



LA FUNCIÓN DE CANTOR

**Daniel Vásquez S.¹, Edilma Judith Díaz B.¹, Jorge E. Hernández U.²,
Angela J. Franco²**

¹Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología,
Departamento de Matemática. daniel.vasquez@up.ac.pa  edilma.diaz@up.ac.pa 

²Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento
de Matemática. jorge.hernandezu@up.ac.pa  angela.franco@up.ac.pa 

Fecha de recepción: 4 de octubre de 2022

Fecha de aceptación: 15 de noviembre de 2022

RESUMEN

Este trabajo está dirigido a estudiar el conjunto y la función de Cantor. El conjunto de Cantor posee propiedades que desafían la intuición geométrica. Se prueba que la función de Cantor es continua en todo punto del intervalo $[0,1]$, a pesar de que su gráfica no está compuesta de un solo trozo. El conjunto de Cantor toma su nombre de George F. L. P Cantor que en 1883 lo utilizó como herramienta de investigación para una de sus principales preocupaciones: el continuo.

PALABRAS CLAVES

Desarrollo decimal ternario, conjunto de Cantor, función de Cantor

THE CANTOR FUNCTION

ABSTRACT

This work is aimed at studying the set and the Cantor function. The Cantor set has properties that defy geometric intuition. It is proved that the Cantor function is continuous at every point in the interval $[0,1]$, even though its graph is not composed of a single piece. The Cantor set takes its name from George F. L. P Cantor, who in 1883 used it as a research tool for one of his major concerns: the continuum.

KEYWORDS

Ternary decimal expansion, Cantor set, Cantor function.

INTRODUCCIÓN

Hay muy pocos datos referentes a la historia del conjunto y la función de Cantor. En lo particular, Cantor no fue el primero en descubrir el conjunto de Cantor. Más aún, a pesar de que el descubrimiento original del conjunto de Cantor tenía un enfoque geométrico, el descubrimiento de Cantor del conjunto y la función de Cantor no estaba motivado por la geometría, ni involucraba la geometría, aunque es así como estos elementos son frecuentemente introducidos. De hecho, Cantor posiblemente dio con ellos mediante un razonamiento puramente aritmético.

Durante los años 1879-1884 Cantor escribió una serie de artículos titulados "Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten" que contenían el primer estudio sistemático de la topología del conjunto de puntos de la recta real. Después de introducir el término perfecto en el quinto artículo, Cantor estableció que los conjuntos perfectos no necesariamente son densos en todas partes. En la nota de pie de página de este documento Cantor introduce el conjunto que ha llegado a conocerse como el conjunto ternario de Cantor. El conjunto de números reales de la forma

$$x = \frac{c_1}{3} + \dots + \frac{c_v}{3^v} + \dots$$

donde c_v es 0 ó 2.

Durante el tiempo en que Cantor estuvo trabajando en los apuntes de "Punktmannichfaltigkeiten", otros trabajaban en la extensión del teorema fundamental del cálculo para funciones discontinuas. Cantor cita este aspecto en una carta fechada en noviembre de 1883, en la cual él define el conjunto de Cantor tal como lo definió en el documento mencionado anteriormente. No obstante, en la carta él pasa a definir la función de Cantor, la primera aparición conocida de esta función. Esta función es primero definida en el complemento del conjunto de Cantor como la función cuyos valores son

$$\frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_{u-1}}{2^{u-1}} + \frac{c_u}{2^u} \right)$$

1. DESARROLLO DECIMAL TERNARIO

Un número en el intervalo $[0,1]$ se escribe en base 3 de la siguiente manera:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 0.a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

donde cada $a_n = 0, 1$ ó 2 .

Por ejemplo

$$\frac{1}{9} = 0,01000 \dots$$

$$\frac{2}{3} = 0,2000 \dots$$

$$\frac{7}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = 0,21000 \dots$$

Mostremos que todo número del intervalo $[0,1[$ posee una expansión ternaria. En efecto, sean $x \in [0,1[$ y $A = \{0,1,2\}$. Dividamos $[0,1[$ en tres intervalos disjuntos de longitud $\frac{1}{3}$

$$I_{1,0} = \left[0, \frac{1}{3}\right[; \quad I_{1,1} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[; \quad I_{1,2} = \left[\frac{2}{3}, 1\right[$$

es decir:

