Tecnociencia, Vol. 26, N°1: 176-195
Enero-Junio 2024

ISSN L 2415-0940

FUNCIONES CLASE UNO DE BAIRE

FUNCTIONS OF BAIRE CLASS ONE

Jorge E. Hernández U.
Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento de Matemática, Panamá.
jorgeelizerhernandezurieta@gmail.com https://orcid.org/0000-0003-1153-1918

Ángela Y. Franco
Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento de Matemática, Panamá.
angela.franco@up.ac.pa https://orcid.org/0000-0002-7085-6870

Fecha de recepción: 20 de junio de 2023
Fecha de aceptación: 24 de octubre de 2023

DOI https://doi.org/10.48204/j.tecno.v26n1.a4661

RESUMEN

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, una sucesión de funciones continúas definidas en un intervalo I que converge puntualmente a la función f en I. Es bien conocido que la función f puede o no ser continua en I. Sin embargo, la función f posee algunas propiedades interesantes. El propósito de este artículo es usar esta idea para definir las funciones clase uno de Baire, estudiar sus propiedades algebraicas y probar que el límite uniforme de una sucesión de funciones de clases uno de Baire es también una función clase uno de Baire.

PALABRAS CLAVES

Continuidad, sucesión de funciones continuas, convergencia puntual, convergencia uniforme, funciones clase uno de Baire.

ABSTRACT

Let $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, be a sequence of continuous functions defined on an interval I that converges pointwise to the function f on I. It is well known that the function f could be continuous or not I. However, the

function f have some interesting properties. The purpose of this article is to use this idea in order to define the Baire class one functions, study their algebraic properties and prove that the uniform limit of a sequence of Baire class one functions is also a Baire class one function.

KEY WORDS

Continuity, sequence of continuous functions, pointwise convergence, uniform convergence, Baire class one functions.

INTRODUCCIÓN

El siguiente teorema es un resultado bien conocido en la teoría del análisis real (Barthle, 2014; Rudin, 2016).

Teorema 1 (Convergencia Uniforme y Continua): Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo I, $c \in \mathrm{I}$ y $f: \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Suponga que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en I. Si cada función f_n es continua en c, entonces f es continua en c. Por lo tanto, si cada función f_n es continua en I, entonces f es continua en I.

La pregunta es qué ocurre si la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge sólo puntualmente a f en I. El siguiente ejemplo muestra que la convergencia uniforme es una condición necesaria para que se satisfaga el Teorema 1.

Ejemplo 1: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones continúas definidas en el intervalo $\mathrm{I} = [0,1]$ por

$$f_n(x) = x^n$$

Note que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0, \qquad \text{si } 0 \leq x < 1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 1, \qquad \text{si } x = 1$$

Así pues, la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a la función f en I, donde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,0 \leq x < 1 \\ 1 & ,x = 1 \end{cases}$$

Note que f no es continua en $\mathrm{I} = [0,1]$ y no satisface la propiedad del valor intermedio.

En conclusión, el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es continuo, pero el límite puntual de una sucesión de funciones continuas puede no ser continuo. Sin embargo, las funciones que son límites puntuales de sucesiones de funciones continuas tienen propiedades muy importantes, las cuales se investigarán en este artículo. En particular, se investigará si las funciones clase uno de Baire posee puntos de continuidad.

FUNCIONES CLASE UNO DE BAIRE

Definición 1: Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. f es una función de clase uno de Baire si f es el límite puntual de una sucesión de funciones continúas definidas en $[a,b]$

Ejemplo 2: La función $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,0 \leq x < 1 \\ 1 & ,x = 1 \end{cases}$$

es una función clase uno de Baire, la cual no es continua en $[0,1]$.

Ejemplo 3: Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Considere la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en $[a,b]$ por

$$f_n(x) = f(x), \qquad \text{para todo } n \geq 1,\ x \epsilon [a,b].$$

Luego $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas en $[a,b]$ que converge puntualmente a f en $[a,b]$. Por lo tanto, f es una función clase uno de Baire.

