is all around us.

Keywords: Golden section, extreme and mean ratio, golden rectangle, golden angle, golden triangle

INTRODUCCIÓN

La Matemática para De Guzmán (1997), es una actividad creadora de belleza, en la que se busca una cierta clase de belleza intelectual, solamente accesible, a los ojos del alma, y en esto consiste en el fondo la fuerza motivadora y conductora siempre presente en los esfuerzos de los grandes creadores de la Matemática. Además, el infinito cúmulo de maravillas que nos ofrece la Matemática ha logrado deslumbrar a grandes autores a través de la historia, conduciéndolos a explorar cada vez más sus extraordinarios misterios.

No es un secreto que la Matemática está presente en cada instante de nuestras vidas, manifestándose de diferentes formas, una de estas formas presentes a nuestro alrededor es la sección áurea, la cual encontramos en la naturaleza, las construcciones, las artes y más.

Elboj (1985), nos define la sección áurea como un canon de proporción por el que un segmento se divide en dos partes desiguales, de tal manera que la razón entre la menor y la mayor es igual a la razón entre esta última y la suma de las dos. Para Sánchez (1970), como se citó en Remesar (2005), es una división del todo en dos partes, de tal modo que la parte menor es a la mayor, como la mayor es al todo. Por su parte la proporción áurea para Correa Acosta y Rivera Roldan (2016), es entendida como una igualdad existente entre dos razones, otorgándoles correspondencia, equilibrio y simetría entre los componentes de un todo. En resumen, sección áurea de acuerdo con Lorente (1986), es el nombre que Leonardo Da Vinci dio a la división de un segmento en “media y razón”; ilustrando personalmente este tratado que sobre ello y todas sus propiedades escribió su amigo el fraile Luca Pacioli, en la misma corte de Milán, pero publicado algo más tarde en Venecia (1509), con el título de Divina Proportione.

Esta increíble joya de la Matemática, ha recibido a lo largo de la historia diferentes nombres: sección áurea, proporción dorada, divina proporción, número áureo, número divino, canon áureo, número de oro. Además, se supone según Gutiérrez y Eso (2009), que el número era conocido antes de los griegos porque aparecen figuras geométricas relacionadas con él en algunos monumentos y obras de arte anteriores a la civilización Helénica. Pero, aunque se consideran algunas de sus propiedades geométricas de forma experimental, fueron los griegos los primeros que dieron rigor matemático a la noción de número de oro. Aparece en el Timeo de Platón y en Los Elementos de Euclides. Este último tratado recoge lo esencial de las propiedades geométricas del número de oro.

Sampaolesi (2006), nos menciona que puede ser que la primera referencia al número de oro se encuentre en Pitágoras y su Escuela Pitagórica, cuyo símbolo era la estrella pentagonal. Luego, Johannes Kepler también realizó estudios importantes sobre el número de oro.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.2
Julio- Diciembre 2024
pp. 115-132

Proporción áurea

Definición 1: Definición a partir de segmentos. Si se divide un segmento de recta en dos partes, que la relación de la totalidad sea a la parte mayor como ésta sea a la parte menor, se dice que se ha dividido en extrema y media razón, y por sus notables propiedades se llama sección áurea. (Tapia-Lara, 2020)

Si tomamos un segmento $\overline{FH}$ y un punto G dentro del segmento verificando que el segmento mayor es la media proporcional entre el segmento $\overline{FH}$ y la parte menor, entonces se define la razón áurea como la razón entre las longitudes de los segmentos mayor y menor descritos anteriormente. Esto es:

Figura 1

Segmento dividido en media y extrema razón

El punto G, debe ser un punto tal que permita que se verifique $\frac{FH}{FG} = \frac{FG}{GH}$

Si llamamos $a = \overline{FG}$ y $b = \overline{GH}$, entonces $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ o $\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$

Haciendo $\frac{a}{b} = x$ se obtiene $1 + \frac{1}{x} = x$ que es la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$

Si resolvemos esta ecuación, tenemos que $a = 1$, $b = -1$ y $c = -1$

Veamos: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La raíz positiva que se obtiene es: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398 \ldots$

