Tecnociencia 2016, Vol. 18, N° 1.

FUNCIONES QUE ORIGINAN CURVAS DE SEGUNDO GRADO: UN NUEVO ENFOQUE PARA EL ESTUDIO DE LAS CÓNICAS

José Antonio Camarena Berrío
Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento de Matemática. Email: jose.camarenab@up.ac.pa

RESUMEN
Se analizan las características de las funciones que originan las curvas de segundo grado $f(x) = \alpha + \beta\sqrt{P(x)}$ donde α , β son números reales y $P(x)$ es un polinomio cuadrático, se identifican las condiciones que debe satisfacer la función generadora para representar una circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Se destaca el uso de una función generadora principal y una secundaria para los casos que la cónica en general no sea la representación de una función.

PALABRAS CLAVES
Función principal y secundaria, semicurva, elementos de la curva, gráfica de la curva.

FUNCTIONS THAT GIVE RISE TO SECOND DEGREE CURVES: A NEW APPROACH TO THE STUDY OF CONICS

ABSTRACT
An analysis of the characteristics that give rise to functions of second degree curves $f(x) = \alpha + \beta\sqrt{P(x)}$ where α, β are real numbers and $P(x)$ is a quadratic polynomial equation, is reported. The conditions that the generating function must satisfy to represent a circle, parabola, ellipse and hyperbola are identified. The use of a principal generating function is highlighted, and a secondary function is attributed for the cases which conic section is not representative of a function in general.

KEYWORDS
Primary and secondary function, semi-curved, elements of the curve, curve graph.

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente las secciones cónicas se estudian antes del concepto de función, esto se evidencia en los programas de estudios de los bachilleratos y en los libros de textos (Cuellar, 2003; Guerra & Figueroa, 2004; Kindle, 1991). Aquí se propone utilizar el referido concepto para analizar sus ecuaciones, determinar los elementos y trazar las gráficas de cada una de estas curvas. Es claro que de las cuatro curvas que se estudian, la única que globalmente representa una función, desde la perspectiva $y = f(x)$, es la parábola de eje paralelo al $eje\, y$, la cual satisface la prueba de la línea vertical para una función (Baley & Sarell, 2004).

Se escriben básicamente cinco secciones descritas de la siguiente manera. La primera sección se dedica al estudio general de las características principales de las funciones que originan las curvas de segundo orden, en donde se identifican las condiciones que debe tener la función para generar cada una de las cónicas. Las cuatro secciones siguientes se dedican, respectivamente al estudio de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola; en donde para cada una de ellas se interpretan sus ecuaciones, se determinan sus elementos a partir de la función de la semicurva, se analizan los diferentes casos de gráficas que se generan y se presenta un ejemplo de cada una.

Si la función define la semicurva por arriba de un eje de simetría horizontal, entonces se dice que se trata de la semicurva principal, en caso contrario nos referimos a la semicurva secundaria; pero la semicurva que defina la función, la cual depende del signo que antecede al radical (positivo para la principal y negativo para la secundaria), será trazada en cada gráfica la curva de segundo grado completa la cual se genera al graficar las dos funciones en el mismo plano.

CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LAS FUNCIONES QUE ORIGINAN CURVAS DE SEGUNDO GRADO

Las funciones que generan curvas de segundo grado son las funciones irracionales, específicamente las de la forma $f(x) = \alpha + \beta\sqrt{P(x)}$ donde α y β son números reales y $P(x)$ es un polinomio cuadrático que no es un cuadrado perfecto.

Si $\beta > 0$ se trata de la semicurva principal, en el caso de que $\beta < 0$ se refiera a la semicurva secundaria. Es importante tener claro que el valor absoluto del coeficiente β se puede introducir dentro del radical elevándolo al cuadrado y mantener el signo positivo o negativo para el coeficiente del radical, de manera que la forma de la función que estudiaremos no va a contener tal coeficiente β.

Definición 1: Una función f que origina una curva de segundo grado tiene la forma típica principal:

