MEDIR COMO TAREA BÁSICA

Bernardo Fernández García y Omayra Pérez Castro
Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Física, CITEN
e-mail: bfernand@ancon.up.ac.pa

RESUMEN
De una manera didáctica se presentan las ideas clásicas del concepto de medición. Medir es comparar con un patrón y fue desde los inicios de la humanidad que se planteó como una tarea básica para el ordenamiento de las relaciones sociales y para el desarrollo de la tecnología. El concepto clásico se complica cuando los contornos de los objetos que se desean medir no están bien definidos, como es el caso de las fronteras de un país. B. Mandelbrot, mediante el análisis de la dimensión topológica de los patrones y la búsqueda de una regularidad (asociada a la simetría de escala), extiende la noción al concepto de dimensión fractal (en el sentido de Hausdorff-Besicovitch). Esta regularidad la consideramos una simetría del sistema desacoplada de las simetrías de traslación y rotación a las cuales siempre aparece asociada. Por analogías con el cambio de escala acoplado con las translaciones y rotaciones proponemos un generador para la simetría de cambio de escala desacoplada (generador infinitesimal anclado en un punto). Al buscar las funciones y valores propios de ese operador, encontramos las funciones homogéneas y la dimensión fractal, respectivamente. Se sugiere la simetría global de forma al cambiar de escala como el invariante perceptual de la simetría.

PALABRAS CLAVES
medir, fractal, exponente crítico, simetría, cambio de escala.

INTRODUCCIÓN

El Homo Sapiens emergió en la naturaleza estimando magnitudes. Lo hacía con sus manos o sus brazos para calibrar el tamaño de los objetos o de las distancias y también para comunicar, a otro compañero, la magnitud de un animal que había divisado en sus recorridos de cacería o la lejanía a la que se encontraba la tribu vecina. Al tratar de precisar la información que comunicaba a los demás, sintió la necesidad de comparar con objetos familiares. Esta comparación se puede clasificar de dos maneras, una cualitativa y otra cuantitativa.

En la comparación cualitativa, previamente, se debe identificar alguna cualidad o característica común entre los objetos que se van a comparar. Por ejemplo, si queremos estimar la belleza de una flor, la debemos comparar con otra flor de referencia (por ejemplo la orquídea), pero debemos identificar antes, sin ambigüedades, la cualidad objeto de comparación.

Al realizar una comparación cualitativa, se busca, como el nombre lo indica, cualidades. Éstas pueden ser belleza, forma, color, etc. Sin embargo, debemos tener una relación de orden en la cualidad, es decir una clasificación ordenada de las distintas expresiones de la cualidad. En el caso de la belleza de una flor, la relación de orden se puede construir de la siguiente manera: es más bella la que puede tener más variedades de colores en la naturaleza.

EL CONCEPTO DE MEDIR

Pero las comparaciones cualitativas que llamamos estimaciones producen mucha inexactitud y dispersión en los resultados. Para lograr confiabilidad y reproductibilidad, se pasó de estimación a medición. Esta es una actividad que el hombre realiza diariamente. El sastre, el arquitecto, el ingeniero, el dibujante, el vendedor de pescado, miden magnitudes físicas. Convendría, antes que nada, conocer ¿qué es medir?. Lo más natural es recurrir al diccionario de la Real Academia Española de la lengua, el cual define el vocablo medir de la siguiente forma: "Estimar o evaluar una magnitud comparándola con otra de su misma especie tomada por unidad", "Igualar y comparar dos cosas no materiales". Notamos en ambas definiciones, que el concepto común es "comparar". Este tipo de actividad, en que se determina cuántas veces cabe un patrón (la magnitud tomada como unidad) en la magnitud que se desea evaluar, se le llama medición directa.

