

UN ENFOQUE AL ANÁLISIS DE UNA FAMILIA DE ALINEALIDADES TÍPICAS ESTÁTICAS

Por:

Rony Javier Caballero y Melanio Alberto Castillo
Departamento de Ingeniería Electrónica y Comunicaciones

RESUMEN

Este trabajo presenta una contribución para el análisis de una familia de alinealidades típicas estáticas, que no consideran el fenómeno de histéresis (saturación, zona muerta, ganancia variable y sus combinaciones). El análisis utiliza el método de la función descriptiva y se establece una relación entre los máximos o mínimos de la gráfica de amplitud de la función y puntos de quiebre de las características estáticas no lineales.

1. INTRODUCCIÓN

Es un hecho conocido que muchas relaciones físicas son no lineales. Sin embargo, existen algunas alinealidades que podrían analizarse como una sola familia. De esta forma sería posible obtener una solución general para esta familia. Lo anterior, permitirá analizar en una forma más compacta, la relación existente entre diferentes parámetros de esta familia de alinealidades y los máximos o mínimos que se obtengan de la gráfica de amplitud de su función descriptiva.

2. DESARROLLO DE UNA FAMILIA DE ALINEALIDADES:

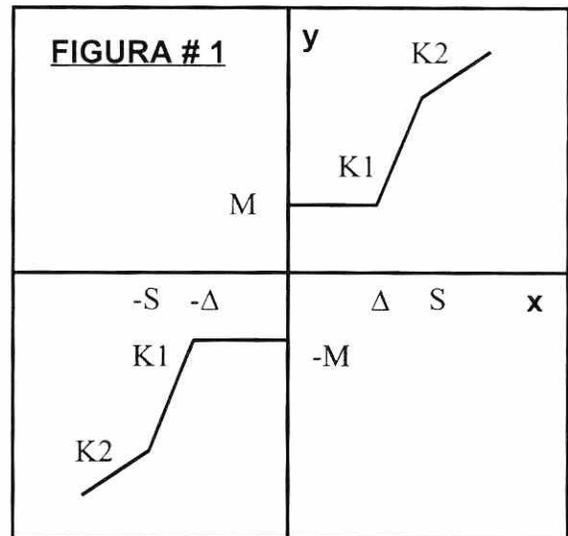
La familia a estudiar debe cumplir con la relación general:

$$y = -Mu(-x)u(\Delta+x)u(K1x+K1\Delta-M)u(-x-\Delta)u(S+x) + (K2x-(K1-K2)s+K1\Delta-M)u(-x-S)$$

$$+Mu(x)u(\Delta-x)+(K1x-K1\Delta+M)u(x-\Delta)u(S-x) + (K2x+(K1-K2)s+K1\Delta+M)u(x-S) \quad (1)$$

donde x corresponde a la señal de entrada, y corresponde a la señal de salida y $u(x)$ corresponde a la función escalón unitario. En la Figura 1 puede verse la gráfica de y vs x . Como se aprecia, existe un nivel de salida inicial M y dos pendientes $K1$ y $K2$, y dos puntos de cambio de pendiente Δ y S .

Puede obtenerse diferentes casos típicos de la familia cambiando diferentes parámetros de la función (1), como se muestra en la Tabla 1. Sin embargo cabe resaltar que las alinealidades allí expuestas, no son las únicas que pueden ser consideradas en esta familia, ya que existen otras alinealidades que cumplen con la función estática general de esta familia (1).



Un tipo de alinealidad que se presenta en muchos sistemas físicos es el de Zona Muerta, que puede verse en la Tabla 1 como el caso 1. Para encontrar su función descriptiva sólo

basta con hacer $K_1=K_2=K$, $M=0$ y $s=\Delta$, donde K es la pendiente de la gráfica que relaciona y con x .