$$I_{1,k} = \left[\frac{k}{3}, \frac{k+1}{3}\right[\text{ con } k \in A$$

Entonces existe un único $k_1 \in A$ tal que $x \in I_{1,k_1}$, por consiguiente

$$\frac{k_1}{3} \leq x < \frac{k_1 + 1}{3}$$

Dividamos I_{1,k_1} en tres intervalos disjuntos, de longitud $\frac{1}{3^2}$:

$$I_{2,0} = \left[\frac{k_1}{3}, \frac{k_1}{3} + \frac{1}{3^2} \right]; \quad I_{2,1} = \left[\frac{k_1}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{k_1}{3} + \frac{2}{3^2} \right]; \quad I_{2,2} = \left[\frac{k_1}{3} + \frac{2}{3^2}, \frac{k_1 + 1}{3} \right]$$

es decir,

$$I_{2,k} = \left[\frac{k_1}{3} + \frac{k}{3^2}, \frac{k_1}{3} + \frac{k}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right] \text{ con } k \in A$$

Luego, existe un único $k_2 \in A$ tal que $x \in I_{2,k_2}$, por lo tanto

$$\frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3^2} \leq x < \frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3^2} + \frac{1}{3^2}$$

Repetiendo este proceso n veces encontramos n números $k_1, k_2, \dots, k_n \in A$ tales que:

$$\frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3^2} + \dots + \frac{k_n}{3^n} \leq x < \frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3^2} + \dots + \frac{k_n}{3^n} + \frac{1}{3^n}$$

Observemos ahora que, evidentemente, la sucesión

$$S_n = \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{3^j}$$

es monótona, creciente y acotada superiormente por x , luego $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe y, además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq x$$

no obstante

$$0 \leq x - S_n \leq \left(\frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3^2} + \dots + \frac{k_n}{3^n} + \frac{1}{3^n} \right) - S_n = \left(S_n + \frac{1}{3^n} \right) - S_n = \frac{1}{3^n}$$

por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x - S_n) = 0$$

y, en consecuencia

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{3^j} \text{ con } k_j \in A, \text{ para todo número natural } j$$

Se ha probado así que cada $x \in [0,1]$ admite un desarrollo decimal ternario:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \text{ con } a_n \in A.$$

2. EL CONJUNTO DE CANTOR

El conjunto de Cantor y las funciones definidas sobre él son muy útiles, particularmente para la construcción de contraejemplos. El conjunto ternario de Cantor o simplemente el conjunto de Cantor fue exhibido por G. Cantor (1845-1918) como una ilustración de ciertas cosas curiosas que pueden ocurrir con conjuntos de puntos sobre la recta real. Algunas de las propiedades de este conjunto desafían la intuición geométrica.

Se presenta a continuación la construcción y propiedades del conjunto de Cantor. Sea $F = [0,1]$, entonces:

1) Se retira de F el intervalo abierto $I_{1,1} =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, correspondiente al segundo tercio. Quedarán dos intervalos cerrados disjuntos

$$J_{1,1} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ y } J_{1,2} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Pongamos

$$P_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \bigcup_{k=1}^{2^1} J_{1,k} \quad \text{y} \quad V_1 = \left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[= \bigcup_{k=1}^{2^{1-1}} I_{1,k}$$

es claro que P_1 es cerrado y V_1 es abierto.

2) De cada uno de los dos ($2^1 = 2$) intervalos $J_{1,1}$ y $J_{1,2}$ se retira el intervalo abierto correspondiente al segundo tercio. Quedarán cuatro ($2^2 = 4$) intervalos cerrados disjuntos al retirarse los intervalos abiertos

$$I_{2,1} = \left] \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2} \right[\quad y \quad I_{2,2} = \left] \frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2} \right[$$

Pongamos

$$P_2 = \bigcup_{k=1}^{2^2} J_{2,k} \quad y \quad V_2 = \bigcup_{k=1}^{2^2-1} I_{2,k} \cup V_1$$

Es evidente que P_2 es cerrado V_2 es abierto.

3) En la n -ésima operación, en cada uno de los 2^{n-1} intervalos cerrados de la operación anterior

$$J_{n-1,1}, \dots, J_{n-1,2^{n-1}}$$

se retira el intervalo abierto correspondiente al segundo tercio:

$$I_{n,1}, \dots, I_{n,2^{n-1}} \quad (2^{n-1} \text{ intervalos})$$

Subsisten $2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$ intervalos cerrados

$$J_{n,1}, \dots, J_{n,2^n}$$

Pongamos

$$P_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k} \quad y \quad V_n = \bigcup_{k=1}^{2^n-1} I_{n,k} \cup V_{n-1}$$

Es evidente que P_n es cerrado y V_n es abierto (Phills, 1984).