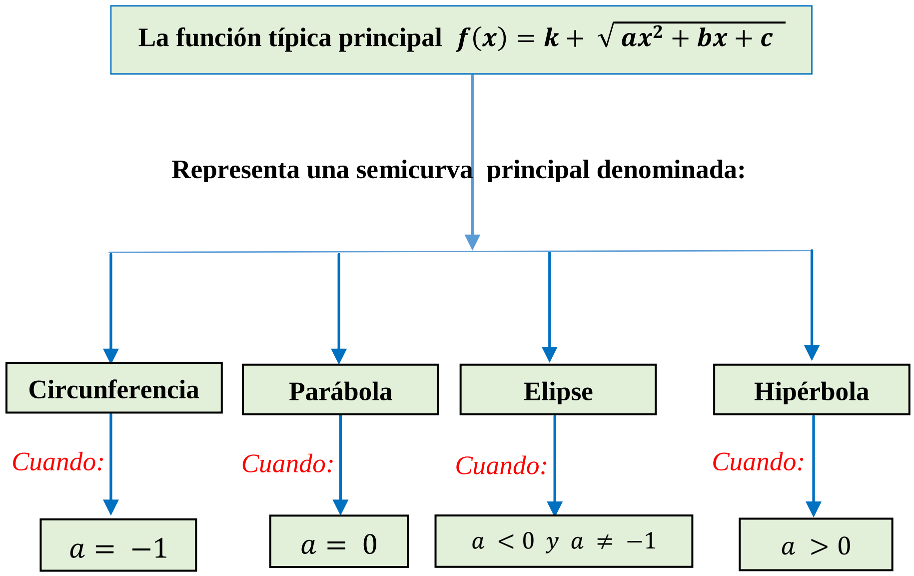
$$f(x) = k + \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

O bien, la forma típica secundaria:

$$f(x) = k - \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

donde a, b, c, k son números reales y el polinomio $ax^2 + bx + c$ no es cuadrado perfecto.

Es evidente que $f(x)$ es una función real cuando $ax^2 + bx + c \geq 0$, he aquí la condición necesaria para encontrar el dominio de la función. El siguiente diagrama ilustra las condiciones que debe cumplir la función de la definición anterior para representar cada una de las curvas que se desean estudiar.



Si la función dada no está en su forma típica entonces ella debe ser transformada a dicha forma para poder identificar qué tipo de curva de segundo grado representa. Algo más poderoso aún, es que si tenemos una ecuación general de segundo grado en la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se sabe que representa una circunferencia cuando $A = B$; una parábola cuando $A = 0$ *ó* $B = 0$; una elipse cuando $A \neq B$, pero ambos tienen el mismo signo; una hipérbola cuando $A \ y \ B$ tienen signos contrarios. Sin embargo, en cualquiera de los casos es posible despejar adecuadamente una variable para obtener una función de la forma $y = f(x)$, para considerar las funciones que definen las semicurvas principal y secundaria con el objeto de proceder al estudio de la curva de segundo grado.

LA CIRCUNFERENCIA

Se reitera que la función $f(x) = k + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ representa una semicircunferencia principal cuando $a = -1$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el dominio de la función está definido por el conjunto siguiente:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}\ tal\ que\ x_1 \leq x \leq x_2\}$$

Entonces los puntos $A(x_1 , f(x_1))\ y\ \ B(x_2 , f(x_2))$ son extremos de un diámetro horizontal, por lo tanto, el centro de la circunferencia es el punto medio de dicho diámetro, es decir, el centro es el punto:

$$C(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2})$$

$$C(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{f(x_1) + f(x_1)}{2})$$

$$C(\frac{x_1 + x_2}{2} , f(x_1))$$

Es claro que x_1 y x_2 son raíces del polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c = 0$, por consiguiente, se tiene que:

$$f(x_1) = k + \sqrt{a\, {x_1}^2 + bx_1 + c}$$

$$f(x_1) = k$$

Esta es la ordenada del centro, y, si se llama, h la abscisa del centro, se tiene que las coordenadas del centro son:

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y \quad k = f(x_1)$$

el radio es la distancia del centro $C(h,k)$ al punto $A(x_1\ ,f(x_1))$, de manera que el radio es:

$$r = \sqrt{\left[\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right]^2 + [f(x_1) - f(x_1)]^2}$$

$$r = \sqrt{\left[\frac{x_2 - x_1}{2}\right]^2}$$

$$r = \frac{|x_2 - x_1|}{2}$$

ahora bien, consideremos la función de la semicircunferencia principal:

$$f(x) = k + \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

la misma es una semicircunferencia cuando $a = -1$, entonces se tiene que:

$$f(x) = k + \sqrt{-x^2 + bx + c}$$

si se considera la función cuadrática $-x^2 + bx + c = 0$ y como $x_1\ , x_2$ son raíces de esta ecuación, se tiene:

$$x^2 - bx - c = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 - bx - c = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

de esta relación se obtiene que $b = x_1 + x_2$ y $c = x_1x_2$, de esta manera la abscisa del centro de la circunferencia es $h = \frac{b}{2}$, esto significa que la mitad del coeficiente de x en el polinomio cuadrático es la abscisa del centro de la circunferencia.

retomando la función $f(x) = k + \sqrt{-x^2 + bx + c}$, se tiene:

$$f(x) = k + \sqrt{c - (x^2 - bx)}$$

$$f(x) = k + \sqrt{c - (x^2 - 2hx)}$$

$$f(x) = k + \sqrt{c + h^2 - (x^2 - 2hx + h^2)}$$

$$f(x) = k + \sqrt{c + h^2 - (x - h)^2}$$

de esta forma de la función se deduce que el centro de la circunferencia es el punto de coordenadas $C(h, k)$ y el radio es $r = \sqrt{c + h^2}$, esto es evidente ya que la función puede ser escrita de la siguiente manera:

$$y = k + \sqrt{c + h^2 - (x - h)^2}$$

$$y - k = \sqrt{c + h^2 - (x - h)^2}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = c + h^2$$

esta es la ecuación cartesiana de la circunferencia de centro $C(h, k)$ y radio igual a $r = \sqrt{c + h^2}$ (cuellar, 2003).

