DINÁMICA DE CRECIMIENTO

(I PARTE)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

Por: AURELIO APARICIO

I. *INTRODUCCIÓN*

La biomatemática es una disciplina que data de principios de este siglo y por su propia naturaleza, no es posible delinear un claro desarrollo histórico como ciencia.

Sin embargo, no resulta complicado describir las metas de la biomatemática dentro del desarrollo de la ciencia moderna.

Partiremos del supuesto de que la meta básica de la ciencia moderna, es crear modelos matemáticos que describan o puedan predecir el comportamiento de un fenómeno real.

Si bien es cierto que existen factores que limitan la confiabilidad de un modelo, también es cierto que es posible ajustarlo razonablemente, de manera tal que responda a una situación real. En este caso diremos que el modelo que describe un cierto fenómeno es "bueno" y confiable. Podemos decir entonces, que una de las metas de la biomatemática es crear, en torno a un fenómeno biológico, modelos matemáticos, reglas operacionales o estructuras matemáticas que describan el fenómeno biológico estudiado.

II. *DINÁMICA DE CRECIMIENTO DE UNA SOLA ESPECIE.*

Analizaremos este fenómeno bajo las hipótesis siguientes:

i) **X** representa el número de individuos de una especie E, que habita en un sistema ecológicamente cerrado.

ii) El alimento y el hábitat de la especie son abundantes.

iii) Las condiciones de alimentación y hábitat son óptimas.

Bajo las hipótesis anteriores se tiene que las variaciones con respecto al número de individuos, es directamente proporcional al número presente de individuos en un instante cualquiera. Luego se tiene el modelo

$$\frac{dx}{dt} = ax \ ; \ a \in \Re^{+} \qquad (2.1)$$

Asumiendo que el número inicial de individuos es x_0, se tiene la solución

$$x(t) = x_0 e^{at} \qquad (2.2)$$

El modelo (2.1), llamado también **"MODELO DE MALTHUS"**, no se ajusta a la realidad ya que el crecimiento de individuos es ilimitado (cuando $t \to \infty$, $x(t) \to \infty$) mientras que, aunque la cantidad de alimento y el hábitat son abundantes, no deja de ser limitado dado que se trata de un sistema ecológico cerrado. Por este motivo debemos considerar un modelo matemático más cónsono con la realidad.

Para restringir el crecimiento del número de individuos, ensayemos con una aproximación de orden superior dada por el modelo

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \quad ; a,\ b \in \Re, b > 0 \qquad (2.3)$$

Asumiendo que $x(t_0) = x_0$ se tiene

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{ax - bx^2} = \int_{0}^{t} dt$$

y la solución viene dada por

$$x(t) = \frac{a/b}{1 + \left(\frac{a/b}{x_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}} \qquad (2.4)$$

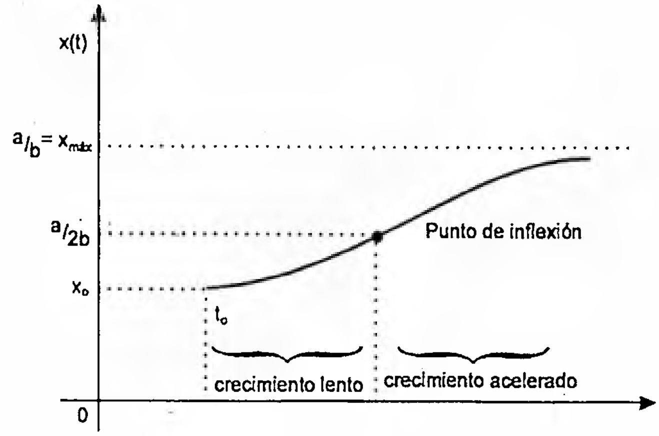

Figura 1. Función logística de crecimiento de la población

Haciendo $t_0 = 0$ en la solución (2.4) se tiene

$$x(t) = \frac{a/b}{1 + \left(\frac{a/b}{x_0} - 1\right) e^{-at}} \qquad (2.6)$$

cuyas curvas logísticas se representan en la figura 2.