Por definición, el conjunto de Cantor es

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$$

Gráficamente el proceso de construcción del conjunto C queda descrito como muestra la Figura 1.

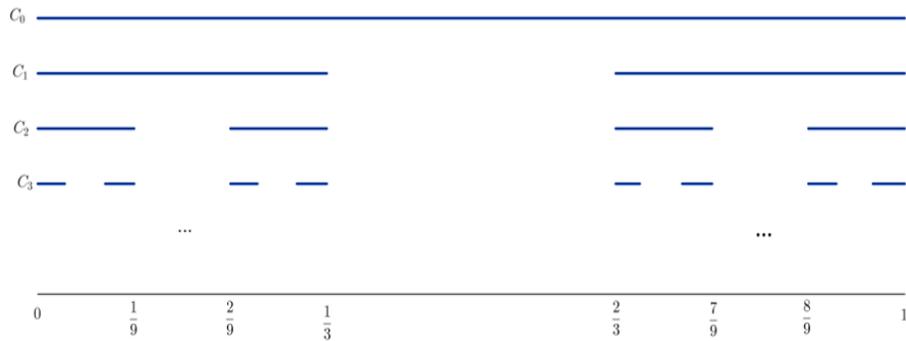


Figura 1. Descripción de la construcción del conjunto C.

Es claro que C contiene los puntos extremos de los intervalos $J_{n,k}$ que componen P_n

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}, \frac{7}{3^2}, \dots$$

Sin embargo, C contiene muchísimos más puntos que los indicados, como veremos en lo que sigue. En efecto, probaremos que

$$C = \left\{ x \in [0,1]: x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 0, a_1, a_2, a_3, \dots, \text{ con } a_n \in \{0,2\} \text{ para todo } n \geq 1 \right\}$$

Examinemos el complemento de P_n : Sea $x = 0, a_1, a_2, a_3, \dots$ (escrito en base 3) un elemento de $[0,1]$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \in I_{1,1} &\Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow 0,022 \dots < 0, a_1, a_2, a_3, \dots < 0,122 \dots \\ &\Leftrightarrow a_1 = 1 \end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned}
 x \in \bigcup_{k=1}^2 I_{2,k} &\Leftrightarrow x \in I_{2,1} \quad \text{ó} \quad x \in I_{2,2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{3^2} < x < \frac{2}{3^2} \quad \text{ó} \quad \frac{7}{3^2} < x < \frac{8}{3^2} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,0100 \dots < 0, a_1, a_2, a_3, \dots < 0,0200 \dots \\ \text{ó} \\ 0,2100 \dots < 0, a_1, a_2, a_3, \dots < 0,2200 \dots \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \text{ y } a_2 = 1 \\ \text{ó} \\ a_1 = 2 \text{ y } a_2 = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow a_1 \neq 1 \text{ y } a_2 = 1
 \end{aligned}$$

En general,

$$x \in \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k} \Leftrightarrow a_1 \neq 1, a_2 \neq 1, \dots, a_{n-1} \neq 1 \text{ y } a_n = 1$$

Por otro lado, si x es un punto extremo de algún $J_{n,k}$ y por lo tanto un elemento de C , entonces x se escribe en la forma

$$x = \frac{a}{3^n} \text{ para algún } a \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$$

por lo tanto,

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{\alpha_n}{3^n}, \quad \text{con } \alpha_n \in \{0, 2\}$$

ya que ningún $\alpha_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$ puede ser igual a 1 pues, en ese caso x pertenecería a algún $I_{m,k}$ y en consecuencia $x \notin C$. Por lo tanto,

$$x = 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n 000 = \begin{cases} 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} 000 \\ 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} 200 \end{cases}$$