La parábola

La función $f(x) = k + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ representa una semiparábola principal cuando $a = 0$, es decir, cuando la función tiene la forma:

$f(x) = k + \sqrt{bx + c}$ de manera que el dominio de la función se presenta cuando $bx + c \geq 0$, por lo tanto, la abscisa del vértice de la parábola es $h = -\frac{c}{b}$.

como el vértice es un punto que pertenece a la curva, entonces la ordenada del vértice es:

$$f(h) = k + \sqrt{b\left(-\frac{c}{b}\right) + c}$$

$$f(h) = k$$

el vértice es el punto de coordenadas $V(h, f(h))$. Además, si el parámetro p representa la distancia del vértice al foco, entonces el foco es el punto $F(h + p, k)$ y la directriz es la recta $y = h - p$.

un extremo del lado recto es el punto de coordenadas $A(h + p, f(h + p))$, busquemos la ordenada de este punto como sigue:

$$f(h + p) = k + \sqrt{b(h + p) + c}$$

la distancia del punto A al foco F es el doble de p, ya que la longitud del lado recto es $4p$, de manera que se tiene:

$$\overline{AF} = 2p$$

$$k + \sqrt{b(h+p) + c} - k = 2p$$

$$\sqrt{b(h+p) + c} = 2p$$

$$b(h+p) + c = 4p^2$$

$$b\left(-\frac{c}{b} + p\right) + c = 4p^2$$

$$-c + bp + c = 4p^2$$

$$p(4p - b) = 0$$

de donde se obtiene $p = 0$ y $p = \frac{b}{4}$, pero como p es una distancia se sigue que $p = 0$ no tiene sentido, por consiguiente $p = \frac{b}{4}$ es el valor de p en términos del coeficiente de x.

Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha y si $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda.

Se ha encontrado que $p = \frac{b}{4}$ y $h = -\frac{c}{b}$, es decir, $b = 4p$ y $c = -bh = -4ph$, si estos valores se sustituyen en la función que se está estudiando, se obtiene:

$$f(x) = k + \sqrt{4px - 4ph}$$
$$y = k + \sqrt{4p(x - h)}$$
$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Ecuación cartesiana de la parábola de eje paralelo al eje de las x (fuenlabrada, 2003; zill, 2000), el lado recto que es la cuerda perpendicular al eje $y = k$ que pasa por el foco y tiene longitud igual a $LR = |4p|$.

La ecuación de la parábola de eje paralelo al eje y es de la forma (fuenlabrada, 2003):

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

en cuyo caso se puede escribir:

$$f(x) = \frac{(x-h)^2 + 4pk}{4p}$$

la misma se puede estudiar como función en la cual los elementos son similares a los de la anterior, sólo que el parámetro p afectará a las ordenadas, es decir sus elementos son: el vértice $V(h,k)$, el foco es el punto $F(h,k+p)$, la directriz es la recta $y = k - p$, el eje es $x = h$; si p es positivo, la parábola abre hacia arriba, y si es negativo abre hacia abajo.

La elipse

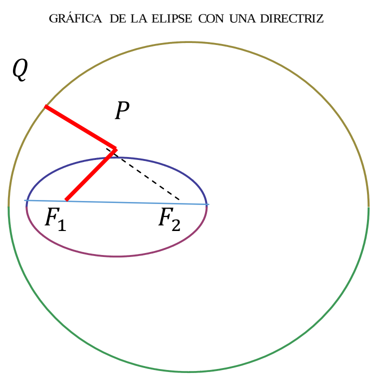
Como bien se ha visto para la parábola la directriz es una recta vertical u horizontal dependiendo de cómo sea el eje de la parábola (Cuellar, 2003; Fuenlabrada, 2003; Guerra & Figueroa, 2004), y cada punto de la parábola equidista del foco y de la directriz, parece natural poder extender esta idea para definir la elipse y la hipérbola, pero resulta que para poder definir estas curvas mediante tal enfoque las directrices de estas cónicas no pueden ser rectas puesto que los puntos no podrán equidistar de un punto fijo y de una recta fija, esta es la razón por la cual las directrices de la elipse e hipérbola son circunferencias centradas en los focos (Bruño, 1978).