Medir es comparar con un patrón. Lo sabían los egipcios de la otrora civilización de las pirámides. Era una necesidad de ese grupo social para delimitar nuevamente sus tierras, al bajar el nivel de las aguas, luego de las inundaciones del río Nilo que borraban los límites y evitar así las controversias por la propiedad. La humanidad ha fabricado múltiples patrones de longitud, de superficie, de volumen, de tiempo o de masa. La vara, unidad de longitud aunque parezca asombroso, fue usada para la venta de carne en las provincias centrales durante la época de Victoriano Lorenzo. La pulgada, que hace referencia al pulga, se usa todavía en los países anglosajones. El área o la hectárea (cien áreas) sirve para vender tierras en la campiña panameña. La lata (donde venía envasada la manteca de puerco) es una unidad patrón de volumen para la venta de miel, chicha fuerte o de guarapo. El vaso de guandú compite en los mercados públicos con la libra. Muchas otras unidades empíricas han servido a la sociedad panameña para la intercomparación y comercialización de sus productos (1). La Revolución Francesa, en un intento loable de racionalización, introdujo desde el siglo XVIII el Sistema Métrico Decimal de pesas y medidas, en base diez, con las unidades patrones básicas de metro para las distancias y kilogramo para las masas. La definición original del metro fue la diez millonésima parte del cuadrante de la tierra. El desarrollo acelerado de la tecnología permite definirlo como la distancia recorrida en el vacío por una onda luminosa en 1/(299 792 458) fracción de segundo. Esto garantizaba una alta reproductibilidad en los resultados y una comunicación más objetiva entre los hombres. Con las normas de la Revolución Francesa se dieron las bases de un comercio organizado para manejar una era de producción a gran escala.

El fundamento de la comparación cuantitativa se encuentra en los números. De allí que ante una propiedad que deseamos estimar cuantitativamente, debemos primero observarla e identificarla y después establecer una relación isomorfa (uno a uno) entre la magnitud y los números, ya sean éstos enteros o fraccionarios. Las magnitudes quedan automáticamente ordenadas, pues los números están ordenados.

Por ejemplo, en una medición cuantitativa de longitud queremos saber que tan largo, ancho o alto es un libro. Y es precisamente allí que introducimos una relación entre la magnitud considerada y los números. Medir consiste entonces en establecer una razón numérica (comparar) entre la magnitud estudiada y una magnitud patrón de la misma especie.

Antes de realizar una medición se debe escoger una unidad de medida (o patrón) de acuerdo con la magnitud a medir. En el Sistema Internacional la unidad de medida de longitud es el metro (m), que a su vez tiene múltiplos como el kilómetro (km) y submúltiplos como el centímetro (cm).

Medir es, pues, servirse de un patrón **p** y comparar la magnitud **M** que se desea medir con el patrón. El resultado es que la magnitud es x veces el patrón y se escribe: $\mathbf{M} = x\,\mathbf{p}$. Aquí x es un número, resultado de la relación entre la magnitud y el patrón.

Un concepto importante en la medición es el de cifras significativas. Se entiende por cifras significativas aquellas cifras, producto de mediciones, que tienen significado físico.

Las cifras significativas se clasifican en dos tipos: la cifra segura y la cifra dudosa, ésta última es sobre la cual recae el error o dispersión, y se le llama también cifra estimada.

La diferencia entre el valor observado y el valor que se considera "verdadero" de una magnitud física se llama error de observación.

Este error no obedece a leyes simples y, en general, tiene muchas causas. Corrientemente, los errores se clasifican en sistemáticos (causal) y aleatorios (dispersiones casuales). A veces es difícil diferenciar entre ellos y algunos errores son una combinación de ambos.

Los errores de observación producto de imperfecciones de los instrumentos de medición o por deficiencias del método experimental se llaman errores sistemáticos.

Las variaciones producto de la observación por descuidos involuntarios del observador y por las condiciones experimentales, se llaman dispersiones aleatorias. Son "caóticas" en su incidencia, variables en magnitud y oscilan alrededor de un valor promedio. A menudo muestran su presencia frente a la repetición de las mediciones.

