12

Tecnociencia, Vol. 26, N°1: 216-230
Enero-Junio 2024
ISSN L 2415-0940

FUNCIONES CONTINUAS Y NO DIFERENCIABLES EN TODO PUNTO

CONTINUOUS NOWHERE DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Eric Hidalgo G.
Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática, Panamá.
eric.hidalgo@up.ac.pa https://orcid.org/0009-0001-4523-4439

Ángela J. Franco.
Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento de Matemática, Panamá.
angela.franco@up.ac.pa https://orcid.org/0000-0002-7085-6870

Fecha de recepción: 20 de junio de 2023
Fecha de aceptación: 2 de noviembre de 2023

DOI https://doi.org/10.48204/j.tecno.v26n1.a4666

RESUMEN

Desde los cursos de cálculo diferencial se sabe que una función continua no necesita ser diferenciable; sin embargo, se tiene la idea errónea que una función continua tiene que ser diferenciable en muchos puntos. Con la idea de corregir este error, en el presente artículo se construye un ejemplo de una función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ que es continua y no diferenciable en todo punto X de $\mathbb{R}$. También se prueba que el conjunto de puntos de continuidad de la derivada de una función diferenciable es enumerable. Además, se presenta un ejemplo de una función diferenciable cuyo conjunto de discontinuidad de la derivada es denso.

PALABRAS CLAVES

Convergencia puntual, convergencia uniforme, conjunto de continuidad, no diferenciable en todo punto, conjunto denso.

ABSTRACT

From differential calculus courses it is known that a continuous function need not be differentiable; however, there is a mistaken idea that a continuous function must be differentiable at many points. With the idea of correcting this misconception, in this paper an example of a function $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ that is continuous and nowhere differentiable in $\mathbb{R}$ is constructed. It is also proved that the set of point where the derivate of a differentiable function is continuous is enumerable. Furthermore, an example of a differentiable function whose set of discontinuity of the derivate is dense.

KEY WORDS

Pointwise convergence, uniform convergence, set of continuity, nowhere diffentiable, dense set.

INTRODUCCIÓN

Después del descubrimiento del cálculo diferencial e integral por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), los matemáticos de la época comúnmente creían que las funciones continuas poseían derivada en una cantidad significativa de puntos. Esta creencia fue fortalecida por una "demostración" de este hecho presentada por el físico matemático francés André - Marie Ampére (1775-1836), en su artículo de 1806 titulado "Recherches sur quelques points de la theórie des functions derivées qui corduisenta une nouvelle demonstration de la serie de Taylor". En una demostración típica de su época, el argumento de Ampere no fue escrito en una forma rigurosa como se exige hoy en día. (Dunham, 2018; Edward, 1994).

Probablemente el primer ejemplo de una función continua y no diferenciable en todo punto de un intervalo fue presentado por el matemático checo Bernard Bolzano (1781-1848) alrededor de los años 1830, pero no fue publicado hasta un siglo después.

En 1872 el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) presentó a la academia de ciencias de Berlín un ejemplo de una función continua que no es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}$, el cual tuvo un gran impacto en el crecimiento del rigor de las demostraciones matemáticas, introducido a finales del siglo XIX y en el siglo XX. Estos tipos de funciones fueron bautizadas con el nombre de monstruos de Weierstrass (W-monstruo) por el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912). (Ciesielski, 2022; Ciesielski, 2018; Jarnicki, 2015).

Motivado por el impacto que han tenido este tipo de funciones (W-monstruos) en la matemática, en este artículo se construye una función continua y no diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}$. Por otro lado, se prueba que el conjunto de continuidades de la derivada de una función diferenciable es denso y no enumerable, a pesar de que el conjunto de discontinuidades también puede ser denso.

PRELIMINARES

En esta sección se presentan algunas definiciones y conceptos que aparecen en el desarrollo del artículo; sin embargo, para evitar que la discusión sea muy larga, sólo se presentarán los conceptos más trascendentes para la compresión y desarrollo de los temas expuestos. (Folland, 2007; Gordon, 2001).

Definición 1: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. La sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$converge puntualmente a la función f en I si la sucesión $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$ para todo $x \in I$. Es decir, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in I$.

La convergencia es uniforme si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número entero positivo N tal que para todo $x \in I$

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \text{, siempre que } n \geq N$$

Es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \left| f_n(x) - f(x) \right| = 0$$

Definición 2: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente (uniformemente) a f en I si la correspondiente sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \right\}$ converge puntualmente (uniformemente) a f en I.