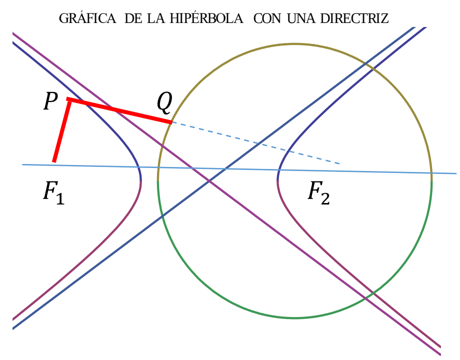
Entonces tanto la elipse como la hipérbola tendrán dos directrices que son circunferencias centradas en los focos, en términos generales una directriz centrada en el foco F_1 nos permitirá definir la curva o una rama de la curva como el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo F_2, que es el otro foco, y de una circunferencia fija centrada en el foco F_1 y de radio igual al diámetro mayor o real de la curva; es por esta razón que la suma de distancias, en el caso de la elipse, y la diferencias de distancias, en el caso de la hipérbola, es constante, pues tal constante es el radio de la circunferencia directriz (Bruño, 1978).

A pesar de que esta sección es dedicada a la elipse es necesario e importante brindar este aporte académico en la interpretación de las directrices tanto de la curva que nos ocupa como de la hipérbola que será tratada a profundidad en la siguiente sección.

Definición 4: el lugar geométrico de los puntos P de un plano que equidistan de un punto dado F y de una circunferencia (distancia tomada en dirección de la normal), se llama elipse si el punto P es interior a la circunferencia, y se llama hipérbola si el punto P es exterior a la circunferencia (Bruño, 1978).

Para interpretar gráficamente la definición anterior se presentan las siguientes gráficas, la primera ilustra la elipse con una directriz y la segunda la hipérbola con una directriz.





Es evidente en las gráficas anteriores que el radio de la directriz de la elipse es igual a la suma de las distancias del punto P a los dos focos, y que dicho punto equidista del otro foco y de la circunferencia directriz; en el caso de la hipérbola el radio de la circunferencia directriz es la diferencia de la distancia del punto P a los dos focos.

Definición 5: La elipse es el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante; o bien, es el conjunto de puntos P del plano que equidistan de un punto fijo F_1 y de una circunferencia de centro en F_2 y radio igual a $\overline{F_1P} + \overline{F_2P}$ (Kindle, 1991; Zill, 2000).

Recordemos que la semielipse principal está dada por la función definida por:

$$f(x) = k + \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

Donde se tiene que $a < 0$ y $a \neq -1$.

Supongamos que el dominio de la función es el conjunto siguiente:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}\ tal\ que\ x_1 \leq x \leq x_2\}$$

Como x_1 y x_2 son raíces del polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c = 0$, se tiene:

$$f(x_1) = k + \sqrt{ax_1{}^2 + bx_1 + c}$$
$$f(x_1) = k + \sqrt{0}$$
$$f(x_1) = k = f(x_2)$$

Por lo tanto dos vértices de la elipse son los puntos siguientes:

$$V_1(x_1, k)\ \ y\ \ V_2(x_2, k)$$

El centro de la elipse es el punto medio del segmento que une estos dos vértices, es decir, el centro es el punto:

$$C(h, k) = C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, k\right)$$

Si el centro es el origen $C(0, 0)$, entonces $x_1 + x_2 = 0$, es decir, $x_1 = -x_2$, son números reales opuestos aditivos.

Si se llama $g(x)$ la función que define la semielipse secundaria, se tiene:

$$g(x) = k - \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

Además, sabiendo que la función f define la semielipse principal, se pueden obtener los otros dos vértices, dados por:

$$V_3(h, g(h))\ \ y\ \ V_4(h, f(h))$$

Hasta este momento se tienen los cuatro vértices de la elipse y el centro, las abscisas de los vértices que están sobre el eje de la elipse que es paralelo al eje delas x son x_1 y x_2 , tal que $x_1 < x_2$, esto permite calcular la longitud del referido eje, la cual se obtiene por medio de la relación siguiente:

$$\ell_x = x_2 - x_1$$

Por otro lado, las ordenadas de los vértices sobre el eje de la elipse que es paralelo al eje de las y son $g(h)$ y $f(h)$, tal que $g(h) < f(h)$, en forma similar la longitud de dicho eje está dada por:

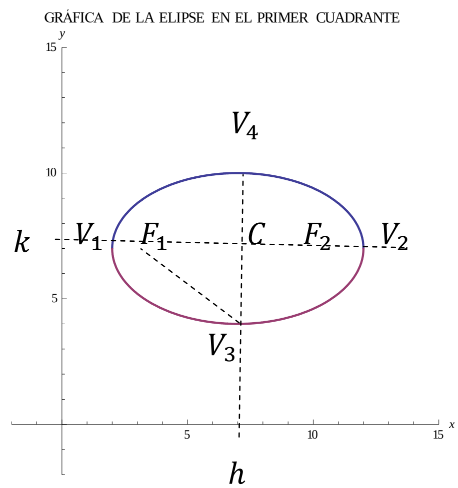
$$\ell_y = f(h) - g(h)$$

Si se comparan las longitudes de los ejes de la elipse podemos determinar si el eje mayor de la misma es paralelo al eje de las x o al eje de las y, esto origina los dos casos principales de la elipse que estudiaremos seguidamente.