Cuando se realizan varias mediciones de una magnitud, en general, no se encuentra exactamente el mismo valor. Esto nos sugiere obtener un valor promedio del conjunto de medidas. Para calcular el valor promedio, se suman todos los resultados numéricos (tomando en consideración el concepto de cifras significativas) y se divide entre la cantidad de medidas realizadas.

Ante una serie de medidas, se puede evaluar el grado de dispersión con respecto al valor promedio. Cada desviación se determina restando a cada medición el valor promedio. Estas diferencias pueden ser cantidades positivas o negativas, y se les llaman desviaciones. Para evitar los problemas de signo se induce una norma a partir de un producto escalar y se le llama dispersión absoluta o estandarizada al promedio de las dispersiones absolutas de las desviaciones, inducidas por el producto escalar.

Una de las formas más apropiadas para comunicar el resultado de mediciones de una magnitud (valor más probable) es escribir el valor promedio más o menos su dispersión absoluta.

Si dividimos la desviación absoluta entre el valor promedio, obtenemos la dispersión relativa de las medidas. La dispersión porcentual se determina multiplicando la dispersión relativa por cien.

El proceso de medir es una forma de conocer la naturaleza. Desde un principio el hombre se sirvió de la medición para construir un sistema explicativo de la naturaleza.

Sin embargo, no todas las mediciones se pueden realizar de manera directa. El científico se encuentra con muchas mediciones indirectas que desafían a cada instante su ingenio. Por ejemplo, ¿cómo medir, con una regla corriente, el diámetro de un cabello humano? o ¿el espesor de una hoja de papel?.

El método indirecto de medición se utiliza cuando no se puede medir directamente, con un instrumento, la magnitud que nos interesa conocer. Para ello nos servimos de la medición de otras cantidades que, a través de un algoritmo matemático, nos da como resultado la cantidad deseada. La mayoría de las veces, las magnitudes son calculadas por medio de una relación analítica, es decir por vía indirecta.

El nonio, pie de rey o calibre, es un instrumento de medición de longitudes que permite realizar mediciones directas más precisas que la regla. Los tres tipos fundamentales de mediciones que pueden ser obtenidas con este instrumento son:

1. Grosores pequeños.
2. Dimensiones interiores pequeñas.
3. Profundidades de cavidades.

Para operar el nonio se debe abrir el calibre, desplazando la parte móvil lo suficiente para que la pieza, cuya dimensión se desea conocer, pueda ser abarcada por éste. Una vez colocada la pieza se cierra el calibre hasta que quede suavemente presionada.

Se lee sobre la escala fija del calibre los centímetros que hay hasta el cero de la escala móvil (nonio). Se mira luego qué división del nonio coincide o se aproxima más a una división de la escala fija del calibre y el número de orden de aquélla (en el nonio) son los milímetros que hay que sumar a los centímetros ya leídos para tener, con apreciación del milímetro, la dimensión buscada.

El transportador es el instrumento que se utiliza para medir el ángulo formado por la intersección de dos rectas. Para la medición se escoge arbitrariamente una de las dos rectas como base del transportador, cuyo punto central se hace coincidir con el punto de intersección, y la otra recta sirve de indicador de la escala para efectuar la lectura del ángulo. Las unidades generalmente usadas para las medidas angulares son el grado (□) y el radian (rad). Un ángulo correspondiente a una vuelta completa mide 360□, o lo que es lo mismo 2□ radianes.

Hay otra magnitud que siempre ha cautivado al hombre. No se le puede comparar directamente con ningún objeto material. El único hecho real del transcurrir del tiempo es el cambio que se suscita en la naturaleza. Los cambios regulares más evidentes son los ciclos del Sol y de la Luna. A través de ellos el hombre ha medido el tiempo desde hace miles de años.

Sería imposible, aún para el hombre más primitivo, no percatarse que la luz y la oscuridad se suceden una a otra en forma periódica. Esta regularidad fue la que se utilizó, desde los tiempos remotos, para definir el día solar.

