



CREACIÓN DE HERRAMIENTA EN LÍNEA, ÚTIL PARA ABORDAR UN PROBLEMA DE VALORES EN LA FRONTERA DEL TIPO DIRICHLET

CREATION OF ONLINE TOOL, USEFUL TO HANDLE A DIRICHLET'S BOUNDARY VALUE PROBLEM

Ramiro A. Villarreal G.

Universidad de Panamá, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Panamá.

ramiro.villarreal@up.ac.pa

<https://orcid.org/0009-0001-0887-6707>

Fecha de recepción: 24 de septiembre de 2023

Fecha de aceptación: 20 de marzo de 2024

DOI [HTTPS://DOI.ORG/10.48204/J.TECNO.V26N2.A5396](https://doi.org/10.48204/J.TECNO.V26N2.A5396)

RESUMEN

Se programó una herramienta digital para utilizarse en línea y gratuita, a través de la plataforma Geogebra. Dicha herramienta resuelve numéricamente la ecuación de Laplace con valores en la frontera (del tipo Dirichlet) para una malla rectangular de 6×6 , en la que 20 valores están en la frontera y 25 valores están en el interior, todos distribuidos de manera uniforme en coordenadas cartesianas. El método numérico utilizado para resolver la ecuación diferencial fue el método de diferencias finitas, en el cual se apreció que, para calcular cada valor del campo escalar " $u_{i,j}$ " dentro de la malla rectangular, se realizó el promedio de los valores adyacente al valor en cuestión, es decir

$$u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{4}$$

Por otro lado, para plantear el grado de aproximación entre el modelo analítico " MA " (la ecuación de Laplace) y el modelo numérico " MD " (método de diferencias finitas) se realizó una expansión en serie de Taylor, hasta el quinto término, de un valor arbitrario " $u(x,y)$ " del campo escalar, con lo que dicho planteamiento llega al siguiente resultado

$$MA = MD + TD$$

En donde el término " TD " es denominado "término de discrepancia", ya que el mismo marcó la diferencia cuantitativa entre dichos modelos matemáticos. Su forma analítica obtenida fue la siguiente

$$TD = - \left(\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} \right) \frac{h^2}{12}$$



El término “ h ” representó la forma en que había sido seccionado la malla. Adicional a esto, si el campo escalar variaba de manera suave y las condiciones en la frontera eran homogéneas, se podía obtener una solución general para la ecuación diferencial de Laplace. En dicha solución, se generaron constantes (k, A, B, θ) que dependían de las condiciones de frontera, con lo que se desveló, para un sistema físico estable en concreto, la dependencia del TD con el cuadrado de h .

$$TD = h^2 f(k, A, B, \theta, x, y)$$

Resaltó a la vista, el hecho de que al hacer el término h más pequeño, este término de discrepancia se volvió irrelevante y consecuentemente, ambos modelos, analíticos y numérico, mostraron su aproximación.

Para resolver el sistema lineal de ecuaciones de primer grado, se utilizó la regla de Cramer. Para la creación del algoritmo se utilizó el software Geogebra Clásico, Versión 6.0.801.0, el cual es gratuito. El link para acceder a esta herramienta digital es la dirección web, <https://www.geogebra.org/m/rmwrxxsa>. El objetivo de la creación de esta herramienta estuvo basado en el estudio de sistemas físicos bajo condiciones de equilibrio o estables, tales como: el flujo térmico estable sobre una lámina conductora, una distribución estática de potencial eléctrico sobre una superficie, una distribución de presión que describe el flujo estable de un fluido, etc.

PALABRAS CLAVES

Ecuación de Laplace, Dirichlet, sistemas físicos estables, diferencias finitas.

ABSTRACT

A digital tool was programmed to be used online and free, through the Geogebra platform. This tool numerically solves the Laplace equation with values on the boundary (of the Dirichlet type) for a 6×6 rectangular mesh, in which 20 values are on the boundary and 25 values are inside, all distributed uniformly in Cartesian coordinates. The numerical method used to solve the differential equation was the finite difference method, in which it was noted that, to calculate each value of the scalar field “ $u_{i,j}$ ” within the rectangular mesh, the average of the values adjacent to the value in question, that is

$$u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{4}$$

On the other hand, to establish the degree of approximation between the analytical model “ MA ” (the Laplace equation) and the numerical model “ MD ” (finite difference method), a Taylor series expansion was carried out, up to the fifth term, of an arbitrary value “ $u(x,y)$ ” of the scalar field, with which said approach arrives at the following result

$$MA = MD + TD$$

Where the term “ TD ” is called “discrepancy term” since it marked the quantitative difference between said mathematical models. Its analytical form obtained was the following

$$TD = - \left(\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} \right) \frac{h^2}{12}$$

The term “ h ” represented the way the mesh had been sectioned. In addition to this, if the scalar field varied smoothly and the boundary conditions were homogeneous, a general solution to the Laplace differential equation could be obtained. In this solution, constants (k, A, B, θ) were generated that depended on the boundary



conditions, which revealed, for a specific stable physical system, the dependence of the TD on the square of h .

$$TD = h^2 f(k, A, B, \theta, x, y)$$

It clearly highlighted the fact that by making the term h smaller, this discrepancy term became irrelevant and consequently, both models, analytical and numerical, showed their approximation.