ELIPSE DE EJE MAYOR PARALELO AL EJE X

Este caso se refiere a la condición de que $\ell_x > \ell_y$, es decir, el eje mayor de la elipse es paralelo al eje x .

Para un mejor análisis de este caso veamos la siguiente figura.



Sin pérdida de generalidad, se ha construido una elipse en el primer cuadrante cuyos focos son los puntos F_1 y F_2. Sea d la distancia del centro C de la elipse a uno de los focos, se prueba la congruencia de los segmentos siguientes $CV_1 \cong F_1V_3$ (véase la figura anterior) y de paso se demuestra que ℓ_x es igual a la constante que corresponde a la suma de distancias a la que se refiere la definición de elipse y por ende esta coincide con el radio de la circunferencia directriz de la elipse.

En efecto, sea Δx la distancia de los focos a los vértices sobre su eje. Consideremos que 2α es la constante que verifica la definición de elipse, como V_1 es un punto sobre la elipse, entonces dicho punto satisface la definición de elipse, de modo que:

Se satisface la siguiente relación:

$$V_1F_1 + V_1F_2 = 2\alpha$$

$$\Delta x + F_1F_2 + \Delta x = 2\alpha$$
$$2\Delta x + F_1F_2 = 2\alpha \,, \qquad (\mathbf{1})$$
$$x_2 - x_1 = 2\alpha$$
$$\ell_x = 2\alpha$$

De este último resultado se sigue que $\alpha = \frac{\ell_x}{2}$, es la distancia del centro de la elipse a sus vértices sobre el eje mayor.

Además, como V_3 es un punto sobre la elipse, se tiene:

$$V_3F_1 + V_3F_2 = 2\alpha$$

Como el triángulo $F_1V_3F_2$ es isósceles se tiene la congruencia de los segmentos $V_3F_1 \cong V_3\,F_2$ de modo que:

$$V_3F_1 + V_3F_1 = 2\alpha$$
$$2\,V_3F_1 = 2\alpha$$

Igualando este valor con la expresión (**1**), se tiene:

$$2\Delta x + F_1F_2 = 2V_3F_1$$
$$\Delta x + \frac{F_1F_2}{2} = V_3F_1$$
$$\Delta x + d = V_3F_1$$
$$CV_1 = V_3F_1.$$

Es claro que: $CV_1 = h - x_1$, $CV_3 = f(h) - k$, $CF_1 = d$ (distancia del centro al foco, la cual muchos autores frecuentemente la representa con la letra minúscula c).

Considerando el triángulo rectángulo CV_3F_1 y aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$(CF_1)^2 + (CV_3)^2 = (F_1V_3)^2$$
$$(CF_1)^2 + (CV_3)^2 = (CV_1)^2$$
$$(d)^2 + (f(h) - k)^2 = (h - x_1)^2$$
$$d = \sqrt{(h - x_1)^2 - (f(h) - k)^2}$$

Esta fórmula nos permite calcular la distancia del centro a los focos de la elipse, pero la misma se puede reducir a una equivalente en la siguiente forma:

$$d = \sqrt{\left(\frac{\ell_x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\ell_y}{2}\right)^2}$$

Esta fórmula es mucho más sencilla que la anterior porque está utilizando la mitad de los diámetros mayor y menor respectivamente.

Veamos cómo se obtienen el resto de los elemento de la elipse en este caso:

Los focos son los puntos $F_1(h - d, k)$ y $F_2(h + d, k)$.

La excentricidad, que es la forma como se encorva la curva, es: $ec = \frac{2d}{\ell_x}$

El lado recto que es la longitud de la cuerda perpendicular al eje mayor pasando por los focos es: $LR = \frac{(\ell_y)^2}{\ell_x}$

Las ecuaciones de las circunferencias directrices, las cuales tienen centros en los focos y radio igual a la longitud del eje mayor de la elipse son las siguientes:

$$[x-(h-d)]^2+(y-k)^2 = (\ell_x)^2 \ ; \ [x-(h+d)]^2+(y-k)^2 = (\ell_x)^2$$

ELIPSE DE EJE MAYOR PARALELO AL EJE Y

En forma similar al caso anterior se pueden hacer las demostraciones necesarias para deducir las fórmulas requeridas en este caso que se refiere al que verifica la condición de que $\ell_x < \ell_y$, esto lo queda como ejercicio propuesto.