El hombre se basó en otros cambios de la naturaleza para medir tiempos mayores que el día, como los meses y los años.

Existen intervalos cortos de tiempo, como por ejemplo el tiempo de revolución del aspa de un ventilador eléctrico, ¿cómo se pueden medir estos intervalos cortos de tiempo?.

Uno de los instrumentos que se utiliza para medir intervalos de tiempos cortos es el estroboscopio. Consiste en un disco con ranuras igualmente espaciadas. Su centro es atravesado por un eje sobre el cual puede girar casi sin fricción. Para medir intervalos cortos de tiempo se recubre con una cinta algunas de las ranuras del disco, de tal manera que las no cubiertas queden igualmente espaciadas. Se hace girar el disco a una rapidez tal que el movimiento del cuerpo oscilante se observe aparentemente detenido. Por ejemplo, si el disco estroboscópico tiene cuatro ranuras descubiertas, el periodo de rotación del disco cuando se observe inmóvil el cuerpo, será cuatro veces mayor que el periodo del cuerpo oscilante.

Como decíamos, desde tiempos muy remotos el hombre sintió la necesidad de cuantificar o medir el terreno comprendido entre ciertos límites; aquí surge el concepto de superficie o área.

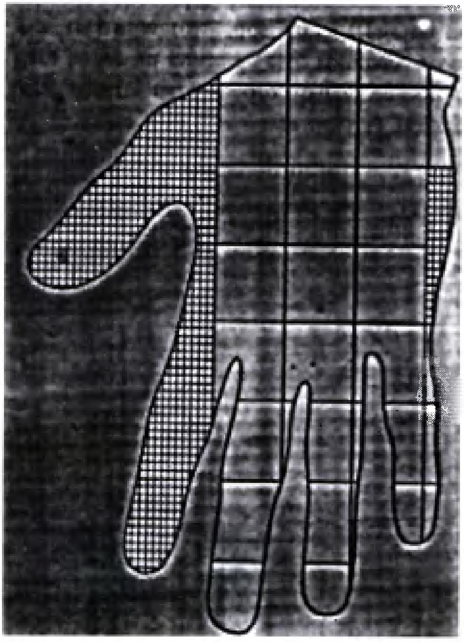
Se entiende por superficie el límite de un cuerpo que lo separa y distingue de lo que no es él. Si se trata de una figura, su límite es una línea cerrada (perímetro) y el interior es una superficie. Generalmente se asocia al término superficie, la forma o contorno que posee un objeto al proyectarse en dos dimensiones. Es decir, que una superficie puede ser triangular, cuadrada, circular, etc.

El área de una figura es la medida de su superficie. En el Sistema Internacional, la unidad de medida del área es una unidad derivada y se expresa en m^2, o algún múltiplo o submúltiplo del metro, elevado al cuadrado.

¿Cómo medir superficies de manera directa? Tenemos que tener acceso a una superficie patrón. Una alternativa es usar cuadritos de una hoja milimetrada.

Para determinar la superficie de una mano dibujada sobre una hoja de papel cuadriculado se cuentan los cuadritos dentro del perímetro del dibujo de la mano. Si queremos mejorar el resultado de la medición debemos hacer cada vez más chicos los cuadritos. En lenguaje matemático se dice que, a medida que los cuadritos se hacen más pequeños, la suma de sus áreas tiende hacia el valor de la superficie como límite. De allí se deduce que para tener poca dispersión en los resultados y buena reproductibilidad del proceso de medición, el tamaño de los cuadritos y la forma de los contornos no deben influir en el resultado de la medición.

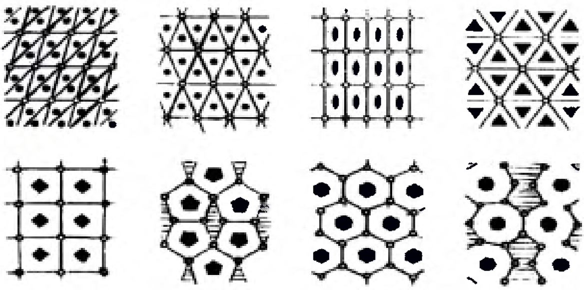
También constatamos que el procedimiento consiste en una suma y que el resultado de la suma debe existir, es decir, debe ser un número finito.