Ejemplo 4: Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $[a,b]$. Se probará que la derivada f' es una función clase uno de Baire en $[a,b]$. En efecto, sin pérdida de generalidad, se supondrá que $f(x) = f(b)$ para todo $x > b$. Para cada $n \epsilon \mathbb{N}$ defina la función $f_n: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{1/_n}$$

Luego, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continúas definidas en $[a, b]$. Además

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{1/_n} = f'(x)$$

Así pues, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a f' en $[a, b]$. Por consiguiente, f' es una función clase uno de Baire en $[a, b]$.

En el siguiente teorema se presentan las propiedades algebraicas de las funciones clase uno de Baire

Teorema 2: Sean f y g funciones de clase uno de Baire en $[a, b]$

i. Kf es una función clase uno de Baire en $[a, b]$, donde $K\epsilon\mathbb{R}$.
ii. $f + g$ es una función clase uno de Baire en $[a, b]$.
iii. fg es una función clase uno de Baire en $[a, b]$.

Demostración:

i. Como f es una función clase uno de Baire en $[a, b]$, existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en $[a, b]$ que converge puntualmente a f en $[a, b]$. Sea $h_n = Kf_n$, entonces $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión de funciones continúas definidas en $[a, b]$ que converge puntualmente a Kf en $[a, b]$. Por consiguiente Kf es una función clase uno de Baire.
ii. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de funciones continúas definidas en $[a, b]$ que convergen puntualmente a f y g, respectivamente, en $[a, b]$. Luego $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continúas definidas en $[a, b]$ y que converge puntualmente a $f + g$ en $[a, b]$. Por lo tanto, $f + g$ es unas funciones clase uno de Baire en $[a, b]$.
iii. Esta demostración es similar a la (ii).

Teorema 3: Sea f es una función clase uno de Baire en $[a, b]$ y $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $\mathbb{R}$. Entonces hof es una función clase uno de Baire en $[a, b]$.

Demostración:

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas en $[a,b]$ que converge puntualmente a f en $[a,b]$. Luego, $\{hof_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continúas definidas en $[a,b]$. Además, como h es continua en $[a,b]$, para cada $x\epsilon[a,b]$, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(hof_n)(x) &= \lim_{n\to\infty} h\big(f_n(x)\big)\\ &= h\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\\ &= h\big(f(x)\big)\\ &= (\ hof\ )(x)\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión de funciones continuas, $\{hof_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a hof en $[a,b]$. Así pues, hof es una función clase uno de Baire en $[a,b]$.

Notación: El conjunto de las funciones clase uno de Baire definidas en el intervalo $[a,b]$ se denota por B_1. Así

$$B_1 = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\ /\ f \text{ es clase uno de Baire en } [a,b]\}$$

Del Ejemplo 3 se tiene que $\mathcal{C}\ ([a,b],\ \mathbb{R}) \subsetneq B_1$, donde $\mathcal{C}\ ([a,b],\ \mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones continúas definidas en $[a,b]$.

Teorema 4: Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función clase uno de Baire en $[a,b]$ y suponga que existe un $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \text{para todo } x\epsilon[a,b]$$

Entonces, existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en $[a,b]$ que converge puntualmente a f en $[a,b]$ y tal que

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \text{para todo } x\epsilon[a,b] \text{ y } n\epsilon\mathbb{N}$$

Demostración:

Sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas definidas en $[a,b]$ que converge puntualmente a f en $[a,b]$. Para cada $n\epsilon\mathbb{N}$ defina la función $f_n: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} -M \ , & si \ \ g_n(x) < -M \\ g_n(x), & si \ \ |g_n(x)| \leq M \\ M, & si \ g_n(x) > M \end{cases}$$

Sea $x\epsilon[a,b]$. Si $g_n(x) < -M$, entonces como f es continua en x, existe un $\delta > 0$ tal que $g_n(y) < -M$, para todo $y\epsilon(x-\delta, \ x+\delta) \cap [a,b]$. Por lo tanto, $f_n(y) = -M$ para todo $y\epsilon(x-\delta, \ x+\delta) \cap [a,b]$; lo cual implica que f_n es continua en x. El mismo resultado se obtiene si $g_n(x) > M$. Suponga que $|g_n(x)| < M$. Luego, como g_n es continua en x, existe un $\delta > 0$ tal que $|g_n(x)| < M$ para todo $y\epsilon(x-\delta, \ x+\delta) \cap [a,b]$. Por lo tanto $f_n(y) = g_n(y)$ para todo $y\epsilon(x-\delta, \ x+\delta) \cap [a,b]$. Como g_n es continua en x, se tiene que f_n es continua en x. Suponga que $g_n(x) = -M$. Sea $0 < \varepsilon < \frac{M}{4}$. Como g_n es continua en x, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|g_n(y) - g_n(x)| < \ \mathcal{E} \text{ siempre que } y\epsilon(x-\delta, \ x+\delta) \cap [a,b].$$