TABLA 1		
FIGURA	FUNCIÓN ESTÁTICA	FUNCIÓN DESCRIPTIVA
	<p>CASO 1</p> $0 \leq X < \Delta$ $X \geq \Delta, Y = K(X - \Delta)$	$K_1 = K_2 = K, S = \Delta, M = 0$ $N = K - 2K \arcsin(\Delta/X)$ $-(2K/\pi)(\Delta/X)\sqrt{[1 - (\Delta/X)^2]}$ $\gamma = 1, \rho = 1, \mu = 0$
	<p>CASO 2</p> $X \geq 0, Y = KX + M$	$K_1 = K_2 = K, \Delta = 0$ $N = [4M/(\pi X)] + K$ $\gamma = 1, \rho = 1$
	<p>CASO 3</p> $0 \leq X < S, Y = K_1 X$ $X \geq S: Y = K_2 X + S(K_1 - K_2)$	$M = 0, \Delta = 0$ $N = K_2 + (2/\pi)(K_1 - K_2)\arcsin(S/X)$ $+ (2/\pi)(K_1 - K_2)(S/X)\sqrt{[1 - (S/X)^2]}$ $\gamma = 0, \mu = 0$
	<p>CASO 4</p> $0 \leq X < S, Y = KX$ $X \geq S: Y = KS$	$K_1 = K, K_2 = 0, M = 0, \Delta = 0$ $N = (2K/\pi)\arcsin(S/X)$ $+ (2K/\pi)(S/X)\sqrt{[1 - (S/X)^2]}$ $\rho = 0, \mu = 0, \gamma = 0$
	<p>CASO 5</p> $0 \leq X < S, Y = K_1 X + M$ $X \geq S: Y = K_2 X + S(K_1 - K_2) + M$	$\Delta = 0$ $N = 4M/(\pi X) + K_2$ $+ (2/\pi)(K_1 - K_2)\arcsin(S/X)$ $+ (2/\pi)(K_1 - K_2)(S/X)\sqrt{[1 - (S/X)^2]}$ $\rho = 0$

CONTINUACIÓN DE TABLA 1

FIGURA	FUNCIÓN ESTÁTICA	FUNCIÓN DESCRIPTIVA
	<p>CASO 6</p> $0 \leq X < \Delta, Y = 0$ $\Delta \leq X < S, Y = K_1(X - \Delta)$ $S \leq X, Y = K_2(X - S) + K_1(S - \Delta)$	$\Delta = 0$ $N = K_2 - 2(K_1/\pi) \arcsin(\Delta/X)$ $- (2K_1/\pi)(\Delta/X) \sqrt{1 - (\Delta/X)^2}$ $+ [2(K_1 - K_2)/\pi](S/X) \sqrt{1 - (\Delta/X)^2}$ $\mu = 0$
	<p>CASO 7</p> $0 \leq X < \Delta: Y = 0$ $\Delta \leq X < S, Y = K(X - \Delta)$ $S \leq X, Y = K(S - \Delta)$	$K_1 = K, K_2 = 0, M = 0$ $N = -2(K/\pi) \arcsin(\Delta/X)$ $- 2(K/\pi)(\Delta/X) \sqrt{1 - (S/X)^2}$ $+ 2(K/\pi) \arcsin(S/X)$ $- 2(K/\pi)(S/X) \sqrt{1 - (S/X)^2}$ $\gamma = 1, \rho = 0$
	<p>CASO 8</p> $0 \leq X, Y = M$	$K_2 = K_1 = 0, M = 0, S = \Delta = 1$ $N = 4M/(\pi X)$ $\gamma = 0, \rho = 1$
	<p>CASO 9</p> $0 \leq X < \Delta, Y = M$ $X \geq \Delta: Y = K(X - \Delta) + M$	$K_1 = K = K_2, S = \Delta$ $N = 4M/(\pi X) + K - (2K/\pi) \arcsin(\Delta/X)$ $- (2K/\pi)(\Delta/X) \sqrt{1 - (\Delta/X)^2}$ $\rho = 1, \gamma = 1$
	<p>CASO 10</p> $0 \leq X < \Delta, Y = M$ $\Delta \leq X < S: Y = K(X - \Delta) + M$ $S \leq X: Y = K(S - \Delta) + M$	$K_1 = K: K_2 = 0$ $N = 4M/(\pi X) - (2K/\pi) \arcsin(\Delta/X)$ $- (2K/\pi)(\Delta/X) \sqrt{1 - (\Delta/X)^2}$ $+ (2K/\pi) \arcsin(S/X)$ $+ (2K/\pi)(S/X) \sqrt{1 - (S/X)^2}$ $\gamma = 0$

3. OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DESCRIPTIVA:

Si a la alinealidad que se muestra en la Figura 1, se le inyecta una señal senoidal a la

entrada del tipo $X \sin(\omega t)$, donde X es la amplitud de la señal y ω es la velocidad angular de la misma, la primera mitad del semiciclo positivo de salida puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= M \dots\dots\dots 0 < t < t_1 \\
 y(t) &= K_1 X \sin(\omega t) + M - K_1 \Delta \dots\dots\dots t_1 < t < t_2 \\
 y(t) &= K_2 X \sin(\omega t) + M - K_1 \Delta + (K_1 - K_2) S \dots\dots t_2 < t < \pi / (2\omega)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Al aplicar la serie de Fourier a esta salida, sólo existirán los armónicos impares. Luego, por la definición de la función descriptiva, sólo se considera el primer armónico de esta serie.