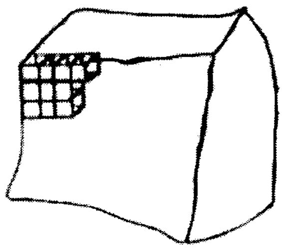
Cuando medimos volúmenes de manera directa, procedemos de la misma forma, se trabaja con volúmenes cada vez más pequeños, que llamamos elementales o infinitesimales, situados dentro de la superficie que encierra el volumen que se desea medir y los sumamos (cuando son infinitamente pequeños, en vez de decir que los sumamos, decimos que los integramos, y con eso asociamos los conceptos de integral a los de medición, los matemáticos dicen que aplican la teoría de la medida).

Cuando generalizamos los procedimientos antes descritos procedemos de la siguiente forma: llamamos a los patrones pequeños, adoquines, y hay adoquines de longitud (cuya dimensión es uno), adoquines de superficie (cuya dimensión es dos) y adoquines de volumen (cuya dimensión es tres). Estos adoquines patrones pueden tener diversas formas.

Sin embargo, según la forma tanto de los patrones como de la superficie que se desea medir, algunas veces los adoquines no permiten cubrir toda la magnitud considerada.



Si queremos cubrir una superficie que tiene forma cuadrada no podemos hacerlo con adoquines que son pentágonos o heptágonos pues no cubrirían toda la superficie por muy pequeños que éstos sean.



d=3

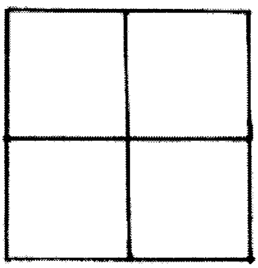
La forma de los adoquines patrones se debe adaptar a la forma general de la magnitud que se va a medir. Si el adoquín es un patrón de longitud se anotará ε_0, si es de superficie ε_0^2 y si es de volumen ε_0^3.

En general se anota ε_0^n. Llamaremos N a la cantidad total de adoquines necesarios para cubrir o llenar toda la magnitud que se desea medir. Si hacemos cada vez más pequeños los adoquines patrones observaremos, en general, que disminuye la dispersión en los resultados de la medición.

Por ejemplo, tenemos un adoquín en forma de cuadrado y lo partimos en cuatro pedazos iguales, es decir, cortamos en dos partes iguales cada lado del adoquín y verificamos la relación:

Adoquín inicial = 4 adoquines nuevos = 2 x2 ε_0^2 =(2x ε_0)^2.

Adoquín inicial = 4 adoquines nuevos = 2 x2 ε^2 =(2x ε)^2

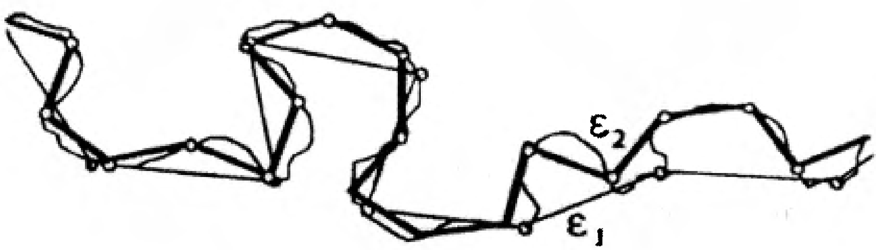


En primera instancia constatamos que la disminución del tamaño del adoquín no altera el valor de la magnitud que se desea medir, sólo mejora la precisión del resultado y, en el límite, nos dará un valor fijo (llamado valor límite).