O sea

$$|g_n(y) + M| < \ \mathcal{E} < \frac{M}{4}, \ \text{ siempre que } y\epsilon(x-\delta, \ x+\delta) \cap [a,b].$$

Sea $y\epsilon(x-\delta, \ x+\delta) \cap [a,b]$. Note que $g_n(y) \leq -M$

- Si $g_n(y) \leq -M$, entonces
$$|f_n(y) - f_n(x)| = |-M + M| = 0 < \varepsilon$$
- Si $|g_n(y)| < M$, entonces
$$|f_n(y) - f_n(x)| = |g_n(y) - g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Por consiguiente, f_n es continua en x.
El mismo resultado se obtiene si $g_n(x) = M$.
En conclusión, se tiene que f_n es continua en $[a,b]$, para todo $n \geq 1$. Así, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continúas definidas en $[a,b]$ y tal que $|f_n(x)| \leq M$, para todo $x\epsilon[a,b]$ y $n \geq 1$.

Sea $x\epsilon[a,b]$, entonces por hipótesis $|f(x)| \leq M$

- Suponga que $|f(x)| < M$. Como

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$$

Se tiene que existe un $N_1 \geq 1$ tal que $|g_n(x)| < M$, para todo $n \geq N_1$. Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>N_1}} f_n(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>N_1}} g_n(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$$

- Si $f(x) = -M$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = -M$$

Luego existe un $N_1 \geq 1$ tal que $f_n(x) = g_n(x)$ ó $f_n(x) = -M$, para todo $n \geq N_1$. Por lo tanto,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq N_1}} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Así pues, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas convergente puntualmente a f en $[a,b]$ tal que cada f_n es acotado por M.

Teorema 5: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones clase uno de Baire en $[a,b]$ y sea $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ una serie de números reales positivos convergentes. Si $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $n \geq 1$ y $x\epsilon[a,b]$, entonces la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es una función clase uno de Baire en $[a,b]$.

Demostración:

Por el M-test de Weierstrass (Bressoud, 2007; Schramm, 2008), la función f está bien definida en $[a,b]$. Para cada $n \geq 1$ existe una sucesión $\{g_m^n\}_{m=1}^{\infty}$ de funciones continuas que converge puntualmente a f_n en $[a,b]$. Por el Teorema 4 se puede suponer que $|g_m^n(x)| \leq M_n$ para todo $m \geq 1$ y $x\epsilon[a,b]$. Para cada $n \geq 1$ defina la función

$$h_n = g_n^1 + g_n^2 + \cdots + g_n^n$$

Note que $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continúas definidas en $[a,b]$.

Sea $x\epsilon[a,b]$ y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe un entero positivo N_1 tal que

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$$

Existe un $N \geq N_1$ tal que

$$\left|g_i^K(x) - f_K(x)\right| < \frac{\varepsilon}{N_1}, \text{ para todo } 1 \leq K \leq N_1, \quad i \geq N.$$

Sean $n \geq N$, entonces

$$\begin{aligned} |h_n(x) - f(x)| &= \left|\sum_{K=1}^{n} g_n^K(x) - \sum_{K=1}^{\infty} f_K(x)\right| \\ &\leq \sum_{K=1}^{N_1} |g_n^K(x) - f_K(x)| + \sum_{K=N_1+1}^{n} |g_n^K(x)| + \sum_{K=N_1+1}^{\infty} |f_K(x)| \\ &< \sum_{K=1}^{N_1} \left(\frac{\varepsilon}{N_1}\right) + \sum_{K=N_1+1}^{n} M_k + \sum_{K=N_1+1}^{\infty} M_k \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

Por consiguiente, la sucesión $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $f(x)$ en $[a,b]$. Esto implica que f es una función clase uno de Baire en $[a,b]$.