Así que:

$$B_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \sin(\omega t) d(\omega t) \tag{3}$$

Por simetría sólo es necesario integrar hasta $\pi/2$ y se multiplica la integral por 4.

Si se define:

$$\alpha = \omega t_1 = \arcsin\left(\frac{\Delta}{X}\right) \tag{4}$$

$$\beta = \omega t_2 = \arcsin\left(\frac{S}{X}\right) \tag{5}$$

se puede escribir la relación (3) como:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\alpha} M \sin(\omega t) d(\omega t) \\
 &+ \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} [K_1 X \sin(\omega t) + M - K_1 \Delta] \sin(\omega t) d(\omega t) \\
 &+ \frac{4}{\pi} \int_{\beta}^{\pi} [K_2 X \sin(\omega t) + M - K_1 \Delta + (K_1 - K_2) S] \sin(\omega t) d(\omega t)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Resolviendo las integrales y evaluando en los límites de integración se obtiene:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{4}{\pi} M + K_2 X - 2K_1 X \frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi} (K_1 - K_2) X \beta \\
 &- \frac{4}{\pi} K_1 \Delta \cos(\alpha) + K_1 \frac{X}{\pi} \sin(2\alpha) + (K_2 - K_1) \frac{X}{\pi} \sin(2\beta) \\
 &+ \frac{4}{\pi} (K_1 - K_2) S \cos(\beta)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Sustituyendo (4) y (5) con (7) y luego dividiendo todo por X se tiene:

$$\begin{aligned}
 N = \frac{B_1}{X} &= \frac{4M}{\pi X} + K_2 - 2 \frac{K_1}{\pi} \arcsin\left(\frac{\Delta}{X}\right) \\
 &- \frac{2K_1}{\pi} \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2} + 2 \frac{K_1 - K_2}{\pi} \arcsin\left(\frac{S}{X}\right) \\
 &+ 2 \frac{K_1 - K_2}{\pi} \frac{S}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{X}\right)^2}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Si se define la siguiente función:

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin(x) + x \sqrt{1 - x^2} \right] \tag{9}$$

donde x debe encontrarse en el intervalo $0 < x < 1$, y además las siguientes variables:

$$\gamma = \frac{K_2}{K_1}, \rho = \frac{\Delta}{S}, \theta = \frac{S}{X}, \mu = \left(\frac{M}{K_1 S}\right), y \cdot \eta = \frac{N}{K_1}$$

la relación (8) toma la forma siguiente,

$$\eta = (1 - \gamma)g\theta - g(\rho\theta) + \gamma + \frac{4}{\pi}(\mu)(\theta) \tag{10}$$

que resultará muy útil en el análisis de la función descriptiva.

4. MÁXIMOS Y MÍNIMOS EN LA FUNCIÓN DESCRIPTIVA

Para encontrar los máximos y mínimos de esta relación es necesario encontrar la primera derivada, igualarla a cero y encontrar las raíces de la misma.

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \left(\frac{4}{\pi}\right)(1-\gamma)\sqrt{1-\theta^2} - \left(\frac{4}{\pi}\right)\sqrt{1-(\rho\theta)^2}\rho + \left(\frac{4}{\pi}\right)\mu = 0 \quad (11)$$

Es evidente que θ en la relación (11) no se puede despejar, luego su valor puede obtenerse mediante la aplicación de dos métodos. El primero consiste en la aplicación de métodos numéricos y el segundo consiste en obtener una solución aproximada mediante un desarrollo en serie de potencias. El segundo método tiene la ventaja que permite ver el comportamiento de diferentes variables en una forma más compacta y es el que será utilizado en el análisis a continuación. Desarrollando (11) en serie de potencias se obtiene:

$$(1-\gamma)\left[1-\frac{1}{2}\theta^2-\frac{1}{8}\theta^4\dots\right] - \rho\left[1-\frac{1}{2}\rho^2\theta^2-\frac{1}{8}\rho^4\theta^4-\dots\right] + \mu = 0 \quad (12)$$