OBSERVACIONES

1. El crecimiento del número de individuos es limitado (cuando $t \to \alpha$, $x(t) \to x_{max} = a/b$).

2. Conociendo el tamaño de la población en dos momentos distintos (diferentes a t_0), tales que el tiempo que existe entre t_0 y t_1 sea el mismo que existe entre t_1 y t_2, podemos calcular la población máxima en término de las poblaciones x_0, x_1 y x_2. El número máximo de individuos viene dado por

$$x_{max} = \frac{x_1(x_0x_1 - 2x_0x_2 + x_1x_2)}{x_1^2 - x_0x_2} \qquad (2.5)$$

3. Se puede demostrar matemáticamente que en el intervalo de tiempo

$$\left[t_0, \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a/b - x_0}{x_0}\right) + t_0\right]$$

se da un crecimiento acelerado de la población, mientras que en el intervalo

$$\left[\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a/b - x_0}{x_0}\right) + t_0, \infty\right]$$

se da un crecimiento lento de la población tal como se indica en la figura 1.

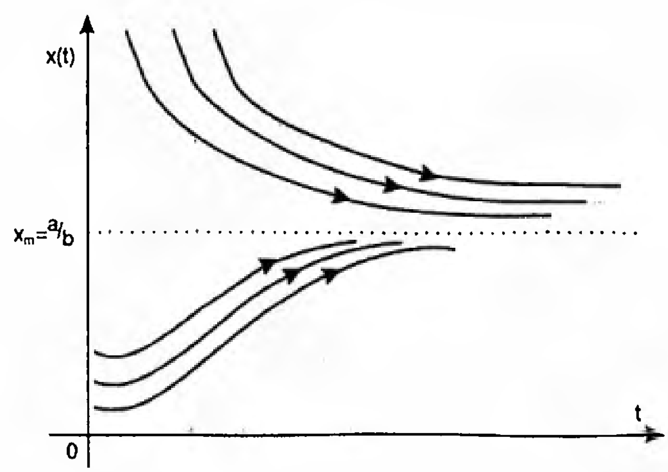

Figura 2. Curvas logísticas para una especie aislada

Si $a < 0$ entonces tendremos un comportamiento como el que se presenta en la figura 3.

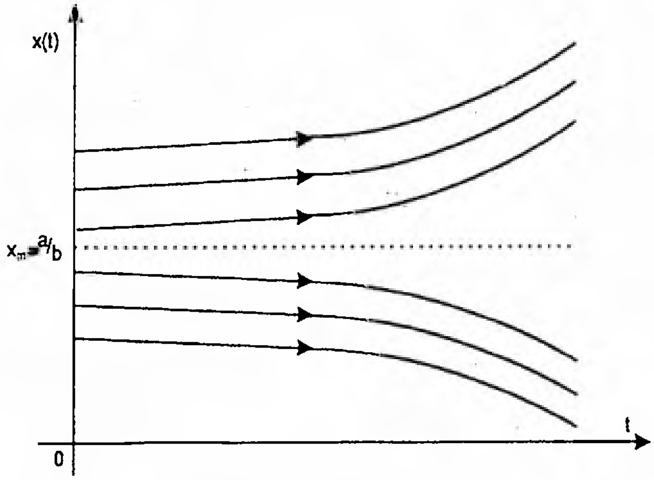

Figura 3. Curvas logísticas para a < 0

Podemos observar que si $a < 0$ entonces x_m es una población crítica ya que, si la población inicial es inferior a x_m, la misma tiende a la extinción y si es mayor que x_m la población crecerá sin límite.

Consideremos ahora una población cuya dinámica de crecimiento sea tal que una población inicial subcrítica ($x_0 < x_c$) de E conduzca a la extinción de la especie, y una población inicial supercrítica ($x_0 > x_c$), que desencadene un crecimiento limitado por x_m.

Un comportamiento como el anteriormente descrito viene dado por el modelo matemático

$$\frac{dx}{dt} = (x - x_c)\left[a + b(x - x_c)\right] \qquad (2.7)$$

en donde a, b y c son parámetros reales no nulos y x_c la población crítica.

El modelo (2.7) tienen una población límite $x_m = x_c - a/b$ para $a > 0$ y $b < 0$.