O sea que, $\frac{FG}{GH} = 1{,}61803398 \ldots = \varphi$

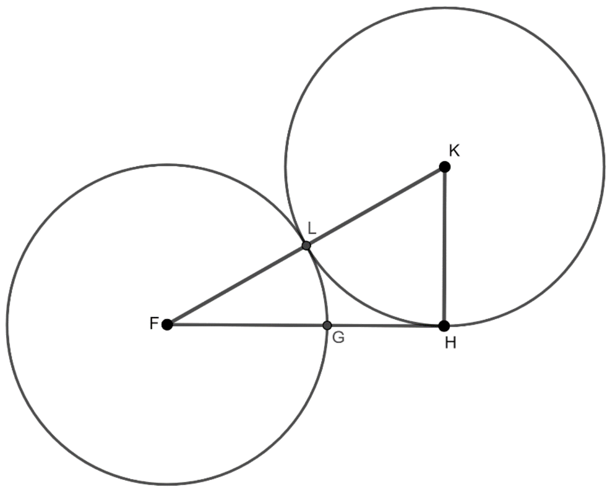
A este número obtenido como solución de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ se le llama número de oro y se representa con la letra griega φ (phi) en honor del griego Phidias, quien de acuerdo a Córcoles (2004) y Romero (s.f.), lo utilizó abundantemente en sus obras durante el periodo clásico griego.

Construcción con regla y compás: Para construir un segmento cuyas longitudes estén divididas de modo que se satisfaga la sección áurea debemos seguir los siguientes pasos:

1. Dibujamos el segmento $\overline{FH}$.
2. Trazamos por H una perpendicular al segmento $\overline{FH}$.
3. Sobre la perpendicular trazada, colocamos un punto K de modo que $\overline{HK} = \frac{\overline{FH}}{2}$.
4. Unimos mediante una línea recta los puntos F y K.
5. Tomando a K como centro y a $\overline{KM}$ como radio, se traza una circunferencia. Llamaremos L al punto de intersección de la circunferencia con el segmento $\overline{FK}$.
6. Tomando el punto F como centro y a $\overline{FL}$ como radio, se traza una circunferencia. Llamaremos G al punto de intersección de la circunferencia con el segmento $\overline{FH}$.
7. El punto G divide al segmento $\overline{FH}$ de acuerdo con la sección áurea.

Figura 2

División de un segmento de acuerdo con la sección áurea, utilizando regla y compás



Otras Formas donde se obtiene el número de oro

A través de triángulos isósceles: Un triángulo áureo, es un triángulo isósceles en el que la longitud del lado duplicado está en proporción del número áureo con respecto a la longitud del lado distinto.

En el caso del triángulo isósceles se nos pueden presentar dos situaciones:

1. Triángulo áureo menor o triángulo divino: Es todo aquel triángulo isósceles en el cual los lados desiguales están en proporción áurea, siendo el mayor el lado no repetido. Es decir, si a es la longitud del lado mayor y b la longitud del lado menor entonces, $\frac{a}{b} = \varphi$. Esto puede determinarse calculando el valor de los tres ángulos del triángulo.

Si determinamos los ángulos del triángulo en este caso tendremos que:

En el triángulo ΔABC de la figura 3 se tiene que los lados $\overline{AC} = \overline{AB}$, por lo tanto, sus longitudes son iguales. Es decir, $b = c$.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.2
Julio- Diciembre 2024
pp. 115-132