En la mayoría de los casos prácticos la relación S/X es mucho menor que 1, lo que permite despreciar los términos de la serie superiores a θ^4 , luego:

$$\left[1-\gamma-\rho+\mu\right] + \left[\frac{-(1-\gamma)+\rho^3}{2}\right]\theta^2 + \left[\frac{-(1-\gamma)+\rho^5}{8}\right]\theta^4 = 0 \quad (13)$$

Si se hace:

$$z = \theta^2; \quad a = \frac{\gamma-1+\rho^5}{8};$$

$$b = \frac{\gamma-1+\rho^3}{2}; \quad c = \mu - \gamma - \rho + 1$$

entonces:

$$c + bz + az^2 = 0$$

y la solución será:

$$z = -2\frac{(\gamma-1+\rho^3)}{(\gamma-1+\rho^5)} \pm \sqrt{\frac{4(\gamma+\rho^3-1)^2}{(\gamma-1+\rho^5)} - \frac{8(1-\gamma+\mu-\rho)}{(\gamma-1+\rho^5)}} \quad (14)$$

En la gran mayoría de los casos prácticos la relación $\Delta/S < 1$ lo que permite despreciar los términos superiores a ρ^2 . Luego, la gráfica de amplitud de la función descriptiva obtendrá un máximo o un mínimo para el siguiente valor de θ :

$$\theta \approx \sqrt{-2 + \sqrt{12 + 8\left(\frac{\mu-\rho}{1-\gamma}\right)}} \quad (15)$$

Para determinar si en este punto hay un máximo o un mínimo, es necesario evaluar la segunda derivada y determinar el signo de la misma. Entonces derivando (11) con respecto a θ se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} = \left(\frac{4\theta}{\pi}\right) \left[\frac{-(1-\gamma)}{\sqrt{1-\theta^2}} + \frac{\rho^3}{\sqrt{1-(\rho\theta)^2}} \right] \quad (16)$$

En esta expresión el segundo término que contiene a ρ^3 es muy pequeño, para casos reales, por lo tanto la segunda derivada dependerá principalmente del valor de γ . De lo anterior, los sistemas con $\gamma \geq 1$ tendrán un mínimo, aquellos con $\gamma \ll 1$ tendrán un máximo y ambos, tanto el máximo como el mínimo, están ubicados en el punto θ calculado en (15).

5. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DESCRIPTIVA:

Un caso particular muy importante, que se da comúnmente en la práctica es analizar el comportamiento e un amplificador con tres zonas, la primera es una Zona Muerta, la

segunda un nivel de amplificación K1 y la tercera un segundo nivel de amplificación K2 (Caso 6 de la Tabla 1). Lo que corresponde a tener un nivel M=0 ó $\mu=0$ en la ecuación general de la familia. Finalmente, la ecuación general queda de la forma:

$$N = K2 - 2 \frac{K1}{\pi} \arcsin\left(\frac{\Delta}{X}\right) - \frac{2K1}{\pi} \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2} + 2 \frac{K1 - K2}{\pi} \arcsin\left(\frac{S}{X}\right) + 2 \frac{K1 - K2}{\pi} \frac{S}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{X}\right)^2} \quad (16)$$

Aplicando las mismas consideraciones usadas para obtener la relación (15), el módulo de la amplitud tendrá un máximo que cumple con la relación (11) y puede escribirse como:

$$(1 - \gamma)\sqrt{1 - \theta^2} - \rho\sqrt{1 - (\rho\theta)^2} = 0 \quad (17)$$

resolviendo para θ se tiene:

$$\theta = \sqrt{\frac{(1 - \gamma)^2 - \rho^2}{(1 - \gamma)^2 - \rho^4}} \quad (18)$$

Es práctico considerar $\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \gg 1$, en otras palabras $\Delta \ll S$ en el dispositivo a estudiar. Entonces, $\theta \approx 1$, lo que indica que para este caso el punto donde está ubicado el máximo es prácticamente constante, es decir, alrededor de $\theta=1$ y sólo depende levemente de γ y ρ .