De todo lo anterior resulta que para todo $x \in [0,1]$, $x = 0, a_1, a_2, a_3, \dots$

$$x \in V_n \Leftrightarrow \text{existe } j, j \leq n \text{ tal que } a_j = 1$$

por lo tanto

$$x \in P_n \Leftrightarrow a_1 \neq 1, a_2 \neq 1, \dots, a_n \neq 1$$

en consecuencia

$$x \in C \Leftrightarrow a_n \neq 1 \text{ para todo } n \geq 1$$

Así pues,

En particular resulta que $\frac{1}{4} = 0,020202 \dots$ es un elemento del conjunto de Cantor y que no es un punto extremo de algún $J_{n,k}$ (pues no es de la forma $\frac{a}{3^n}$).

$$C = \left\{ x \in [0,1]: x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 0, a_1, a_2, a_3, \dots, \text{ con } a_n \in \{0,2\} \text{ para todo } n \geq 1 \right\}$$

En particular resulta que $\frac{1}{4} = 0,020202 \dots$ es un elemento del conjunto de Cantor y que no es un punto extremo de algún $J_{n,k}$ (pues no es de la forma $\frac{a}{3^n}$).

También pertenecen a C los siguientes números

$$x = \frac{1}{13} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{3n}} = 0,002002 \dots$$

$$x = \frac{1}{39} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{3n+1}} = 0,00020002 \dots$$

$$x = \frac{1}{39} + \frac{2}{3} = \frac{9}{13} = 0,20020002 \dots$$

y muchísimos números más (Wheeden, 1977).

Se está ahora en condiciones de examinar otras propiedades del conjunto C .

Teorema 2.1: C es un subconjunto compacto de \mathbb{R} .

Demostración: Por construcción $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$ luego C es cerrado por ser intersección de cerrados; pero C también es acotado pues es un subconjunto de $[0,1]$ y en consecuencia, C es un conjunto compacto

Teorema 2.2: El interior de C es vacío

Demostración: Supongamos lo contrario, es decir, que el interior de C no es vacío. Luego existe $x \in C$ y $\varepsilon > 0$ tal que $I = \left]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right[\subset C$. Por lo tanto, $I \subset P_n$ para todo $n \geq 1$. Por la propiedad arquimedea, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon = |I| > \frac{1}{2^{n_0+1}}$. Luego para todo $n \geq n_0$ se tiene que $I_n = \left]x - \frac{1}{2^n}, x + \frac{1}{2^n}\right[\subset I$ con $|I_n| > \frac{1}{2^n}$; pero esto es una contradicción, pues P_n no puede tener intervalos con longitud mayor que $\frac{1}{2^n}$. Así pues, se concluye que el interior de C es vacío.

Teorema 2.3: El conjunto de Cantor C es no enumerable.

Demostración. Supongamos que C es enumerable, luego $C = \{c_1, c_2, \dots\}$. Consideremos el número $c = a_1, a_2, \dots$ en forma ternaria, de la siguiente manera:

$$a_1 = \begin{cases} 2 & \text{si el primer decimal de } c_1, \text{ escrito en forma ternaria, es } 0 \\ 0 & \text{si el primer decimal de } c_1, \text{ escrito en forma ternaria, es } 2 \end{cases}$$

$$a_2 = \begin{cases} 2 & \text{si el primer decimal de } c_2, \text{ escrito en forma ternaria, es } 0 \\ 0 & \text{si el primer decimal de } c_2, \text{ escrito en forma ternaria, es } 2 \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{si el primer decimal de } c_n, \text{ escrito en forma ternaria, es } 0 \\ 0 & \text{si el primer decimal de } c_n, \text{ escrito en forma ternaria, es } 2 \end{cases}$$

Se tiene que $c \in C$ y $c \neq a_n$ para todo $n \geq 1$, o cual es una contradicción. Así pues, C es un conjunto no enumerable.

Teorema 2.4: Todos los puntos del conjunto de Cantor C son puntos de acumulación de C

Demostración: Sea $x \in C$ y V una vecindad de x , entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq V.$$

Tome $n_0 \geq 1$ de modo que $\frac{1}{3^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}$ y considere

$$P_{n_0} = \bigcup_{k=1}^{2^{n_0}} J_{n_0,k}, \text{ donde } |J_{n_0,k}| = \frac{1}{3^{n_0}}$$

Como $x \in C$ se tiene que $x \in P_{n_0}$, por lo tanto, existe un k_{n_0} tal que $x \in J_{n_0,k_{n_0}}$. Luego,

$$\left. \begin{array}{l} x \in J_{n_0,k_{n_0}} \\ |J_{n_0,k_{n_0}}| = \frac{1}{3^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x \in J_{n_0,k_{n_0}} \subseteq]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq V$$

Mas aun, los puntos extremos de $J_{n_0,k_{n_0}}$ que son elementos de C , también pertenecen a V y, en consecuencia:

$$(V - \{x\}) \cap C \neq \phi$$

para toda vecindad V de x , es decir, x es un punto de acumulación de C .