Teorema 1 (M-test de Weierstrass): Sea $\left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo I de $\mathbb{R}$ y suponga que $\left| f_n(x) \right| \leq M_n$ para todo $x \in I$. Si la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en I.

Teorema 2 (Convergencia uniforme y continuidad): Sea $\left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas definidas en un intervalo I en $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.

a) Si la sucesión $\left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en I, entonces f es continua en I.
b) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a f en I, entonces f es continua.

Teorema 3: Sea $\left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas en un intervalo I de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si la sucesión $\left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f en I, entonces el conjunto $C_f = \left\{ x \in I : f \text{ es continua en } x \right\}$ es denso en I.

DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES CONTINUAS

Los estudiantes que han completado los cursos de cálculo diferencial e integral al igual que los matemáticos del siglo XIII no están conscientes del hecho contraintuitivo que, una función continua puede ser no diferenciable en todo punto $x \in \mathbb{R}$. En esta sección se construye una función continua y no diferenciable en todo punto $x \in \mathbb{R}$.

En efecto, sean a, b números reales positivos. Para cada número entero no negativo n defina la función $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = a^n \cos\left(b^n \pi x\right)$$

Note que f_n es continua en $\mathbb{R}$ y

$$\left| f_n(x) \right| = \left| a^n \cos\left(b^n \pi x\right) \right| \leq a^n$$

Supongamos que $0 < a < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} < 1$. Luego, por el M-test de Weierstrass, la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a una función $W(x)$ en $\mathbb{R}$, o sea

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right)$$

Por otro lado, como las funciones f_n son continuas, por el teorema de convergencia uniforme y continuidad, W es continua en $\mathbb{R}$. Denote

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a^j \cos\left(b^j \pi x\right)$$

entonces la sucesión de funciones $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a W y cada función W_n es diferenciable en $\mathbb{R}$.

¿Qué se puede decir sobre la diferenciabilidad de la función W?

Sea x_0 un punto arbitrario pero fijo de $\mathbb{R}$. Para cada número entero positivo m existe un número entero β_m tal que

$$\left[\frac{1}{2} + b^m x_0,\ \frac{3}{2} + b^m x_0\right) \cap \mathbb{Z} = \{\beta_m\}$$

Luego,

$$\frac{1}{2} + b^m x_0 \leq \beta_m < \frac{3}{2} + b^m x_0 \qquad , \beta_m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2} \leq \beta_m - b^m x_0 < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2b^m} \leq \frac{\beta_m}{b^m} - x_0 < \frac{3}{2b^m}$$

de donde

$$\frac{\beta_m}{b^m}-\frac{3}{2b^m}<x_0 \qquad \text{y} \qquad x_0\le\frac{\beta_m}{b^m}-\frac{1}{2b^m}$$

o sea

$$x_0\in\left(\frac{\beta_m}{b^m}-\frac{3}{2b^m},\ \ \frac{\beta_m}{b^m}-\frac{1}{2b^m}\right] \qquad , \quad \beta_m\in\mathbb{Z}$$

Denote

$$\alpha_m=\frac{\beta_m}{b^m}$$

Suponga que $b>1$, entonces

$$0=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2b^m}\right)\le\lim_{m\to\infty}\left(\alpha_m-x_0\right)\le\lim_{m\to\infty}\left(\frac{3}{2b^m}\right)=0$$

de donde

$$\lim_{m\to\infty}\ \alpha_m=x_0$$

Suponga que W es diferenciable en x_0, entonces

$$\lim_{m\to\infty}\frac{W\left(\alpha_m\right)-W\left(x_0\right)}{\alpha_m-x_0}=W'\left(x_0\right)$$

Considere el límite

$$\lim_{m\to\infty}\left(-1\right)^{\beta_m}\left[\frac{W\left(\alpha_m\right)-W\left(x_0\right)}{\alpha_m-x_0}\right]$$