Además, $\cos B = \cos C = \frac{\frac{a}{2}}{b}$

$$\cos B = \cos C = \frac{a}{2b} = \frac{1}{2}\frac{a}{b}$$

Como sabemos que $\frac{a}{b} = \varphi$ entonces,

$$\mathrm{Cos}\, B = \cos C = \frac{1}{2}\varphi$$

$$B = C = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\varphi\right)$$

$$B = C = \cos^{-1}(0{,}809017)$$

$$B = C = 36°$$

$$A = 180° - (B + C)$$

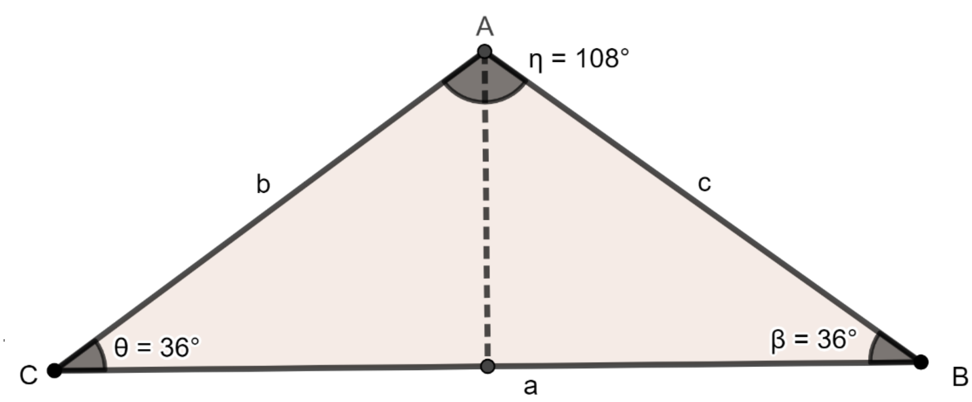
$$A = 180° - (36° + 36°)$$

$$A = 108°$$

Con lo que se prueba la definición del triángulo áureo menor.

Figura 3

Triángulo áureo menor o triángulo divino



2. sceles en el

r el lado no

repetido. Es decir, si a es la longitud del lado mayor y b la longitud del lado menor entonces $\frac{a}{b} = \varphi$. Esto puede determinarse calculando el valor de los tres ángulos del triángulo.

Determinemos los ángulos del triángulo, en este caso tendremos que:

En el triángulo ΔABC de la figura 4 se tiene que los lados $\overline{AB} = \overline{BC}$, por lo tanto, sus longitudes son iguales. Es decir, $a = c$.

Además, $\cos A = \cos C = \frac{\frac{b}{2}}{a}$

$$\cos A = \cos C = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2}\frac{b}{a}$$

Como sabemos que $\frac{a}{b} = \varphi$ entonces, $\frac{b}{a} = \frac{1}{\varphi}$

$$\text{Cos}\, A = \cos C = \frac{1}{2\varphi}$$

$$A = C = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\varphi}\right)$$

$$A = C = \cos^{-1}(0{,}3090177562)$$

$$A = C = 72°$$

$$B = 180° - (A + C)$$

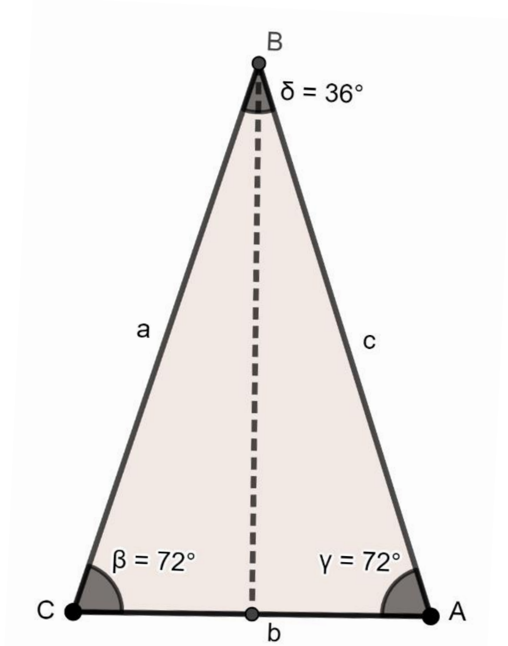
$$B = 180° - (72° + 72°)$$

$$B = 36°$$

Con lo que se prueba la definición del triángulo áureo menor.

Figura 4

Triángulo áureo mayor o sublime



A través de rectángulo: Un rectángulo áureo, es aquel cuya proporcionalidad entre sus lados es igual a la razón áurea. Es decir, si a es la longitud del lado mayor de un rectángulo y b la longitud del lado menor, entonces, $\frac{a}{b} = \varphi$.