La solución del modelo (2.7) viene dada por

$$x(t) = \frac{x_c e^{-at} + \delta\left(a - bx_c\right)}{e^{-at} - \delta\ b} \qquad (2.8)$$

en donde

$$\delta = \frac{x_0 - x_c}{a + b(x_0 - x_c)}$$

Podemos observar que para un tiempo t lo suficientemente grande, la población tiende a $x_m = x_c - a/b$ ($a > 0$, $b < 0$) siempre que la población inicial sea superior a la población crítica y tiende a desaparecer cuando la población inicial es inferior a la población crítica tal como se indica en la figura 4.

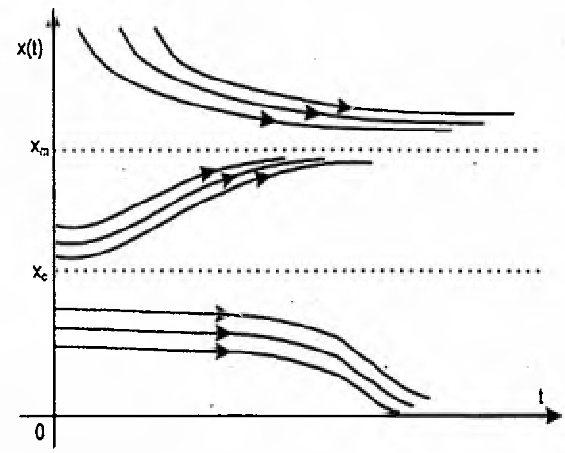

Figura 4. Curvas logísticas de una serie con población crítica y población máxima

III. CASO GENERAL DE LA DINÁMICA DE CRECIMIENTO DE UNA POBLACIÓN AISLADA.

La dinámica de crecimiento de una población aislada, viene dada por la ecuación diferencial.

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \qquad (3.1)$$

en donde F es una función que admite un desarrollo en serie de Taylor en la vecindad del origen y tal que $F(0) = F(x_m) = 0$. De lo anterior se deduce que

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots$$

con $F(0) = a_0 = 0$ y $F(x_m) = 0$.

Los casos anteriormente estudiados constituyen casos particulares correspondientes a las aproximaciones de F(x) de los tipos

a) $\frac{dx}{dt} = ax^i$, i = 1

b) $\frac{dx}{dt} = ax^i + bx^i \quad (a > 0, b < 0) \quad 0 < i < j$

c) $\frac{dx}{dt} = ax^i + bx^j + cx^k$

en donde a, b y c son parámetros reales no nulos y los exponentes i, j y k enteros positivos diferentes (i ,j k).

IV. INTERACCIÓN ENTRE DOS ESPECIES.

Cuando dos especies conviven en un mismo sistema ecológico, puede ocurrir que los recursos naturales sean tan abundantes que la interacción entre las especies es "despreciable", y en este caso diremos que las especies son independientes. Lógicamente esta situación no puede durar mucho tiempo, dado que los recursos son limitados y por consiguiente, dos especies que viven en un mismo sistema ecológico, pueden interactuar de diferentes maneras.

Algunas formas de interacción entre dos especies podrían ser, entre otras, la depredación, la competencia por alimentos o espacio físico, simbiosis, parasitismo, mutualismo, comensalismo, etc.

Iniciemos nuestro estudio con el caso más simple de interacción por depredación.

Supongamos que un sistema ecológico contiene una especie A de depredadores que se alimenta exclusivamente de una especie B de animales de presa (de depredación absoluta), y que la población de B dispone siempre de alimento abundante.

Sean y(t) y x(t) las poblaciones de las especies A y B respectivamente. Como el recurso alimenticio es abundante, entonces es plausible que la tasa de nacimiento de la especie B sea constante independientemente del tiempo, mientras que la tasa de mortalidad dependerá del número de depredadores.

Por otra parte, la tasa de nacimiento de la especie A se verá afectada por las variaciones en la disponibilidad de su alimento, en tanto que su tasa de mortalidad puede permanecer constante.