Teorema 6: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones clase uno de Baire en $[a,b]$, si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en $[a,b]$, entonces f es una función clase uno de Baire en $[a,b]$.

Demostración:
Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f en $[a,b]$, existe un número natural n_1 tal que

$$\left|f_{n_1}(x) - f(x)\right| < \frac{1}{2}, \quad \text{para todo} \quad x\epsilon[a,b]$$

De igual manera existe un número natural $n_2 > n_1$ tal que

$$\left|f_{n_2}(x) - f(x)\right| < \tfrac{1}{2^2}, \quad \text{para todo} \quad x\epsilon[a,b]$$

Continuando con este proceso, se obtiene una subsucesión $\left\{f_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| < \tfrac{1}{2^k}, \quad \text{para todo} \quad x\epsilon[a,b]$$

Note que

$$\begin{aligned}\left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| &\leq \left|f_{n_{k+1}}(x) - f(x)\right| + \left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| \\ &< \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} \\ &< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left\{f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones de clase uno de Baire en $[a,b]$ tal que

$$\left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| < M_k = \tfrac{1}{2^{k-1}}, \quad \text{para todo } x\epsilon[a,b]$$

$$\sum_{K=1}^{\infty} M_k = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < \infty$$

Note además que

$$\begin{aligned}\sum_{K=1}^{\infty}\left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right)(x) &= \lim_{p\to\infty}\sum_{K=1}^{p}\left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right) \\ &= \lim_{p\to\infty}\left(f_{n_{p+1}}(x) - f_{n_1}(x)\right) \\ &= f(x) - f_{n_1}(x)\end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 5, $f - f_{n_1}$ es una función clase uno de Baire en $[a, b]$. Finalmente, por el Teorema 2, la función $f = \left(f - f_{n_1}\right) + f_{n_1}$ es una función clase uno de Baire en $[a, b]$.

Ejemplo 5: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones definidas en el intervalo $[0,1]$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & si \quad x \geq \dfrac{1}{n} \\ n^2 x, & si \quad 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Note que cada función f_n es continua en $[0,1]$ y

- Si $0 < x \leq 1$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$
- Si $x = 0$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$

Así pues, la sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a la función f en $[0,1]$, donde

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 0, & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, f es una función clase uno de Baire en $[0,1]$; sin embargo f no es acotada en $[0,1]$.

Teorema 7: Sea $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $(a, b]$ (respectivamente en $[a, b)$). Entonces f es una función clase uno de Baire en $[a, b]$.

Demostración:

Sea N un número natural tal que $\frac{1}{N} < b - a$. Para cada número natural $n \geq N$ defina la función $f_n: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & si \quad a + \dfrac{1}{n} < x \leq b \\ n\left[f\left(a + \dfrac{1}{n}\right) - f(a)\right](x - a) + f(a), & si \quad a \leq x \leq a + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Note que $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continúas definidas en $[a,b]$ que converge puntualmente a f en $[a,b]$. Por lo tanto, f es una función clase uno de Baire. El caso $[a,b)$ se prueba de manera similar.

Teorema 8: Sean $f:[a,c]\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:[c,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones clase uno de Baire en $[a,c]$ y $[c,b]$, respectivamente tales que $f(c)=g(c)$. Considere la función $h:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & a\le x\le c \\ g(x), & c\le x\le b \end{cases}$$

Entonces h es una función clase uno de Baire en $[a,b]$

Demostración:

Existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en $[a,c]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x), \qquad \text{para todo } \; x\epsilon[a,c]$$

De igual manera, existe una sucesión de funciones continuas $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en $[c,b]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x), \qquad \text{para todo } \; x\epsilon[c,b]$$

Sea N un número natural tal que $a<c-\frac{1}{N}<c<c+\frac{1}{N}<b$. Para cada número natural $n\ge N$ defina la función $h_n:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$h_n(x)=\begin{cases} f_n(x), & si \;\; a\le x\le c-\dfrac{1}{n} \\ n\left[f(c)-f_n\left(c-\dfrac{1}{n}\right)\right](x-c)+f(c), & si \;\; c-\dfrac{1}{n}<x\le c \\ n\left[g_n\left(c+\dfrac{1}{n}\right)-g(c)\right]\left(x-c-\dfrac{1}{n}\right)+g\left(c+\dfrac{1}{n}\right), & si \;\; c<x<c+\dfrac{1}{n} \\ g_n(x), & si \;\; c+\dfrac{1}{n}\le x\le b \end{cases}$$