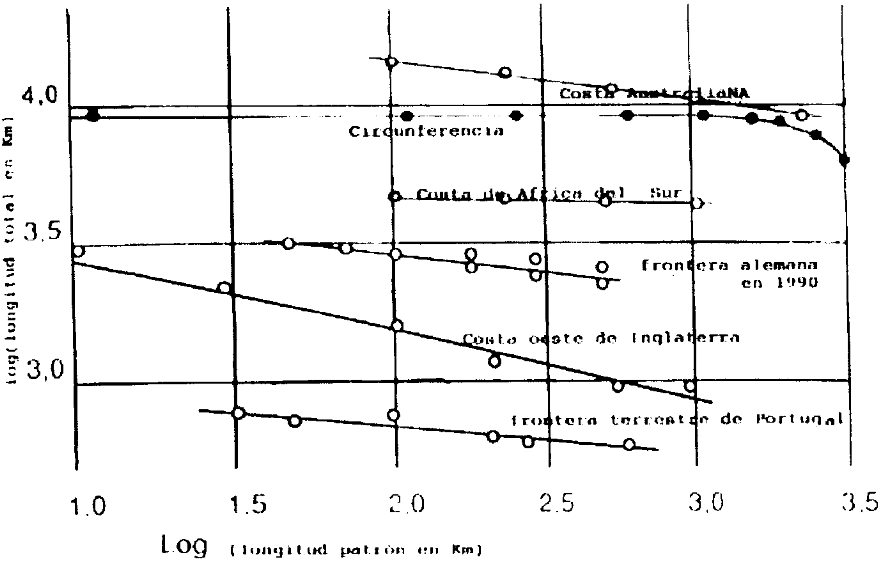
NUEVO CONCEPTO DE MEDIR

Sin embargo, para ciertas situaciones la experiencia nos revela algo asombroso. Presentamos a continuación un ejemplo de las ideas que queremos trasmitirles. Al evaluar la superficie de la República de Panamá, que es un concepto geopolítico importante estamos obligados a definir de manera precisa la frontera del país. Consideremos una parte de ese contorno como la costa del Océano Pacífico. Si escogemos por unidad patrón el kilómetro, obtendremos una longitud L de la costa. Si por unidad patrón se escoge el metro, que es mil veces más pequeño que el kilómetro, no obtendremos la misma longitud L como resultado de una medición. El contorno no está bien definido.

Medición de una costa con unidades diferentes



Analicemos lo que ocurre. Podemos suponer una experiencia en la que tomamos sucesivamente diferentes patrones para medir distancias según el algoritmo siguiente: el patrón más pequeño, es la mitad del más grande, por ejemplo, una longitud mide 18 unidades de regla pequeña, mientras que la misma longitud mide 8 unidades de regla grande (ver la figura). Al hacer la transformación unas unidades a las otras (por ejemplo, a las unidades de regla grande) tenemos que, el resultado de la medición con la regla pequeña, equivale a 9 reglas grandes. A medida que disminuye el patrón el resultado de la medición crece y cuando el patrón corresponde a una longitud infinitesimal, el resultado de la medición se hace infinito o diverge, es decir, no existe la magnitud expresada como producto de la medición. En ese sentido no existe una longitud de la costa del Océano Pacífico de la República de Panamá y de ninguna costa o frontera.



Si graficamos los resultados de la medición de las costas utilizando patrones de diferentes tamaños, en papel denominado logarítmico-logarítmico (las dos escalas son logarítmicas), nos asombramos de lo que nos revela el gráfico del resultado de la medición en función del tamaño del patrón, para distintas situaciones o costas de diversos países.

Al hacer el patrón inicial (kilómetro) más pequeño (metro, centímetro, milímetro, etc.), se encuentra una regularidad en el gráfico: la constancia de la pendiente. No existe una magnitud invariable para todos los observadores (personas que son susceptibles de realizar mediciones con distintos patrones) que se llame *longitud de las fronteras o de las costas,* pero si existe una cantidad constante para cada caso que es la pendiente de la recta. Hacemos notar que para la circunferencia sí existe una longitud invariante, pues la pendiente es cero y, como toda cantidad a la potencia cero es la unidad, la magnitud o longitud de la circunferencia no depende del tamaño del patrón o adoquín utilizado para realizar la medición y, por lo tanto, el resultado de la medición no diverge.