Note que

$$(-1)^{\beta m}\left[\frac{W(\alpha_m)-W(x_0)}{\alpha_m - x_0}\right] = (-1)^{\beta m}\left[\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi \alpha_m\right) - \sum_{n=0} a^n \cos\left(b^n \pi x_0\right)}{\alpha_m - x_0}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\beta_m} a^n \left(\frac{\cos\left(b^n \pi \alpha_m\right) - \cos\left(b^n \pi x_0\right)}{\alpha_m - x_0}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^{\beta_m} a^n \left(\frac{\cos\left(b^n \pi \alpha_m\right) - \cos\left(b^n \pi x_0\right)}{\alpha_m - x_0}\right) +$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{\beta_m} a_n \left(\frac{\cos\left(b^n \pi \alpha_m\right) - \cos\left(b^n \pi x_0\right)}{\alpha_m - x_0}\right)$$

$$= F_m + G_m$$

Para F_m se tiene que

$$F_m = \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^{\beta_m} a^n \left(\frac{\cos\left(b^n \pi \alpha_m\right) + \cos\left(b^n \pi x_0\right)}{\alpha_m - x_0}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^{\beta_m} (ab)^n \pi \left(\frac{\cos\left(b^n \pi \alpha_n\right) - \cos\left(b^n \pi x_0\right)}{b^n \pi \alpha_n - b^n \pi x_0}\right)$$

Luego, por el teorema del valor medio, existe un $c_{m,n} \in \mathbb{R}$ tal que

$$F_m = \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^{\beta_m} (ab)^n \pi \left(-sen\ c_{m,n}\right)$$

Por lo tanto,

$$|F_m| = \left|\sum_{n=0}^{m-1} (-1)^{\beta m} (ab)^n \pi \left(-sen\ c_{m,n}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \pi$$

$$= \pi \left[\frac{(ab)^m - 1}{ab - 1}\right]$$

$$= (ab)^m \left(\frac{\pi}{ab-1}\right) - \pi \left(\frac{1}{ab-1}\right)$$

Suponga que $ab > 1$, entonces

$$\left|F_m\right| \leq (ab)^m \left(\frac{\pi}{ab-1}\right)$$

Para G_m se tiene que $n \geq m$, además

$$G_m = \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{\beta_m} a^n \left(\frac{\cos\left(b^n \pi \alpha_m\right) - \cos\left(b^n \pi x_0\right)}{\alpha_m - x_0}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\beta_m} a^{m+n} \left(\frac{\cos\left(b^{m+n} \pi \alpha_m\right) - \cos\left(b^{m+n} \pi x_0\right)}{\alpha_m - x_0}\right)$$

Suponga que b es un número entero impar $(b > 1)$, entonces como β_m es un número entero, se tiene que

$$\cos\left(b^{m+n} \pi \alpha_m\right) = \cos\left(\frac{b^{m+n} \pi \beta_m}{b^m}\right)$$

$$= \cos\left(b^n \pi \beta_m\right)$$

$$= \begin{cases} -1, & \text{si } \beta_m \text{ es impar} \\ 1, & \text{si } \beta_m \text{ es par} \end{cases}$$

$$= (-1)^{\beta_m}$$

$$\cos\left(b^{m+n} \pi x_0\right) = \cos\left(b^n \pi \beta_m - b^n \pi \beta_m + b^{m+n} \pi x_o\right)$$

$$= \cos\left(b^n \pi \beta_m - b^n \pi \left(b^m x_0 - \beta_m\right)\right)$$

$$= \cos\left(b^n \pi \beta_m\right) \cos\left(b^n \pi \left(b^m x_0 - \beta_m\right)\right) +$$

$$sen\left(b^n \pi \beta_m\right) sen\left(b^n \pi \left(b^m x_0 - \beta_m\right)\right)$$

$$= (-1)^{\beta_m} \cos\left(b^n \pi \left(b^m x_0 - \beta_m\right)\right)$$

Por lo tanto,

$$(-1)^{\beta_m}\cos\left(b^{m+n}\pi\alpha_m\right)=(-1)^{\beta_m}(-1)^{\beta_m}=1$$

y

$$(-1)^{\beta_m}\cos\left(b^{m+n}\pi x_0\right)=\cos\left(b^n\pi\left(b^m x_0-\beta_m\right)\right)$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}G_m&=\sum_{n=0}^{\infty}a^{m+n}\left(\frac{1-\cos\left(b^n\pi\left(b^m x_0-\beta_m\right)\right)}{\alpha_m-x_0}\right)\\&=\frac{a^m\left(1-\cos\left(\left(b^m x_0-\beta_m\right)\pi\right)\right)}{\frac{\beta_m}{b^m}-x_0}+\sum_{n=1}^{\infty}a^{m+n}\left(\frac{1-\cos\left(b^m x_0-\beta_m\right)\pi}{\frac{\beta_m}{b^m}-x_0}\right)\end{aligned}$$