Note que $\{h_n\}_{n=N}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas definidas en $[a,b]$ y

- Si $a\le x\le c$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=h(x)$

- Si $c \leq x \leq b$, entonces $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) = h(x)$
- Si $x = c$, entonces $\lim_{n\to\infty} h_n(c) = \lim_{n\to\infty} f(c) = \lim_{n\to\infty} g(c) = h(c)$, ya que $f(c) = g(c)$; o sea que $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f en $[a,b]$.

Así pues, h es una función clase uno de Baire en $[a,b]$.

Teorema 9: Sea $c\epsilon(a,b)$ y $h: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b] - \{c\}$. Entonces, h es una función clase uno de Baire en $[a,b]$.

Demostración:

Sea $f: [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ la restricción de h a $[a,c]$ y $g: [c,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la restricción de h a $[c,b]$. Por lo tanto f es continua en $[a,c)$ y g es continuas $(c,b]$. Luego, por el Teorema 7, f es una función clase uno de Baire en $[a,c]$ y g es una función clase uno de Baire en $[c,b]$.

Note que

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq c \\ g(x), & c \leq x \leq b \end{cases}$$

por consiguiente, por el Teorema 8, h es una función clase uno de Baire en $[a,b]$.

Como una consecuencia de los Teoremas 7,8,9 se obtiene el siguiente resultado

Teorema 10: Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $Dc(f) = \{x\epsilon[a,b] / f$ es discontinua en $x\}$. Si $Dc(f)$ es finito, entonces, f es una función clase uno de Baire en $[a,b]$.

Demostración:

Solo hay que aplicar los Teoremas 7,8,9 repetitivamente.

Ejemplo 6: Recuerde que una función $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalonada si existe un conjunto finito $\{ J_k: 1 \leq k \leq n\}$ de intervalos disjuntos, posiblemente degenerados, tal que $[a,b] = \cup_{k=1}^{n} J_k$ y, f es constante en cada J_k.

Como $Dc(f)$ es un conjunto finito, por el Teorema 10, f es una función clase uno de Baire en $[a,b]$.

Ejemplo 7: Considere la función de Johannes Thomae (Dunham,2005) $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q}, & si\ x = \dfrac{p}{q}\ ,\ \ (p,q) = 1 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$$

Se sabe que $Dc(f) = \mathbb{Q} \cap (0,1]$, el cual es un conjunto infinito enumerable. Así, se puede escribir

$$Dc(f) = \mathbb{Q} \cap (0,1] = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$$

Para cada número natural n defina la función $f_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(r_k), & si \quad x = r_k,\ \ k = 1,2,\ldots,\ \ n \\ 0\ \ , & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Note que $Dc(f_n) = \{r_1, r_2, , \ldots, r_n\}$. Luego, por el Teorema 10 f_n es una función clase uno de Baire en [0,1]. Se probará que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en [0,1]. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Luego, por la propiedad arquimedeana existe un número natural N_1 tal que $\frac{1}{N_1} < \varepsilon$. Sólo hay un número finito de números racionales con denominadores menores que N_1. Por lo tanto, existe un número natural $N > N_1$ tal que

$$f(r_k) < \frac{1}{N_1} < \varepsilon, \qquad \text{para todo} \qquad k \geq N$$

- Si $x = 0$, entonces $f(x) = f(0) = f_n(0) = 0$ para todo $n \geq 1$. Por lo tanto

$$|f_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon, \qquad \text{para todo} \quad n\epsilon\mathbb{N}$$

- Si $x\epsilon[0,1] - \mathbb{Q}$, entonces $f_n(x) = f(0) = 0$ para todo $n \geq 1$. Por lo tanto

$$|f_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon, \qquad \text{para todo} \quad n\epsilon\mathbb{N}$$

- Supongamos que $x\epsilon\mathbb{Q} \cap (0,1]$. Entonces, existe un $k\epsilon\mathbb{N}$ tal que $x = r_k$. Luego, si $n \geq N$ se tiene que

$$f_n(x)=f_n(r_k) = f(r_k) = f(x), \quad \text{si } k \leq n$$

Si $k > n$, entonces

$$f_n(x)=f_n(r_k) = 0 \quad \text{y} \quad f(x) = f(r_k) = \frac{1}{q}, \quad \text{donde, } x = r_k = \frac{p}{q}, \ (p,q) = 1$$