De todo lo anterior se deduce que para medir fronteras o costas de manera invariante no basta con comparar la frontera con un patrón de longitud fija; es necesario obtener la pendiente de la recta que resulta de graficar la longitud versus los distintos tamaños del patrón escogido, en papel logarítmico-logarítmico. Esto garantiza una propiedad invariante de la costa para todo observador (persona que mide) y para todo aparato o patrón de medición, ésta es la pendiente de la recta o, dicho de otro modo, el exponente de la relación: $M = \alpha\, \varepsilon^{-\rho}{}_{0}$, llamada dimensionalidad de recubrimiento del objeto, por analogía con el exponente del adoquín patrón. En la Física de transiciones de fase se denominan exponentes críticos.

LA DIMENSIÓN FRACTAL

La dimensión del objeto conduce al concepto denominado dimensión fractal (este concepto fue introducido por B. Mandelbrot y viene del latín *fractus*, forma verbal de *frangere*: ruptura). De igual manera que las fronteras o costas tienen dimensión fractal, podemos decir que la superficie del territorio nacional de cualquier país es una figura fractal y lo que debemos **medir** de ellos (medición indirecta mediante la comparación con una secuencia de patrones), es su dimensión fractal. Se nos viene a la idea que la dimensión fractal depende de la evolución de la costa o de la superficie territorial por factores geomorfológicos, geológicos o meteorológicos y algunas veces socio-históricos. Es importante recalcar que en cualquier situación no siempre se obtendrá, en papel doblemente logarítmico, un gráfico en línea recta. En los casos en que eso ocurre decimos que tenemos una función homogénea o una relación homogénea, entre la magnitud clásica (o su percepción objetivizada) y un adoquín del espacio topológico, es decir de dimensión entera, al cambiar de escala. Esas funciones son aquellas que verifican la condición $f(\lambda_0 x) = \lambda_0^n f(x)$. En lenguaje del físico se dice que al cambiar de escala, en el espacio donde está inmerso el objeto, percibimos una simetría denominada la autosimilaridad, o invariancia global de escala. El formalismo de la dimensión fractal, después de su introducción por Benoit Mandelbrot, fue tratado entre otros por J. E. Gouyet.

Estos resultados conducen a una reflexión sobre algunos supuestos que tenemos en Física. En el cuadro del formalismo lagrangiano las traslaciones temporales y espaciales generadas por los operadores de derivación con respecto al tiempo y al desplazamiento respectivamente, generan simetrías y sus consecuentes leyes de conservación, a saber la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento. La búsqueda de un formalismo que contemple el caso de la independencia explícita de la función lagrangiana con respecto al tiempo, lleva a definir la función de Hamilton y el principio de mínima acción asociado. El análisis de todas las transformaciones de variables que traduzcan estos objetivos generales llevan a las transformaciones canónicas. Pero estas transformaciones que dejan invariables los corchetes de Poisson son incompatibles con las simetrías por cambio de escala, con excepción del caso en que los potenciales son de la forma newtoniana con exponente dos negativo. Todos los demás casos imponen una escala fija. El caso similar es el de la Física Cuántica no relativista, en la que la relación de conmutación entre la variable espacial y la variable cantidad de movimiento es análoga a la de los corchetes de Poisson para las variables equivalentes. Esto indica una aparente contradicción entre un hecho real que nos dice que hay invariancia de escala (en el espacio y en el tiempo) y el resultado enunciado de que hay una escala fija debido a que las traslaciones espaciales y temporales imponen una relación canónica que conduce a la escala única. En relatividad especial, la simetría por cambio de escala, simultáneamente con las traslaciones espacio-temporales, impone que los fenómenos tengan masa nula, es decir, que sean fenómenos que están sobre el cono de luz. Es conocida la invariancia de las ecuaciones de Maxwell por transformaciones conformes.