La distancia del centro a los focos viene dada por la fórmula:

$$d = \sqrt{(f(h) - k)^2 - (h - x_1)^2}$$

Esta fórmula se puede reducir a una equivalente de la siguiente manera:

$$d = \sqrt{\left(\frac{\ell_y}{2}\right)^2 - \left(\frac{\ell_x}{2}\right)^2}$$

Esta fórmula es mucho más sencilla que la anterior porque está utilizando la mitad de los diámetros mayor y menor respectivamente.

Veamos cómo se obtienen el resto de los elemento de la elipse en este caso:

Los focos son los puntos $F_1(h, k-d)$ y $F_2(h, k+d)$.

La excentricidad, que es la forma como se encorva la curva, es: $ec = \frac{2d}{\ell_y}$

El lado recto que es la longitud de la cuerda perpendicular al eje mayor pasando por los focos es: $LR = \frac{(\ell_x)^2}{\ell_y}$

Las ecuaciones de las circunferencias directrices, las cuales tienen centros en los focos y radio igual a la longitud del eje mayor de la elipse son las siguientes:

$$(x-h)^2 + [y-(k-d)]^2 = \left(\ell_y\right)^2 \ ; \ (x-h)^2 + [y-(k+d)]^2 = \left(\ell_y\right)^2$$

La Hipérbola

Definición 6: La hipérbola es el conjunto de puntos P del plano cuyo valor absoluto de la diferencia de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante, los puntos fijos se llaman focos [6]; o bien, es el conjunto de puntos P del plano que equidistan de un punto fijo y de una circunferencia, la distancia es tomada en dirección a la normal y los puntos son exteriores a la circunferencia (Bruño, 1978).

La función irracional que representa la rama principal de la hipérbola es de la forma:

$$f(x) = k + \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

Mientras que la rama secundaria es representada por la función:

$$f(x) = k + \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

En ambos casos se debe satisfacer que a > 0 y $b \neq 0$ *ó* $c \neq 0$.

Básicamente tenemos dos casos de la hipérbola caracterizados por el paralelismo de su eje real con alguno de los ejes coordenados, a saber:

- Si el eje real de la hipérbola es paralelo al eje x, este caso se puede identificar en este texto de dos maneras, la primera cuando $4ac - b^2 < 0$, y la segunda cuando el dominio de la función es de la forma $Dom(f) = (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$ para x_1 y x_2 dos números reales finitos.
- Si el eje real de la hipérbola es paralelo al eje y, en este tipo de curva se identifica por el hecho de que $4ac - b^2 > 0$, o bien, porque el dominio de la función es d la forma $Dom(f) = (-\infty, +\infty)$.

Propiedad 1: Toda curva de segundo grado que posee centro y generada por la función de la forma:

$$f(x) = k + \sqrt{ax^2 + bc + c} \ ,$$

tiene como abscisa del centro:

$$h = -\frac{b}{2a}$$

HIPÉRBOLA DE EJE REAL PARALELO AL EJE X

En este caso la función generadora $f(x) = k + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ con las condiciones $a > 0$ y $b \neq 0$ $ó$ $c \neq 0$, tiene dominio $Dom(f) = (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$ y satisface que $4ac - b^2 < 0$, en cuyo cado la abscisa del centro es:

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$h = -\frac{b}{2a}$$

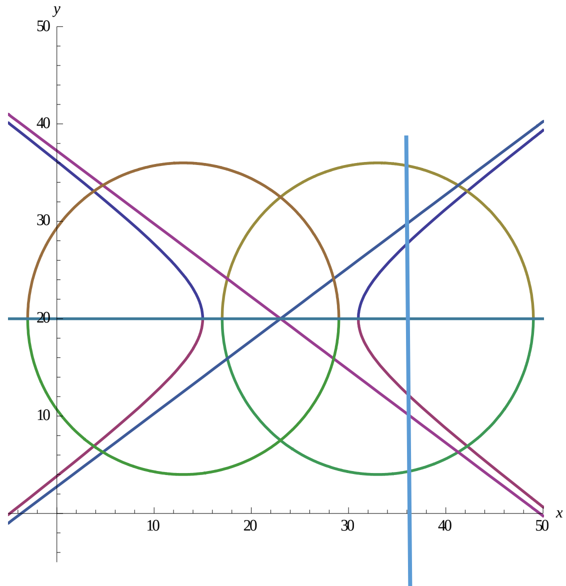
Como $f(x_1) = f(x_2) = k$ f(x1), entonces el centro de la hipérbola es el punto de coordenadas $C(h, k)$.

Los vértices de la hipérbola son los puntos $V_1(x_1, k)$ y $V_2(x_2, k)$, el eje real es la recta $y = k$, mientras que el eje imaginario es la recta $x = h$.