Luego

$$|f_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon, \quad \text{si} \quad k \leq n$$

$$|f_n(x) - f(x)| = f(r_k) < \varepsilon, \quad \text{si } k > n > N$$

Así pues,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } x\epsilon[0,1] \text{ y } \quad n \geq N$$

Lo que implica que la sucesión de funciones clase uno de Baire $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en $[0,1]$. Finalmente, por el Teorema 6, f es una función clase uno de Baire en $[0,1]$.

Observación: Si en lugar de definir $f(0) = 0$ en el Ejemplo 7, se define $f(0) = p$, $p\epsilon\mathbb{R}$, $p \neq 0$. Entonces

$$Dc(f) = \mathbb{Q} \cap [0,1] \quad \text{y } D(f) = \mathrm{I}_r \cap [0,1]$$

y f es una función clase uno de Baire en $[0,1]$. La demostración es prácticamente igual a la del Ejemplo 7.

Ejemplo 8: Sea E un subconjunto cerrado, nunca denso (o sea que $E = \bar{E}$ no contiene intervalos abiertos) del intervalo $[a,b]$ tal que $a, b\epsilon E$. Como $[a,b] - E$ es un conjunto abierto y no vacío de número reales, él se puede expresar como

$$[a,b] - E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

donde los intervalos (a_n, b_n) son disjuntos dos a dos.

Para cada $n\epsilon\mathbb{N}$ tome $c_{n=}\frac{a_n+b_n}{2}$ y sea $\{z_n\}$ una sucesión de números reales.

Defina la función $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

- $f(x) = 0$, para todo $x\epsilon E$
- $f(c_n) = z_n$, para todo $n\epsilon\mathbb{N}$
- f es lineal en $[a_n, c_n]$ y $[c_n, b_n]$; o sea que f conecta los puntos $\left(a_n, f(a_n)\right)$, $\left(c_n, f(c_n)\right)$ con un segmento y los puntos $\left(c_n, f(c_n)\right)$, $\left(b_n, f(b_n)\right)$ con un segmento.

Note que $a_n, b_n\epsilon E$, para todo $n\epsilon\mathbb{N}$. Por lo tanto, $f(a) = f(a_n) = f(b_n) = f(b) = 0$, para todo $n\epsilon\mathbb{N}$. Luego, por la definición de f, se tiene que $|f(x)| \leq |f(c_n)| = |z_n|$ para todo $x\epsilon(a_n, b_n)$. Además, $f(x) > 0$ para todo $x\epsilon(a_n, b_n)$ si $z_n > 0$; $f(x) < 0$ para todo $x\epsilon(a_n, b_n)$ si $z_n < 0$ y $f(x) = 0$ para todo $x\epsilon[a_n, b_n]$ si $z_n = 0$.

Sean $c, d\epsilon[a, b]$ tal que $f(c) < k < f(d)$.

Supongamos que $c\epsilon E$, entonces $f(c) = 0 < k < f(d)$. Esto implica que $d \notin E$; por lo tanto, existe un $n\epsilon\mathbb{N}$ tal que $d\epsilon(a_n, b_n)$. Luego, $f(a_n) = 0 < k < f(d)$. Por la definición de f, se tiene que $f(a_n) = 0 < k < f(d) \leq f(c_n) = z_n$. Por la linealidad de f en $[a_n, c_n]$, se tiene que existe un $x\epsilon(a_n, c_n)$ tal que $f(x) = k$.

Igual resultado se obtiene si $d\epsilon E$. Así que suponga que $c, d \notin E$. Luego existen $m, n\epsilon\mathbb{N}$ tal que $c\epsilon(a_m, b_m)$ y $d\epsilon(a_n, b_n)$.