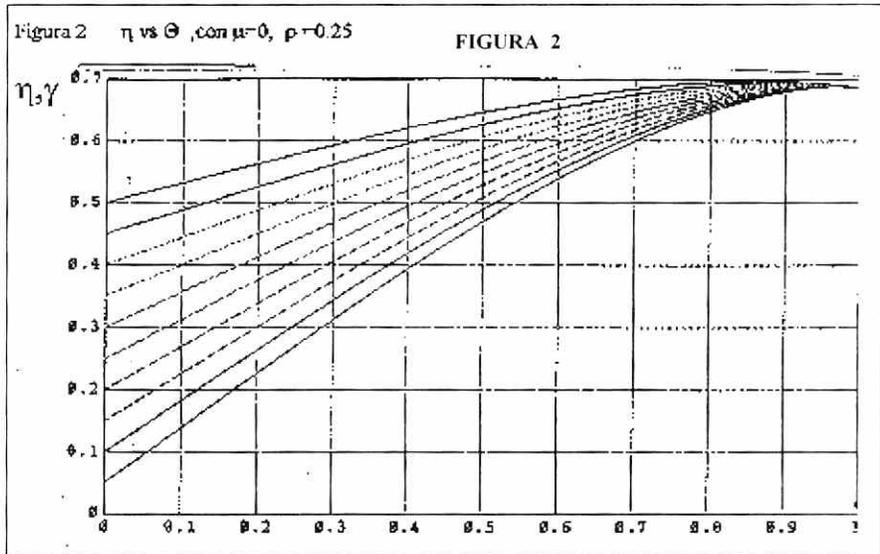
Es posible graficar la relación (10),

$$\eta = (1 - \gamma)g\theta - g(\rho\theta) + \gamma + \frac{4}{\pi}(\mu)(\theta)$$

en un gráfico η vs θ , para diferentes valores de μ , ρ y γ . Como primer caso en la Figura 2, se observa un gráfico, donde se muestra el comportamiento de η vs θ con $\mu=0$, $\rho=0.25$ y γ variable. Los valores de η y γ están tabulados en el eje de las ordenadas. Se puede destacar claramente que el máximo de este juego de curvas está cerca de $\theta=1$.

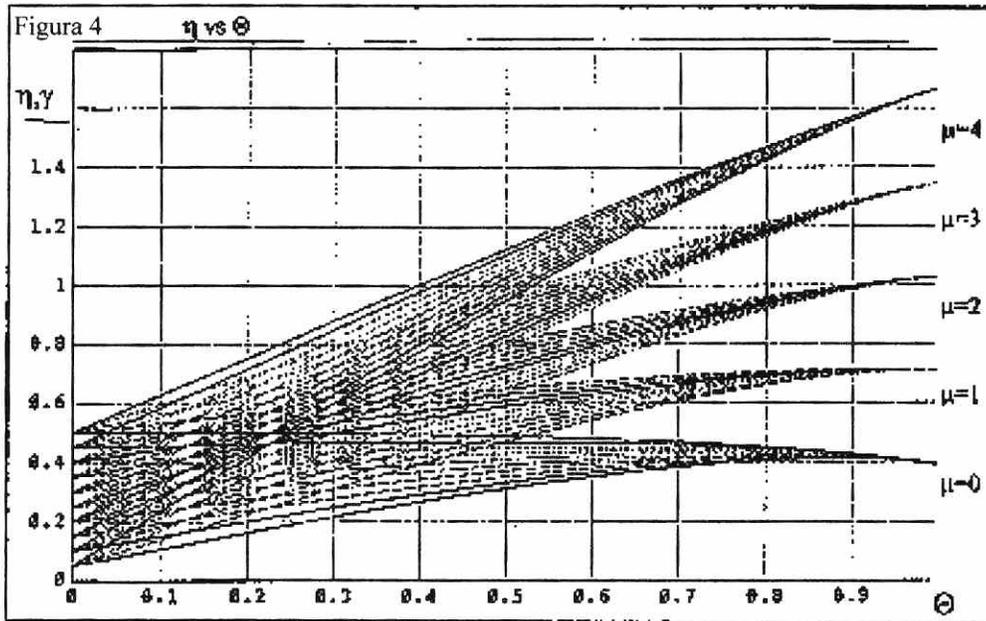
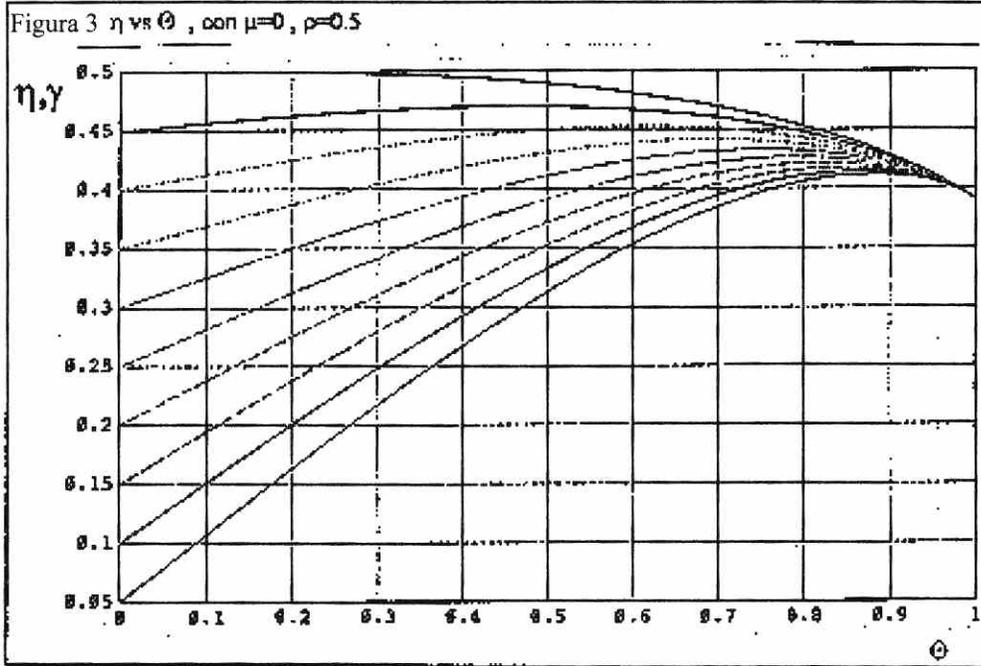
También es posible realizar un gráfico para $\rho=0.5$ manteniendo el resto de los parámetros iguales, como se muestra en la Figura 3. En este caso, puede apreciarse que el máximo de la gráfica de amplitud sufre un leve corrimiento hacia la izquierda, al igual que una disminución de su valor pico.