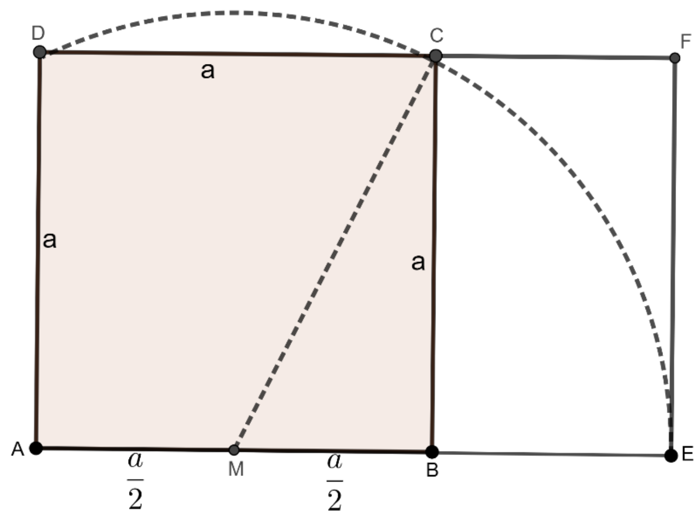
Construyamos de forma geométrica el rectángulo áureo:

1. Consideremos el cuadrado $\blacksquare ABCD$, cuya longitud de sus lados es a.
2. Sobre el lado $\overline{AB}$ marcamos su punto medio, sea M este punto.
3. Tomando a M como centro y radio $\overline{MC}$ trazamos un arco de circunferencia hasta cortar la prolongación del segmento en el punto E.
4. El rectángulo $\blacksquare AEFD$ es un rectángulo áureo.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.2
Julio- Diciembre 2024
pp. 115-132

Figura 5

Construcción del rectángulo áureo



Comprobemos lo demostrado anteriormente.

Basándonos en la construcción presentada en la figura 5, tenemos que $\overline{ME} = \overline{MC}$, ya que ambos son radios de la circunferencia con centro en M.

Entonces $\overline{ME} = \overline{MC} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$ aplicando el teorema de Pitágoras

$$\overline{ME} = \overline{MC} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$$

$$\overline{ME} = \overline{MC} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$$

$$\overline{ME} = \overline{MC} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Por otro lado, $\overline{ME} = \overline{MB} + \overline{BE}$

$\overline{BE} = \overline{ME} - \overline{MB}$

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.2
Julio- Diciembre 2024
pp. 115-132

$$\overline{BE} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}$$

$$\overline{BE} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$$

El lado mayor del rectángulo es $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE}$

$$\overline{AE} = a + \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$$\overline{AE} = \frac{2a+a(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$$\overline{AE} = \frac{2a-a+a\sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{AE} = \frac{a+a\sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{AE} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$

Para que se cumpla con la razón áurea $\frac{\overline{AE}}{AD} = \varphi$

$$\frac{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}}{a} = \varphi$$

$$\frac{a(1+\sqrt{5})}{2} \cdot \frac{1}{a} = \varphi$$

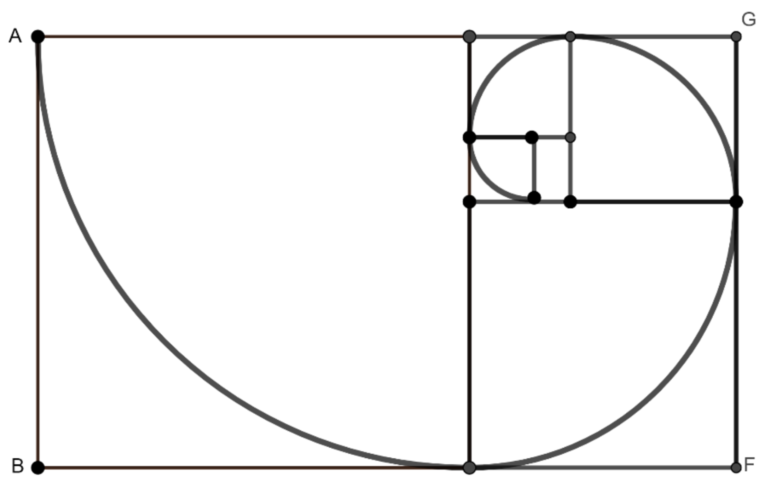
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Por ende, hemos demostrado analíticamente que el rectángulo $\blacksquare AEFD$ obtenido gráficamente guarda las proporciones áureas.