Luego la tasa de crecimiento por individuo de la población de B será $\frac{dx/dt}{x}$ y la tasa de crecimiento por individuo de la población A será $\frac{dy/dt}{y}$ y estas tasas de crecimiento vienen dadas por

$$\frac{1}{x} \circ \frac{dx}{dt} = a - by \qquad ; \qquad \frac{1}{y} \circ \frac{dy}{dt} = \alpha\ x - \beta$$

de donde se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha\ xy - \beta\ y \end{cases} \tag{4.1}$$

en donde a, b, , son constantes positivas.

Aunque no hay solución explícita para el sistema (4.1), es posible obtener una relación entre las poblaciones x(t) "y" y(t). De esta manera, aunque no podemos determinar explícitamente la población en función del tiempo, es posible obtener información sobre el flujo que tiene una población sobre la otra.

Aplicando la regla de la cadena se tiene que $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \circ \frac{dx}{dt}$ de donde obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha\ xy - \beta\ y}{ax - bxy} \tag{4.2}$$

cuya solución es:

$$a \ln y - by = \alpha x - \beta \ln x + c \tag{4.3}$$

Asumiendo que para t=0, $x=x_0$ "y" $y=y_0$ se tiene que $c = a \ln y_0 - by_0 - \alpha x_0 + \beta \ln x_0$.

Sustituyendo en (4.3) obtenemos finalmente:

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^{a}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\beta} = e^{\alpha(x-x_0)} \circ e^{b(y-y_0)} \qquad (44)$$

Se puede demostrar que la ecuación (4.4) puede ser escrita en la forma general

$$x^{\beta} \circ y^{a} \circ e^{-\alpha x - by} = c$$

en donde C es una constante arbitraria. La ecuación (4.5) representa geométricamente una familia de curvas cerradas. .

A continuación procedemos a obtener información importante de la ecuación (4.1), sin resolverla, y para ello iniciaremos determinando los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial (4.1).

En efecto, $\frac{dx}{dt} = 0$ para $x = 0$, $y = a/b$ y por otro lado

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{para } y = 0,\ x = \beta/\alpha$$

De esta manera se tienen los dos puntos de equilibrio (0,0) y (β/α, a/b). En la vecindad del punto de equilibrio (0,0), en donde no hay ni depredadores ni presa, podemos despreciar los segundos términos bxy "y" αxy obteniendo $\frac{dx}{dt} = ax$; $\frac{dy}{dt} = -\beta y$ cuya solución es

$$x = c_1 e^{at} \quad ; \quad y = c_2\, e^{-\beta t} \quad .$$

Como x "y" y son positivas, entonces c_1 y c_2 son positivas y el comportamiento de las soluciones se muestran en la figura 5.

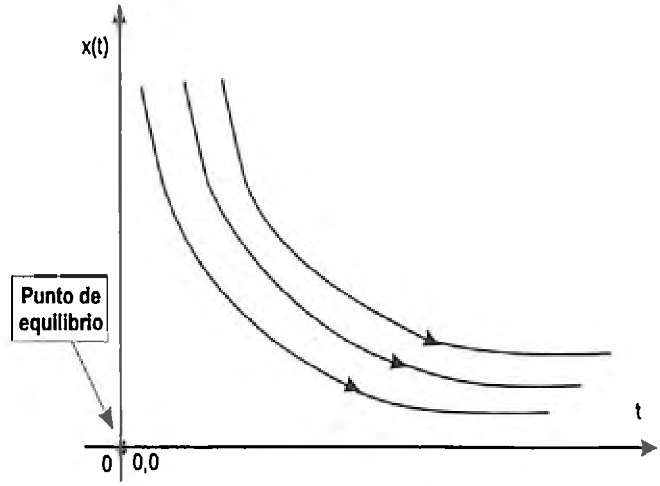

Figura 5. Punto de equilibrio inestable

En el punto de equilibrio (β/α , a/b) en donde depredadores y presa están en estado de equilibrio el número de depredadores y presa no cambian puesto que $x = \beta/\alpha$, $y = a/b$ son soluciones de la ecuación diferencial (4.1) independientes del tiempo.

Lo interesante ahora es saber ¿qué sucede si se produce una pequeña perturbación en la vecindad de este punto de equilibrio? Esta situación se puede dar si por ejemplo cazadores destruyen depredadores y/ o presas.