Como $\beta_m-b^m x_0\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, se tiene

$$\cos\left(\left(b^n x_0-\beta_m\right)\pi\right)\le 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\beta_m}{b^m}-x_0>0.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}G_m&\ge\frac{a^m(1-0)}{\frac{\beta_m}{b^m}-x_0}+\sum_{n=1}^{\infty}a^{m+n}\left(\frac{0}{\frac{\beta_m}{b^m}-x_0}\right)\\&=a^m\left(\frac{1}{\frac{\beta_m}{b^m}-x_0}\right)\\&=(ab)^m\left(\frac{1}{\beta_m-b^m x_0}\right)\\&\ge(ab)^m\left(\frac{1}{3/2}\right)\\&=\frac{2}{3}(ab)^m\end{aligned}$$

En conclusión, se tiene que

$$|F_m| \le (ab)^m \left(\frac{\pi}{ab-1} \right) \quad \text{y} \quad G_n \ge \frac{2}{3}(ab)^m$$

De este resultado se concluye que

$$\begin{aligned}
(-1)^{\beta_m} \left[\frac{W(\alpha_m) - W(x_0)}{\alpha_m - x_0} \right] &= F_m + G_m \\
&\ge G_m - |F_m| \\
&\ge \frac{2}{3}(ab)^m - (ab)^m \left(\frac{\pi}{ab-1} \right) \\
&= (ab)^m \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right)
\end{aligned}$$

Suponga que

$$\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} > 0$$

entonces $ab > \frac{3\pi+2}{2}$ y

$$\lim_{m\to\infty} (-1)^{\beta_m} \left[\frac{W(\alpha_m) - W(x_0)}{\alpha_m - x_0} \right] = \infty$$

Esto implica que

$$W'(x_0) = \lim_{m\to\infty} \frac{W(\alpha_m) - W(x_0)}{\alpha_m - x_0}$$

no existe para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, la función W es no diferenciable en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$
.
Los resultados obtenidos se resumen en el siguiente teorema debido a Weierstrass.

Teorema 4: Sean a y b números reales tales que $0 < a < 1$, b es un número entero impar positivo y $ab > \dfrac{3\pi + 2}{2}$. Entonces la función

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right)$$

es continua y no diferenciable en todo punto $x \in \mathbb{R}$.

La función $W(x)$ es llamada la función de Weierstrass (W -monstruo). El matemático británico Godfrey H. Hardy (1877-1945) generalizó el resultado de Weierstrass suponiendo solamente que $0 < a < 1$ y $ab \geq 1$ (no supone que b es un número entero). (Hardy, 1916; Jarnicki, 2015).

Teorema 5: Sean a y b números reales tales que $0 < a < 1$ y $ab \geq 1$Entonces la función

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right)$$

es continua y no diferenciable en todo punto $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1: Sea b un número real, $b > 1$. Tome $a = b^{-1}$, entonces $0 < a < 1$ y $ab = 1$. Luego, por el Teorema 5, la función

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} \cos\left(b^n \pi x\right)$$

es continua y no diferenciable en todo punto $x \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, la función

$C(x) = W\left(\dfrac{x}{\pi}\right)$ es continua y no diferenciable en todo punto $x \in \mathbb{R}$.

Note que

$$C(x) = W\left(\frac{x}{\pi}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} \cos\left(b^n x\right) \quad , \quad \text{b>1}$$

En general, las funciones

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n x\right) \quad \text{y} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n sen\left(b^n x\right)$$

donde $0 < a < 1$ y $ab \geq 1$ son continuas y no diferenciables en todo punto $x \in \mathbb{R}$.

CONTINUIDAD DE LA DERIVADA

En la sección anterior se presentó un ejemplo de una función continua y no diferenciable en todo punto $x \in \mathbb{R}$. Ahora la pregunta es ¿qué tan discontinua puede ser la derivada de una función diferenciable?; más precisamente, ¿existe una función diferenciable cuya derivada sea discontinua en todo punto de su dominio? La respuesta a esta pregunta se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 6: Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en I. Entonces el conjunto

$$C_{f'} = \{x \in I : f' \text{ es continua en } x\}$$

es denso en I.

Demostración:
Para cada número entero positivo n defina la función $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

Como f es diferenciable en I, se tiene que f_n es continua en I. Note además que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x)$$

Por lo tanto, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a f en I. Luego por el Teorema 3, el conjunto $C_{f'}$ es denso en I.