Propiedad del rectángulo áureo: Si al rectángulo áureo le eliminamos de su interior un cuadrado de lado igual al lado menor del rectángulo, el rectángulo que se obtiene es un rectángulo áureo más pequeño. Si este proceso se repite indefinidamente se obtiene una sucesión de rectángulos áureos encajados. Si se trazan arcos de circunferencia de radio igual al lado del cuadrado inscrito en cada rectángulo áureo y los unimos, se obtiene una espiral. Tal como se muestra en la figura 6. A esta espiral se le conoce como espiral logarítmica (Contreras, s.f.), espiral áurea (Pintos et al., 2016), espiral dorada (González et al., 2010), espiral de Durero (Mora, 2011), espiral de oro (Márquez, 2008).

Figura 6

Construcción de la espiral áurea

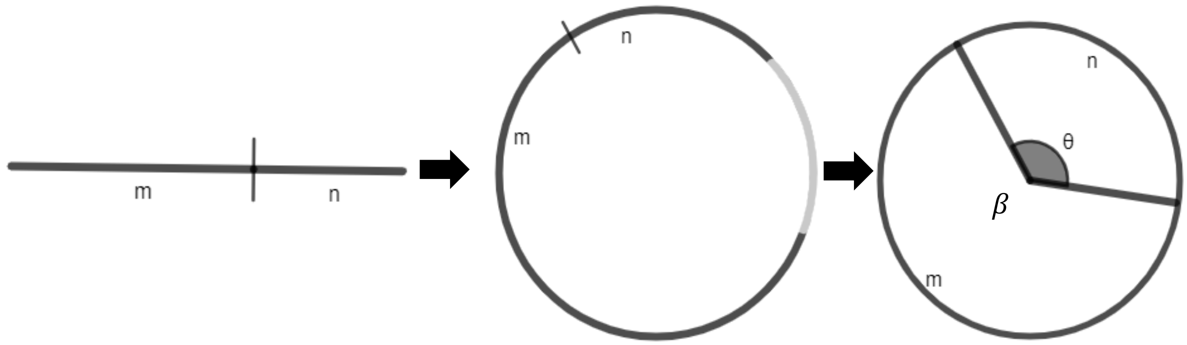


Ángulo áureo: Si consideramos dos segmentos m y n, que están en proporción áurea, con ellos dibujamos una circunferencia de modo que la longitud de la circunferencia sea $m + n$, entonces el valor del ángulo central que se corresponde con el segmento menor es un número irracional que se puede escribir como $137.5°$. Luego, si se divide el ángulo que corresponde al segmento mayor entre el correspondiente del segmento menor, se obtiene el número de oro.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.2
Julio- Diciembre 2024
pp. 115-132

Figura 7

Ángulo áureo



De la figura 7 tenemos que: $\frac{m}{n} = \frac{m+n}{m} = \varphi$

$$\frac{\theta}{\beta} = \frac{\theta+\beta}{\theta} = \varphi$$

Por otro lado, $\theta + \beta = 360° \Longrightarrow \frac{360°}{\beta} = \varphi$

De aquí se obtiene que: $\frac{\theta+\beta}{\theta} = \frac{360°}{\beta}$

$$\beta = 360° \frac{\theta}{\theta+\beta}$$

$$\beta = \frac{360°}{\varphi}$$

$$\beta = \frac{360°}{\varphi} = \frac{360°}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

$$\beta = \frac{720°}{\sqrt{5}+1}$$

$$\beta = 222.5°$$

De aquí se obtiene que $\theta = 360° - \beta$

$$\theta = 137.5°$$

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Vol.7, No.2
Julio- Diciembre 2024
pp. 115-132