Veamos la siguiente gráfica la cual nos permite una mejor interpretación de los resultados que se desean establecer.

Los puntos B_1 y B_2 son puntos equidistantes del centro de la hipérbola y están sobre el eje imaginario, por esta razón se denominan, con mucha frecuencia, vértices imaginarios.

GRÁFICA DE LA HIPÉRBOLA EN EL PRIMER CUADRANTE



A partir de la función que representa la rama principal de la hipérbola, se tiene:

$$f(x) = k + \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

$$f(x) - k = \sqrt{a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c}$$

$$f(x) - k = \sqrt{a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}}$$

$$[f(x) - k]^2 = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$[f(x) - k]^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$[f(x) - k]^2 - a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\frac{[f(x) - k]^2}{a} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

$$\frac{[f(x) - k]^2}{\frac{4ac - b^2}{4a}} - \frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{\frac{4ac - b^2}{4a^2}} = 1$$

Recordemos que el caso que se está estudiando verifica la condición dada por $4ac - b^2 < 0$; por consiguiente, esta ecuación toma la forma:

$$\frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{[f(x) - k]^2}{\frac{b^2 - 4ac}{4a}} = 1$$

Ésta ecuación tiene la forma cartesiana de la hipérbola dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{(a_0)^2} - \frac{(y-k)^2}{(b_0)^2} = 1 ,$$

donde el centro es el punto $C(h,k)$, y las cantidades a_0 y b_0 son las distancias del centro a los vértices reales e imaginarios, respectivamente.

Por lo tanto, se tiene que:

$$h = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad (a_0)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad ; \quad (b_0)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$h = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad a_0 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad b_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a}}$$

Los vértices de la hipérbola podemos obtenerlo por medio de la siguiente forma:

$$V_1(h - a_0, k) \; ; \; V_2(h + a_0, k)$$

Los vértices sobre el eje imaginario son los puntos:

$$B_1(h, k - b_0) \; ; \; B_2(h, k + b_0)$$

Si llamamos d la distancia del centro a los focos tenemos que:

$$d = \sqrt{(a_0)^2 + (b_0)^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} + \frac{b^2 - 4ac}{4a}}$$
$$d = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac + a(b^2 - 4ac)}{4a^2}}$$
$$d = \sqrt{\frac{(a + 1)(b^2 - 4ac)}{4a^2}}$$
$$d = \frac{\sqrt{(a + 1)(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Los focos tienen las siguientes coordenadas:

$$F_1(h - d, k) \ ; \ \ F_2(h + d, k)$$

La excentricidad es de la curva viene dada por:

$$ec = \frac{d}{a_0}$$
$$ec = \frac{\frac{\sqrt{(a + 1)(b^2 - 4ac)}}{2a}}{\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$
$$ec = \sqrt{a + 1}$$

La longitud del lado recto es:

$$LR = \frac{2(b_0)^2}{a_0}$$
$$LR = \frac{2\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)}{\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$
$$LR = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Si se traza el rectángulo de lados V_1V_2 y B_1B_2 que pasan por los vértices, entonces las diagonales de este rectángulo son las rectas L_2 y

L_2 , dichas rectas son llamadas asíntotas de la hipérbola y sus ecuaciones son:

$$y = k \pm \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$$
$$y = k \pm \sqrt{a}(x - h)$$

Según la definición de hipérbola, se tiene:

$$r = V_1F_2 + V_1F_1$$

Este valor es constante y es el radio de las circunferencias directrices, se tiene:

$$r = V_1F_2 + V_1F_1$$
$$r = (h + d) - x_1 - [x_1 - (h - d)]$$
$$r = h + d - x_1 - x_1 + h - d$$
$$r = 2h - 2x_1$$
$$r = 2(h - x_1)$$
$$r = \ell_x$$

Las ecuaciones de las directrices son:

$$[x - (h - d)]^2 + (y - k)^2 = (\ell_x)^2 \ ; \ [x - (h + d)]^2 + (y - k)^2 = (\ell_x)^2$$

HIPÉRBOLA DE EJE REAL PARALELO AL EJE Y

En este caso el dominio de la función son todos los números reales y se verifica que $4ac - b^2 > 0$.

A partir de la función que representa la rama principal de la hipérbola, se tiene:

$$f(x) = k + \sqrt{ax^2 + bx + c}$$
$$f(x) - k = \sqrt{a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c}$$
$$f(x) - k = \sqrt{a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}}$$

$$[f(x) - k\,]^2 = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$[f(x) - k\,]^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$[f(x) - k\,]^2 - a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\frac{[f(x) - k\,]^2}{a} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

$$\frac{[f(x) - k\,]^2}{\frac{4ac - b^2}{4a}} - \frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{\frac{4ac - b^2}{4a^2}} = 1$$

Recordemos que el caso que se está estudiando verifica la condición dada por $4ac - b^2 > 0$, entonces esta ecuación mantiene la misma forma, por lo que ella se compara con la cartesiana de la hipérbola dada por:

$$\frac{(y-k)^2}{(b_0)^2} - \frac{(x-h)^2}{(a_0)^2} = 1\,,$$

donde el centro es el punto $C(h,k)$, y las cantidades a_0 y b_0 son las distancias del centro a los vértices reales e imaginarios, respectivamente.