Sería de interés considerar el efecto de μ sobre las gráficas de amplitud de la función descriptiva. La Figura 4 muestra este efecto. Como es posible observar, al tomar en cuenta el término, $\frac{4}{\pi}(\mu)(\theta)$ se nota un aumento en el valor de pico máximo de la gráfica de amplitud de la función. Si μ es lo suficientemente grande, la relación (10) podría escribirse,



$$\eta \approx \frac{4}{\pi}(\mu)(\theta) \quad (19)$$

y terminaría por ser prácticamente lineal.



6. CONCLUSIONES

En esta contribución se demuestra, que todas las alinealidades estáticas que cumplan con la función estática general (1), pueden estudiarse en una forma más compacta y

presentan un comportamiento más o menos similar dentro de esta familia. Además, es evidente que el estudio de sus funciones descriptivas se facilita utilizando relaciones entre parámetros, por ejemplo ρ y γ en vez de

utilizar dichos parámetros directamente como K_1 , K_2 , Δ y S .

Entre las características más importantes que han sido descubiertas en esta familia, se destacan las siguientes:

- El máximo o mínimo de la gráfica de amplitud de la función descriptiva está ubicado en las cercanías de $\theta = 1$ y su posición es muy levemente afectada por μ , ρ y γ ;
- para $\gamma \geq 1$ se tendrá un máximo y para $\gamma \ll 1$ se tendrá un mínimo alrededor de $\theta = 1$;
- μ y ρ tienen una marcada influencia sobre el valor pico máximo de la función;
- μ influye significativamente, sobre la linealidad de la relación general (10).

En estos análisis se han hecho consideraciones prácticas, con valores de ρ muy pequeños. El análisis puede extenderse para otros valores, utilizando, las relaciones generales (10) y (11), luego los máximos o mínimos de la gráfica de amplitud de la función descriptiva pueden obtenerse a través de métodos numéricos en una computadora.

BIBLIOGRAFÍA

1. K. Ogata. "Ingeniería de Control Moderna". Prentice Hall. México; pp 577-611. 1980.
2. M. Spigel. "Manual y Tablas Matemáticas". McGRAW-HILL. México; pp 110. 1980.