- Si $z_m = 0$, entonces $f(c) = 0 = f(a_n) < k < f(d) \leq z_n = f(c_n)$ por la linealidad de f en $[a_n, c_n]$, se tiene que existe un $x\epsilon(a_n, c_n)$ tal que $f(x) = k$.
- Un resultado similar al anterior se obtiene si se supone que $z_n = 0$.
- Suponga que $z_m > 0$, entonces $0 \leq f(c) < k < f(d)$. Por lo tanto, $f(a_n) = 0 < k < f(d) \leq f(c_n)$. Luego, por la linealidad de f en $[a_n, c_n]$, se tiene que existe un $x\epsilon(a_n, c_n)$ tal que $f(x) = k$.
- Un resultado similar al anterior se obtiene si se supone que $z_n < 0$.
- Suponga que $z_m < 0 < z_n$. Si $k = 0$, entonces $f(a_m) = k = 0$. Si $k < 0$, entonces $f(c_m) = z_m \leq k < 0 = f(b_m)$. Por la linealidad de f en $[c_m, b_m]$, existe un $x\epsilon[c_m, b_m)$ tal que $f(x) = k$.

Así, en cualquier caso, existe un $x \epsilon (a, b)$ tal que $f(x) = k$. Por consiguiente f tiene la propiedad del valor intermedio en $[a, b]$.
Se probará que f es una función clase uno de Baire en $[a, b]$. En efecto, para cada $n \epsilon \mathbb{N}$ defina la función $f_n: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & si \quad x = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \\ 0 \quad , & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

- Sea $x \epsilon E$, entonces $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$. Esto implica que $f_n(x) = 0$, para todo $n \epsilon \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$$

- Sea $x \epsilon [a, b] - E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$. Entonces existe un $n_0 \epsilon \mathbb{N}$ tal que $x \epsilon \left(a_{n_0}, b_{n_0}\right)$. Luego $f_n(x) = f(x)$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \geq n_0}} f_n(x) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \geq n_0}} f(x) = f(x)$$

Así pues, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f en $[a, b]$. Por otro lado, por la definición de f_n, se tiene que cada f_n es continua en $[a, b]$. En conclusión, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a f en $[a, b]$. Por consiguiente, f es una función clase uno de Baire en $[a, b]$.

Finalmente, se probará que f es continua en $[a, b]$ sí, y sólo sí, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a cero.

- Suponga que f es continua en $[a, b]$ y que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a cero. Luego existe un $\mathcal{E}_0 > 0$ y una subsucesión $\left\{z_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$(*) \qquad \left|z_{n_k}\right| > \mathcal{E}_0, \quad \text{para todo } k \epsilon \mathbb{N}$$

Como $c_{n_k} \epsilon [a, b]$ para todo $k \epsilon \mathbb{N}$, existe una subsucesión $\left\{c_{n_{k_j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$ de $\left\{c_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{j \to \infty} c_{n_{k_j}} = c \epsilon [a, b]$$

Suponga que $c \notin E$, entonces existe un $m\epsilon\mathbb{N}$ tal que $c\epsilon(a_m, b_m)$. Sea

$$\delta_0 = \frac{1}{2} min\,\{c - a_m, b_m - c\} > 0$$

Como los intervalos abiertos (a_n, b_n) son disjuntos dos a dos, se tiene que

$$\left|c_{n_{k_j}} - c\right| \geq \delta_0, \qquad \text{para todo } n_{k_j} > m$$

lo que contradice que $\left\{c_{n_{k_j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$ converge a c. Así pues, $c\epsilon E$.

Por otro lado, como f es continua en c, se tiene que

$$0 = f(c) = f\left(\lim_{j\to\infty} c_{n_{k_j}}\right) = \lim_{j\to\infty} f\left(c_{n_{k_j}}\right) = \lim_{j\to\infty} z_{n_{k_j}}$$

Lo que contradice $(*)$. Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

- Suponga ahora que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

Por la definición de f, se tiene que f es continua en $\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$. Sea $x\epsilon E$ y $\mathcal{E} > 0$. Entonces $f(x) = 0$ y existe un número natural N tal que

$$|z_n| < \mathcal{E}, \text{ para todo } \quad n \geq N$$

Luego, por la definición de f, se tiene que

$$|f(y)| \leq |z_n| < \mathcal{E}, \text{ para todo } \quad y\epsilon \bigcup_{n=N}^{\infty}(a_n, b_n)$$