Por lo tanto, se tiene que:

$$h = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad (a_0)^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2} \quad ; \quad (b_0)^2 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$h = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad a_0 = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad ; \quad b_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4ac - b^2}{a}}$$

Los vértices de la hipérbola podemos obtenerlo por medio de la siguiente forma:

$$V_1(h\,, k - b_0)\,;\ V_2(h, k + b_0)$$

Estos vértices también se pueden obtener evaluando las funciones g y f, secundaria y principal, respectivamente, en el valor de la abscisa del centro, de esta manera los vértices son:

$$V_1(h\,,g(h))\ ;\ \ V_2(h,f(h))$$

Los vértices sobre el eje imaginario $y = k$ son los puntos:

$$B_1(\,h - \ a_0, k)\ ;\ \ B_2(h + \ a_0, k)$$

Si llamamos d la distancia del centro a los focos tenemos que:

$$d = \sqrt{(a_0)^2 + (b_0)^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^2} + \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

$$d = \sqrt{\frac{4ac - b^2 + a(4ac - b^2)}{4a^2}}$$

$$d = \sqrt{\frac{(\,a + 1)(4ac - b^2)}{4a^2}}$$

$$d = \frac{\sqrt{(\,a + 1)(4ac - b^2)}}{2a}$$

Los focos tienen las siguientes coordenadas:

$$F_1(h, k - d)\ ;\ \ F_2(h, k + d)$$

La excentricidad es de la curva viene dada por:

$$ec = \frac{d}{b_0}$$

$$ec = \frac{\frac{\sqrt{(\,a + 1)(4ac - b^2)}}{2a}}{\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}$$

$$ec = \sqrt{\frac{a + 1}{a}}$$

La longitud del lado recto es:

$$LR = \frac{2(a_0)^2}{b_0}$$

$$LR = \frac{2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)}{\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}$$

$$LR = \sqrt{4ac - b^2}$$

Si se traza el rectángulo de lados V_1V_2 y B_1B_2 que pasan por los vértices, entonces las diagonales de este rectángulo son las rectas L_2 y L_2, dichas rectas son llamadas asíntotas de la hipérbola y sus ecuaciones son:

$$y = k \pm \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$$

$$y = k \pm \sqrt{a}(x - h)$$

En este caso que el eje real de la hipérbola es paralelo al eje y, las ecuaciones de las directrices son:

$$(x-h)^2 + [y - (k-d)]^2 = \left(\ell_y\right)^2 \; ; \; (x-h)^2 + [y - (k+d)]^2 = \left(\ell_y\right)^2$$

Se sabe que $\ell_y = f(h) - g(h)$.

CONCLUSIONES

El uso del concepto de función en el tratamiento de las secciones cónicas, presupone un avance en el conocimiento del referido concepto.

El uso de la notación funcional en el estudio de las cónicas no se debilita por la prueba de la línea vertical para una elipse, sino todo lo contrario, es fortalecido al distinguir la cónica como una curva compuesta por la gráfica de dos funciones distintas en un mismo plano.

No existe controversia entre el enfoque tradicional que utiliza las ecuaciones cartesianas y el enfoque funcional que se propone, pues este último puede ser aplicado en el momento que se estudian las funciones irracionales.

El estudiante requiere de conocimientos previos para el manejo de las funciones reales de una variable, en el uso del enfoque funcional para el estudio de las cónicas.

REFERENCIAS

Baley, J. & SarelL, G. 2004. *Trigonometría.* Tercera edición revisada. Libros McGraw Hill. Impreso en México.

Bruño, G. M. 1978. Geometría: Curso superior. Editorial Bruño. Impreso en España.

Cuellar, J. 2003. *Geometría Analítica.* Tercera edición. Libros McGraw Hill. Impreso en México.

Fuenlabrada, S. 2003. *Geometría Analítica.* Segunda edición. Libros McGraw Hill. Impreso en México.

Guerra, M. & Figueroa, S. 2004. Geometría Analítica. Libros McGraw Hill. Impreso en México.

Kindle, J. 1991. *Geometría Analítica con Trigonometría.* Primera edición. Libros McGraw Hill. Impreso en México.

Zill, D. 2000. *Álgebra y Trigonometría.* Segunda edición revisada. Libros McGraw Hill. Impreso en Colombia.

Recibido diciembre de 2014, aceptado abril de 2016.