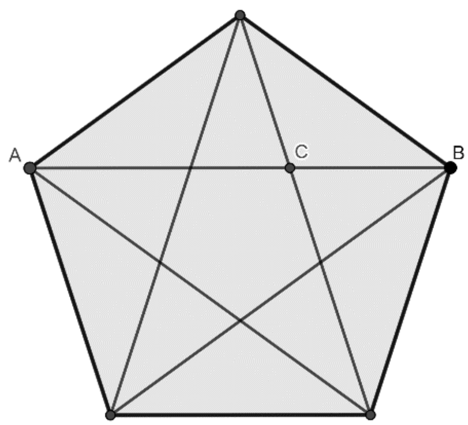
Al ángulo $\theta = 137.5°$ se le conoce como ángulo áureo. Este ángulo se encuentra presente en la naturaleza, en la opinión de Beresaluce Díez (2014), se observa en la disposición de las ramas de un árbol o en la distribución de las hojas alrededor de un tallo. Y según Vermoux et al., (2019), está también relacionado con las filotaxis espirales que caracteriza la disposición de dos órganos consecutivos. A esto, Santamaría-Bedón (2020), añade que el ángulo áureo, es un ángulo de rotación a partir del punto central, mediante el cual los nuevos elementos se van organizando a medida que crecen.

La estrella pentagonal y el número de oro: Si en un pentágono regular, trazamos todas sus diagonales se construye una estrella con cinco vértices llamada estrella pentagonal o pentagrama. (Ozamiz,1986)

Los pitagóricos descubrieron que en la estrella pentagonal figura 8, los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$ están en proporción áurea.

Figura 8

Estrella pentagonal



Veamos la demostración de esta propiedad, presentada por Agra y Taboada (2019):

Consideremos el pentágono regular $ABCDE$ de la figura 9 cuyo lado mide 1.

Tracemos las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ desde el vértice A, las medidas de los ángulos formados son:

$$\measuredangle ABC = 108°$$

$$\measuredangle BAC = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$$

$$\measuredangle CAD = 108° - 2(36°) = 36°$$

$$\measuredangle ACD = \measuredangle ADC = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$$

Ahora tracemos la diagonal $\overline{CE}$, al punto de intersección de $\overline{CE}$ y $\overline{AD}$ llamémosle F.

Los triángulos $\triangle CAD$ y $\triangle CFD$ son semejantes, ya que poseen los mismos ángulos.

Considerando la proporcionalidad podemos calcular los lados, recordando que inicialmente tomamos el lado del pentágono con valor 1 y tomemos $\overline{AC} = x$.

Tenemos que: $\overline{CF} = \overline{CD} = \overline{AF} = 1$, entonces $\overline{FD} = x - 1$

Por lo tanto, $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{1}$

$$x(x-1) = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Esta ecuación que acabamos de obtener ya fue trabajada con anterioridad y tiene como solución al número de oro cuando se considera su raíz positiva, o sea que $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$.

Es decir, que, si consideramos un pentágono con la longitud de su lado igual a la unidad, entonces cualquiera de sus diagonales tiene como medida el número de oro. Esta relación se cumple en todos los pentágonos regulares, ya que $\varphi = \frac{longitud\ de\ la\ diagonal}{longitud\ del\ lado}$.

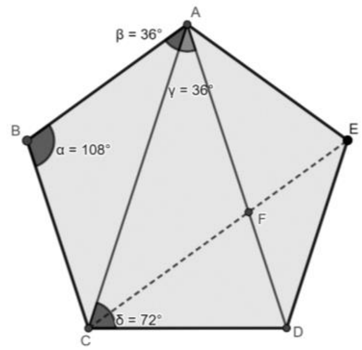
REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X

Vol.7, No.2
Julio- Diciembre 2024

pp. 115-132

Figura 9

Apoyo para la demostración de la propiedad que establece la relación entre la longitud de la diagonal de un pentágono regular y la longitud de su lado.