Por los teoremas 2.1 y 2.4, se tiene que el conjunto de Cantor es un conjunto perfecto.

3. LA FUNCIÓN DE CANTOR.

Se define la función $f: C \rightarrow [0,1]$, llamada la función de Cantor, por la regla:

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{2^i} \text{ donde } r_i = \frac{1}{2}a_i$$

Es decir, si x es un elemento de C teniendo expansión ternaria $x = 0, a_1, a_2, a_3, \dots$ donde $a_i = 0$ ó 2 , entonces $f(x)$ es el número cuya expansión binaria (base 2) es $0, r_1, r_2, r_3, \dots$ donde $r_i = \frac{1}{2}a_i$

Características de f .

1. f es suryectiva.

En efecto, sea

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{2^i}$$

un elemento de $[0,1]$ con $r_i \in \{0,1\}$ y sea

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

donde $a_i = 2r_i$. Entonces $a_i \in \{0,2\}$, por lo tanto,

$$x \in C \text{ y } f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{2^i} = y$$

lo cual prueba la suryectividad de f .

2. Si $I = (x, y)$, con $x < y$, es uno de los intervalos abiertos extraídos en el n -ésimo paso, en la construcción geométrica del conjunto de Cantor, entonces $f(x) = f(y)$.

En el primer paso se extrae el intervalo $\left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[$

En el segundo paso se extraen los intervalos $\left] \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right[$ y $\left] \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right[$, los cuales se pueden expresar como

$$\left] \frac{1}{3^2} + \frac{b_1}{3}, \frac{2}{3^2} + \frac{b_1}{3} \right[\text{ con } b_1 = 0 \text{ ó } 2$$

Los intervalos que se extraen en el tercer paso se pueden expresar en la forma

$$\left] \frac{1}{3^3} + \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2}, \frac{2}{3^3} + \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} \right[\text{ con } b_1, b_2 = 0 \text{ ó } 2$$

En el n-ésimo paso se extraen 2^{n-1} intervalos los cuales se pueden escribir como

$$\left] \frac{1}{3^n} + \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \dots + \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}}, \frac{2}{3^n} + \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \dots + \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}} \right[\text{ con } b_i = 0 \text{ ó } 2$$

es decir,

$$\left] \frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i}, \frac{2}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i} \right[\text{ con } b_i = 0 \text{ ó } 2$$

Mostremos que

$$f\left(\frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i}\right) = f\left(\frac{2}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i}\right) \text{ con } b_i = 0 \text{ ó } 2$$

En efecto, si

$$\frac{2}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i} = 0, b_1 b_2 \dots b_{n-1} 2000 \dots$$

entonces

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i}\right) &= 0, \frac{b_1}{2} \frac{b_2}{2} \dots \frac{b_{n-1}}{2} 1000 \dots \\ &= 0, \frac{b_1}{2} \frac{b_2}{2} \dots \frac{b_{n-1}}{2} + 0, \underbrace{00 \dots 00}_{n-1 \text{ veces}} 100 \dots \end{aligned}$$

$$= 0, \frac{b_1}{2} \frac{b_2}{2} \cdots \frac{b_{n-1}}{2} + \frac{1}{2^n}$$

Por otro lado, si

$$\frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i} = 0, b_1 b_2 \cdots b_{n-1} 022 \cdots$$

entonces

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i}\right) &= 0, \frac{b_1}{2} \frac{b_2}{2} \cdots \frac{b_{n-1}}{2} 011 \cdots \\ &= 0, \frac{b_1}{2} \frac{b_2}{2} \cdots \frac{b_{n-1}}{2} + 0, \underbrace{00 \cdots 00}_{n \text{ veces}} 111 \cdots \\ &= 0, \frac{b_1}{2} \frac{b_2}{2} \cdots \frac{b_{n-1}}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots \\ &= 0, \frac{b_1}{2} \frac{b_2}{2} \cdots \frac{b_{n-1}}{2} + \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) \\ &= 0, \frac{b_1}{2} \frac{b_2}{2} \cdots \frac{b_{n-1}}{2} + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f\left(\frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i}\right) = f\left(\frac{2}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i}\right)$$

3. f es creciente sobre C ; es decir, si $x, y \in C$, con $x < y$, entonces $f(x) \leq f(y)$.