En el teorema anterior se probó que el conjunto de continuidades de la derivada de una función diferenciable es denso. En el siguiente ejemplo se construye una función diferenciable cuyo conjunto de discontinuidades de su derivada también es un conjunto denso.

Ejemplo 2: Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que el conjunto

$\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}$ (por ejemplo, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ puede ser una enumeración del conjunto Q de los números racionales). Sea

$$g(x) = \int_0^x 2\ t\ sen\left(\frac{1}{t}\right)dt - x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

entonces $g'(x) = \cos\frac{1}{x}$. Por lo tanto, la función $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$ es la derivada de una función y además sólo es discontinua en a_n.

Por el M-test de Weierstrass, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a una función f, o sea,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$$

Además, por el teorema de convergencia uniforme y continuidad, se tiene que $C_f = \{x \in \mathbb{R} / f$ es continua en $\mathbb{R}\} = \mathbb{R} - \{a_n / n \in \mathbb{N}\}$.

Así, f es la derivada de una función y además sólo es discontinua en el conjunto denso $\{a_n \ln \in \mathbb{N}\}$.

Finalmente, se ha visto que el conjunto de discontinuidades de la derivada de una función diferenciable puede ser denso; pero el conjunto de continuidades también tiene que ser denso, lo que implica que este conjunto es no enumerable.

CONCLUSIONES

1. De los resultados obtenidos en este artículo, se sugiere la siguiente estrategia para construir funciones continuas y no diferenciables en todo punto de un intervalo I. (Hunt, 1994; Wen, 2000).
    a) Determine una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ continuas en I.
    b) Cada función $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de I.

c) Cada función f_n tiene una cantidad finita de extremos y si α_n es la distancia máxima entre dos extremos sucesivos, entonces $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$

d) Si β_n es la mayor diferencia entre dos valores extremos sucesivos de f_n, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$$

e) Denote por $h_{n,x}$ los dos incrementos (uno positivo y el otro negativo) para los cuales $x + h_{n,x}$ es el primer extremo a izquierda (respectivamente a derecha) y

$$\left| f_n\left(x + h_{n_1 x}\right) - f_n\left(x\right)\right| \geq \frac{1}{2}\beta_n$$

f) Pruebe que el signo de $f_n\left(x + h_{n_1 x}\right) - f\left(x\right)$ es independiente de $h_{n,x}$, para todo n lo suficientemente grande y para todo $x \in I$

2. Se ha probado que el conjunto de discontinuidades de la derivada de una función diferenciable puede ser denso. Sin embargo, se puede usar la teoría de categorías de Baire para probar que este conjunto es “pequeño” comparado con su complemento. (Folland, 2007; Gordon, 2001).

3. Un problema interesante es determinar las condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto E sea el conjunto de discontinuidades de la derivada de una función diferenciable. Para resolver este problema se necesita conocer la teoría de categorías de Baire.

REFERENCIAS

Ciesielski, K. C (2018). Monster in Calculus. *The American Mathematical monthly*, 125(8). pp. 739-744.doi-org/10.1080/00029890.2018.1502011.

Ciesielski, K. C. (2022). Continuous Maps Admitting No Tangent Lines: A Centennial of Besicovitch Functions. *The American Mathematical Monthly*. doi.org/10.1080/000 29890. 2022.2071562.

Dunham, W. (2018) The Calculus Galery: Materpieces from Newton to Lebesgue. Princeton University Press. USA.

Edward, C. H. (1994). The Historical Development of the Calculus Springer-Verlag. USA.

Folland, G. B. (2007). Real Analysis: Modern Thechniques and Their Applications. Wiley. USA.

Gordon, R. A. (2002). Real analysis: A First Course (segunda edición). Addison-Wesley, Higher Mathematics, USA.

Hardy, G. H. (1916). Weierstrass's Non-differentiable function. Transactions of the American Mathematical Society, 17(3). 301-325.

Hunt, B. R. (1994). The Prevalence of Continuous No where Differentable Functions. *The Amer. Math. Soc.* Vol. 122, No. 711-717

Jarnicki, M. & Pflug, P. (2015). Continuous Nowhere differentiable Functions: The Monster of analysis. Springer Monographs in Mathematics.

Wen. L. (2000). A nowhere diffentiable continuous function. *The American Mathematical Monthly,* 107(5). 450-453.doi. org/10. 2307/2695303.