Para responder a esta pregunta procederemos de la siguiente manera:

Mediante la transformación

$x = / + u$; $y = a/b + v$ se tiene que

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{b\beta}{\alpha} v - buv \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{a\alpha}{b} u + \alpha\ uv \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

Eliminando v del sistema (4.6) encontramos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a\,\beta\,u = 0 \qquad (4.7)$$

cuya solución es

$$u = c_1 \cos\sqrt{a\beta}\ \ t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{a\beta}\ t \qquad (4.8)$$

La función v está dada por

$$v=\frac{\alpha}{b}\sqrt{\frac{a}{\beta}}\,(c_1\,\mathrm{sen}\sqrt{a\beta}\;\;t+c_2\cos\sqrt{a\beta}\;\;t) \qquad (4.9)$$

Luego del sistema viene dado por

$$\begin{cases} x=\dfrac{\beta}{\alpha}+c_1\cos\sqrt{a\beta}\;\;\mathrm{t}+c_2\,\mathrm{sen}\sqrt{a\beta}\;\;\mathrm{t} \\ \mathrm{y}=\dfrac{a}{\mathrm{b}}+\dfrac{\alpha}{b}\sqrt{\dfrac{a}{\beta}}\;\left(c_1\,\mathrm{sen}\sqrt{a\beta}\;\;t+c_2\cos\sqrt{a\beta}\;\;\mathrm{t}\right)\end{cases} \qquad (4.10)$$

El sistema de ecuaciones (4.10) representa geométricamente una familia de elipses concéntricas con centro común (β/α, a/b) tal como se indica en la figura 6.

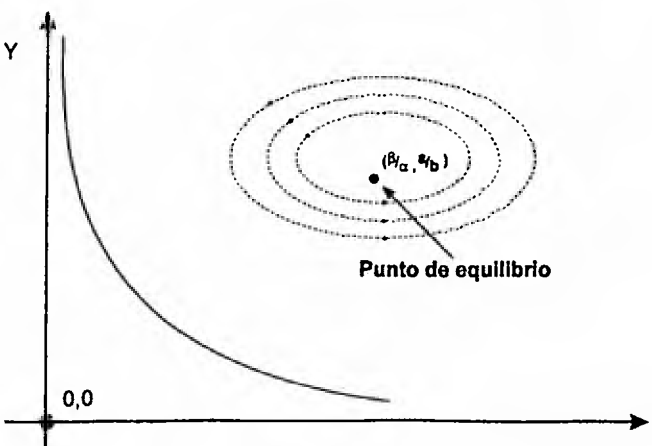

Figura 6. Puntos de equilibrio en el plano fase

CONCLUSIONES

En la primera parte de este trabajo podemos concluir de la siguiente manera:

(1) Los problemas de crecimiento y decrecimiento natural, constituyen la base para el estudio del comportamiento de una población.

(2) Cuando en el medio no existen los efectos limitativos, el índice de crecimiento de la población por individuos, se hace constante y máximo en las condiciones microclimáticas existentes.

(3) El Modelo de Malthus se aleja drásticamente de la realidad y es aplicable con buena aproximación, para un período de tiempo relativamente corto.

(4) El valor máximo del índice de crecimiento de una población podemos considerarla como el potencial biótico o potencial reproductivo de la población.

(5) El índice de crecimiento de una población puede calcularse a partir de dos mediciones del tamaño de la población y podemos definirlo como la diferencia entre el índice de natalidad específica y el índice de mortalidad específica.

(6) Si el crecimiento de una población puede ser descrito por medio de una ecuación, la influencia a otra población podrá expresarse mediante la adición de un término que modifique el desarrollo de la primera población.

BIBLIOGRAFÍA

1. **BRAUN, MARTÍN** - 1990 - "Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones". Edición original en Inglés.

2. **ENGEL, ALEJANDRO B.** - 1978 - "Elementos de Biomatemática". Series de matemática, monografía N°. 20, Brasil. Secretaría General de la O.E.A.

3. **ODUM, EUGENE P.** - 1972 - "Ecología". Nueva Editorial Interamericana, S.A.

4. **WILLIS, EDWIN O.** - 1982 - "Poblaciones y Extinciones Locales de Aves en la Isla de Barro Colorado en Panamá".