En efecto, sean $x = 0, x_1 x_2 \cdots$; $y = 0, y_1 y_2 \cdots$ dos elementos de C y supongamos que $x < y$.

Se probó anteriormente que, si x, y son extremos de los intervalos extraídos en la construcción del conjunto de Cantor, entonces, $f(x) = f(y)$.

Si este no es el caso, entonces existe un entero positivo k tal que

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{n-1} = y_{n-1} \text{ y } x_k = 0 < y_k = 2$$

Por consiguiente

$$f(x) = 0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \dots \text{ y } f(y) = 0, \frac{y_1}{2}, \frac{y_2}{2}, \dots$$

de donde

$$\frac{x_1}{2} = \frac{y_1}{2}, \frac{x_2}{2} = \frac{y_2}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}}{2} = \frac{y_{n-1}}{2} \text{ y } \frac{x_k}{2} = 0 < \frac{y_k}{2} = 1$$

Por lo tanto, $f(x) < f(y)$. En conclusión, se tiene que f es creciente.

Anteriormente se probó que la función de Cantor tiene el mismo valor en los dos extremos de cada intervalo suprimido en la construcción del conjunto de Cantor. Como muestra la Figura 2, si tomamos este valor común como valor constante de la función f en este intervalo, podemos extender la función de Cantor a todo el intervalo $[0,1]$. De esta manera, f será creciente sobre $[0,1]$.

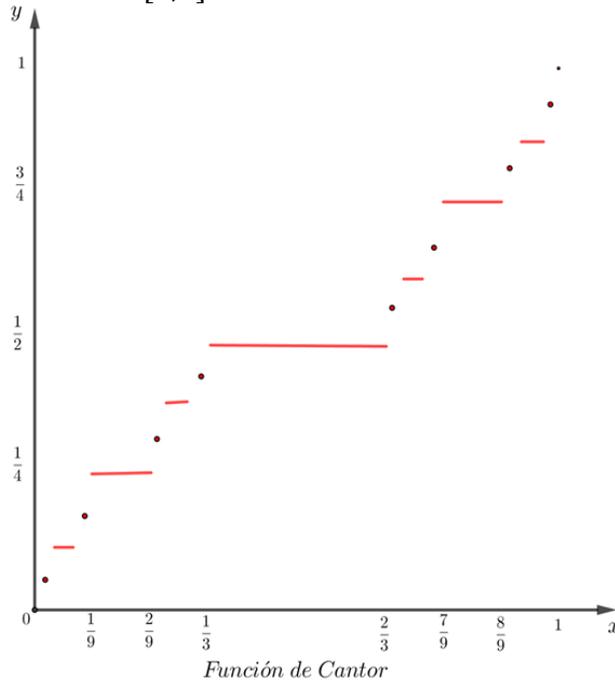


Figura 2. Extensión de la función de Cantor.

El siguiente teorema, referente a las funciones crecientes, es de vital importancia para el estudio de la función de Cantor (Bartle, 1999), (Rudin, 1980).

Teorema 3.1: Sea $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Si g es suryectiva sobre $[g(a), g(b)]$ entonces es continua en $[a, b]$.

Como la función de Cantor es creciente y suryectiva en $[0,1]$, por el teorema anterior, es continua en $[0,1]$.

Con la función de Cantor se muestra cuánto se ha avanzado en el desarrollo del concepto de función a partir de la idea elemental de que una función continua "es aquella cuya gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel".

REFERENCIAS

Bartle, R.G. (1999). Introducción al Análisis Matemático. Editorial Limusa, S.A. México.

Fleron, J. (1994). A Note on the History of the Cantor Set and Cantor Function. *Mathematics Magazine. An Official Publication of The Mathematical Association of America*. Vol. 67. Washington, D.C. pags 136-140.

Phillps, E. (1984). An Introduction to Analysis and Integration Theory. Dover Edition U.S.A.

Rudin, W. (1980). Principios de Análisis Matemático. McGraw-Hill Book. México.

Wheeden, RL. (1977). Measure and Integral an Introduction to Real Analysis. Marcel Dekker, Inc. New York.