Por lo tanto,

$$|f(y) - f(x)| = |f(y)| < \mathcal{E}, \text{ para todo } \quad y\epsilon \bigcup_{n=N}^{\infty}(a_n, b_n)$$

Por otro lado, como $f(a_n) = f(b_n) = 0$ para todo $n\epsilon\mathbb{N}$, por la definición de f, existe un $\delta > 0$ tal que $a_n + \delta < b_n$, $a_n < b_n - \delta$ y

$$|f(y)| < \mathcal{E}, \quad \text{para todo} \quad y\epsilon\left(\bigcup_{n=1}^{N-1}(a_n, a_n + \delta)\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{N-1}(b_n - \delta, b_n)\right)$$

Suponga que $|x-y|<\delta, \quad y\epsilon \bigcup_{n=1}^{N-1}(a_n,b_n)$. Luego existe un $n_0, \ 1\leq n_0\leq N-1$ tal que $y\epsilon\left(a_{n_0},b_{n_0}\right)$. Por lo tanto $y\epsilon\left(a_{n_0},a_{n_0}+\delta\right)$ ó $y\epsilon\left(b_{n_0-\delta},b_{n_0}\right)$. Esto implica que

$$|f(y)-f(x)|=|f(y)|<\mathcal{E}$$

Finalmente, si $y\epsilon E$, entonces

$$|f(x)-f(y)|=0$$

Se ha probado así, que existe un $\delta>0$ tal que

$$|f(x)-f(y)|<\mathcal{E}, \quad \text{siempre que } |y-x|<\delta, \ y\epsilon[a,b].$$

Esto implica que f es continua en $x\epsilon E$. En conclusión, f es continua en $[a,b]$.

CONCLUSIONES

1. Dada una sucesión de funciones continuas $f_n: I\to\mathbb{R}$ y $f: I\to\mathbb{R}$ una función; si la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en I, entonces la función f es continua en I. Sin embargo, si la convergencia es puntual en I no se puede asegurar que f es continua en I (Folland, 2007; Gordon, 2001).
2. Toda función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[a,b]$. Por lo tanto, $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \subsetneq B_1$.
3. Del Teorema 2 se deduce que B_1 es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Además, $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ es un subespacio de B_1.
4. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función de clase uno de Baire acotada en $[a,b]$ y si $|f(x)|\leq M$, para todo $x\in[a,b]$ entonces existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en $[a,b]$ que converge puntualmente a f en $[a,b]$ y tal que $|f_n(x)|\leq M$ para todo $x\in[a,b]$ y $n\in\mathbb{N}$.

5. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones clase uno de Baire en $[a,b]$ que converge uniformemente a la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ en $[a,b]$, entonces f es también una función clase uno de Baire en $[a,b]$.
6. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función tal que el conjunto $Dc(f)=\{x\epsilon[a,b]/\, f$ es discontinua en $x\}$ es finito, entonces f es una función clase uno de Baire en $[a,b]$.
7. Un resultado fundamental del análisis real es que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continúas definidas en un intervalo $I=[a,b]$ que converge puntualmente a la función $f:I\to\mathbb{R}$, entonces el conjunto $C_f=\{x\in I : f \text{ es continua en } x\}$ es denso en I. Por consiguiente, si $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua clase uno de Baire, entonces g es continua en un subconjunto denso de $[a,b]$(Gordon, 2001; Natanson, 2016; Olmsted, 2009).

REFERENCIAS

Barthle, D. R., & Sherbert, R. G (2014). Introduction to Real Analysis. John Wiley & Sons.

Bressoud, D. M. (2007). A Radical Approach to Real Analysis. 2nd Edition, (Mathematical Association of America Textbooks). The Mathematical Association of America.

Dunham, W. (2005). The Calculus Gallery; Masterpieces from Newton to Lebesgue. Princeton University Press.

Folland, G. B. (2007). Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. Wiley. USA.

Gordon, R. A. (2002). Real Analysis. A First Course. Addison Wesley. USA.

Natanson, I. R. (2016). Theory of Functions of Real Variable. Volume I. Dover Publications, Inc. USA.

Olmsted, J. M. H. (2009). Advanced Calculus. American Mathematical Society. USA.

Rudin, W. (2016). Principles of Mathematical Analysis. McGraw - Hill.

Schramm, M. J. (2008). Introduction to Real Analysis. Dover.