CONCLUSIÓN

Esta aparente contradicción fue resuelta cuando se aceptó que existen fenómenos naturales en los que propiedades físicas importantes no son invariantes por simetría de translación o rotación, pero si lo son por cambio de escala. El concepto de derivada es concebido como un cambio de escala, pero al nivel del intervalo (de espacio o de tiempo), es decir implica una simetría de traslación y de rotación (para el caso espacial); por ello se fija una escala que se traduce en las relaciones básicas entre el operador que genera la traslación y los corchetes de Poisson. La invariancia de escala del tipo fractal fija un punto y realiza el cambio de escala. Esto puede presuponer que no necesariamente hay invariancia simultánea de traslación o rotación. Las funciones que verifican estas simetrías son las funciones homogéneas, pues el generador infinitesimal de la simetría debe ser de la forma $x\frac{\partial}{\partial x}$ (para una dimensión). Las funciones propias son de la forma $f(x) = Ax^n$ y los valores propios serían **n**, dimensión de la función. El exponente crítico es **n** y a la vez es la cantidad que tiene permanencia durante el proceso de la medición. Por ello, los fractales como las costas dc la República de Panamá, que no tiene simetría de traslación, es decir que poseen una tortuosidad en sus propiedades por traslación (y rotación) presentan una propiedad que se conserva y es su imagen a diferentes escalas. Esta imagen se cuantifica físicamente a través del valor propio de la simetría, es decir a través del exponente crítico que es su dimensión fractal.

Como hemos visto en las líneas anteriores, el concepto de medición ha evolucionado hasta niveles muy altos de sofisticación. Los objetos fractales son una ilustración de cómo un proceso ya legendario, como la medición, no deja de necesitar actualización constante.

ABSTRACT

In a very simple approach we introduce the classical ideas of measurement. It is accepted that to measure is to compare the physical magnitude with a standard. Since the beginning of humanity it is presented like a basic task to put in order social relations, as well as its importance for the development of technology. The classical concept became complicated when the contour of an object that has to be measure is not well defined, as it is the case of the borders of a country. The analysis of the topological dimension of patterns give to Benoit Mandelbrot, by means of search of regularity (associate to symmetry), the possibility to extend the notion of dimension (in the sense of Hausdorff-Besicovitch) to a new geometrical figures named fractals. This regularity is taken as the symmetry of the system (symmetry of scale), uncoupled to the symmetries of translation and rotation. By analogies with the associated changes of scale of translations and rotations, it is proposed an infinitesimal generator of scale change symmetry (generator anchored in a point). Upon seeking the eigen-functions and eigen-values of symmetry, it is found the call homogeneous functions and the fractal dimension, respectively. It is suggested that the global symmetry, (invariante perception of the symmetry) after a scale change, is the form, like of the Republic of Panama.

REFERENCIAS

Flores, E. 1993. El sistema internacional y las medidas en Panamá. Centro de Investigaciones con Técnicas Nucleares. Universidad de Panamá. Panamá.

Fernández, B. 1994. Un pellizco en el espacio o la fuerza èxplicativa del lenguaje. Revista Universidad, IV Época, No. 51, pág. 117-124.

Fernández, B. & P. Weigandt. 1995. El proceso de medición como parte de la teoría física. I Encuentro Nacional ALICEN, 9-15. Panamá.

Pérez, O. 1995. Elaboración, aplicación y ensayos de un paquete de enseñanza experimental dirigido al desarrollo de las estructuras lógico-formales. Trabajo de Graduación. Universidad de Panamá.

Le Bellac, M. 1990. Des phénomènes critiques aux champs de jauge. Editions du CNRS. Paris.

Gouyet, J.F. 1992. Physique et structures fractales. Masson. Paris.

Recibido junio del 2001, aceptado mayo del 2002.