CONCLUSIÓN

Es indudable que estamos rodeados de Matemática, solo nos hace falta saber apreciar sus diferentes manifestaciones a nuestro alrededor. Una prueba de ello es la sección áurea, divina proporción o número de oro, como se le desee llamar, que está presente no solo en la geometría sino en diferentes situaciones en el mundo actual, basados en esta aseveración invitamos al lector a seguir indagando dónde se encuentra presente el número de oro. Como sugerencia podemos decir que el número de oro se encuentra en la arquitectura: en el Paternon de Athenas, en la Gran Pirámide de Keops, la Catedral de Notre Dame, la Torre Eiffel; en el arte: en el cuadro de Diego Velásquez “La Meninas”, en la pintura de Sandro Botticelli “El Nacimiento de Venus”, en las pinturas de Da Vinci “La Mona Lisa”, “El Hombre de Vitruvio” y “La Última Cena”; en la naturaleza: en la proporción del cuerpo humano, la forma en cómo se distribuyen las semillas del girasol, la distribución de las hojas en un tallo, la distribución de los pétalos de ciertas flores, en el centro de la flor de manzanilla, en la formación de las caracolas; incluso en la música.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agra, P. G., & Taboada, J. R. (2019). Las matemáticas del arte: Más allá del número de oro. LOS LIBROS DE LA CATARATA.

Beresaluce Díez, R., Peiró i Gregòri, S., & Ramos Hernando, MDC (2014). El profesor como guía-orientador. Un modelo docente.

Contreras, M. V. (s.f.). Aplicaciones de la Sucesión de Fibonacci y la razón Áurea.

Córcoles, A. R. (2004). Fibonacci y el número áureo. Manual formativo de ACTA, (34), 73-81.

Correa Acosta, P. I., & Rivera Roldan, I. A. (2016). La sección aurea aplicada a la enseñanza de las matemáticas en estudiantes de básica secundaria.

De Guzmán, M. (1997). Matemáticas y Sociedad: acortando distancias. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 32, 3-11.

Elboj, G. F. (1985). La sección áurea, estructura numérica de Leandro y Hero de Boscán. Cuadernos de investigación filológica, 11, 71-78.

González Zacarías, C., Palomino Ovando, M. A., & Cocoletzi, G. H. (2010). Los números de fibonacci en la naturaleza y los sistemas nanoestructurados artificiales. Mundo nano. Revista interdisciplinaria en nanociencias y nanotecnología, 3(1), 15-28.

Gutiérrez, T. D. P., & Eso, B. (2009). El Número de Oro. Propuestas para el aula.

Lorente, J. F. E. (1986). La sección áurea en los planos de la Abadía de Alfaro, 1775. In Segundo Coloquio sobre Historia de La Rioja: Logroño, 2-4 de octubre de 1985 (pp. 283-296). Colegio Universitario de La Rioja.

Márquez, I. (2008). Un rectángulo casi de oro. UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 13, 61-74.

Mora, J. J. (2011). Alberto Durero: Relación geometría y experiencia.

Ozamiz, D. P. M. D. G. (1986). Los Pitagóricos. Historia de la Matemática, 11-35.

Pintos, D. C., Ródenas, M. D. C. E., Garro, J. C., Rojo, J., Freixenet, J. T., & Victoria, S. (2016). Un trabajo con espirales. Pensamiento Matemático, 6(2), 47-62.

Remesar, S. (2005). La proporción áurea en la música popular. Universidad nacional de Lanús.

Romero, F. M. (s.f.). De la impotencia a la seguridad. Los irracionales.

Sampaolesi, R. (2006). La divina proporción y la retina. OLMO Ediciones.

Santamaría-Bedón, S. J. (2020). Digitalización de formas de la naturaleza como recurso morfológico. DISEÑO ARTE Y ARQUITECTURA, (9), 133-149.

Tapia-Lara, A. J. (2020). La proporción áurea: ejemplos notables en arquitectura. Legado de Arquitectura y Diseño, 3(4), 155-174.

Vermoux, T., Godin, C., & Besnard, F. (2019). Cuando las plantas hacen matemáticas. Investigación y ciencia, 511, 20-28.