To solve the linear system of first degree equations, Cramer's rule was used. To create the algorithm, the Geogebra Classic software, Version 6.0.801.0, which is free, was used. The link to access this digital tool is the web address, <https://www.geogebra.org/m/rmwrxxsa>. The objective of the creation of this tool was based on the study of physical systems under equilibrium or stable conditions, such as: stable thermal flow over a conductive sheet, a static distribution of electrical potential on a surface, a pressure distribution that describes the stable flow of a fluid, etc.

KEY WORDS

Laplace equation, Dirichlet, stable physical systems, finite differences.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas físicos, en estado estable (Espinoza 2003), se caracterizan por tener una distribución de valores o magnitudes físicas (por ejemplo: temperatura, presión, potencial eléctrico, etc.) que no varían en el tiempo. Si se analiza una parte (en el espacio) de este tipo de sistemas en la que no incluya, ni fuentes ni sumideros, la ecuación de Laplace puede modelar este fenómeno físico de manera completa (Segundo 2010). Al tratarse de una ecuación diferencial parcial elíptica (Pacheco *et. al.* 2018), la solución de la misma debería estar asociada a un campo o un potencial (depende del sistema) correspondiente a las magnitudes físicas antes mencionadas. Sin embargo, hay casos en los que debido a las características del sistema o para evitar medir de manera invasiva, solo se pueden obtener datos de las fronteras de dicho sistema, pero el interés también está enfocado en conocer su comportamiento interno. Todo lo anterior describe un problema de valores en la frontera (Zill & Cullen 2009). Por otro lado, la forma en que se miden u obtienen los valores en dichos límites externos, también define el tipo de problema de valor en la frontera. Por ejemplo, al plantear la ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares en dos dimensiones,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Tal que,
$$u = u(x, y) \quad (2)$$

Como se mencionó anteriormente, el hecho de no haber ni fuentes ni sumideros, lleva a plantear, sin lugar a duda, el carácter continuo de la función " u ". Por lo que se puede conocer, sin ambigüedad, valores de " u " en las fronteras. Un tipo de problema en la frontera en que solo se conocen valores de " u " ($u = f(x, y)$) en los límites externos, es denominado



“problema de Dirichlet” (Nakamura 1992). Sin embargo, si se tiene información acerca de cómo cambia esta función “ u ” con respecto a algunas de estas variables espaciales ($\partial u/\partial x=g(x,y)$ o $\partial u/\partial y=h(x,y)$), en algunos lugares de la frontera, entonces este tipo de problema es denominado “problema de Neumann” (Nakamura 1992). El interés de este artículo se basa en crear una herramienta en línea, la cual, haga el planteamiento del problema con valores en la frontera del tipo Dirichlet en dos dimensiones, para el mismo ser resuelto por algún método numérico, de modo que se pueden ingresar dichos valores en la frontera y el mismo, calcule y muestra los valores de “ u ” en el interior del sistema físico en condiciones estables. Vale la pena mencionar que los usos de esta herramienta pueden ser tanto académicos como investigativos, dependiendo, si el mismo se adapta a los parámetros impuestos por los profesores o investigadores.

MATERIALES Y MÉTODOS

Ecuaciones de diferencias

Para resolver la ecuación diferencial parcial, por métodos numéricos, se utilizó el método de diferencias finitas (Pérez & Gutiérrez 2001), ya que dispone de numerosos métodos de solución eficientes, fáciles de vectorizar, por lo que se adapta a la simetría cartesiana (Nakamura 1992), también debe hacerse énfasis, en que el método usado fue directo no iterativo.

Ahora bien, posterior a plantear las expresiones (1) y (2), se procedió a realizar las segundas derivadas parciales utilizando diferencias centrales (Zill & Cullen 2009). Debe tenerse presente que este método es válido en este modelo, debido al hecho de que “ $u(x,y)$ ” se definió continua y por ende, los límites por la izquierda y por la derecha convergen, así como también sus primeras derivadas (Stewart 2002).

Como primer paso, se calculó las primeras derivadas con el método de incrementos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{h} \quad (4)$$

Finalmente, se complementó el método de diferencias centrales

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} \right] - \left[\frac{u(x+h-h,y) - u(x-h,y)}{h} \right]}{h} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{h} \right] - \left[\frac{u(x,y+h-h) - u(x,y-h)}{h} \right]}{h} \quad (6)$$



Con lo cual se obtuvo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)}{h^2} \quad (8)$$

Al Reemplazarse los resultados (7) y (8) en la expresión (1), pero teniendo en cuenta al límite de “ h ”, se obtuvo lo siguiente

$$\frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2} + \frac{u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)}{h^2} = 0 \quad (9)$$

Multiplicando la expresión (9) por “ h^2 ”

$$u(x+h,y) + u(x,y+h) - 4u(x,y) + u(x-h,y) + u(x,y-h) = 0 \quad (10)$$

Y al discretizar “ h ”, se puede manejar los diferentes valores de “ u ” con subíndices de la siguiente forma

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} = 0 \quad (11)$$

Para darle una mejor interpretación a la expresión (11), se construyó la siguiente malla 6×6 (figura 1). En dicha malla, los valores en color turquesa representan los valores que toma la función “ u ” en las regiones que no son fronteras del sistema. Por consiguiente, los valores en color amarillo representan los valores que toma la función “ u ” en las fronteras de dicho sistema físico. Por otro lado, se tomó la expresión (11) y se reacomodó de la siguiente forma

$$u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{4} \quad (12)$$

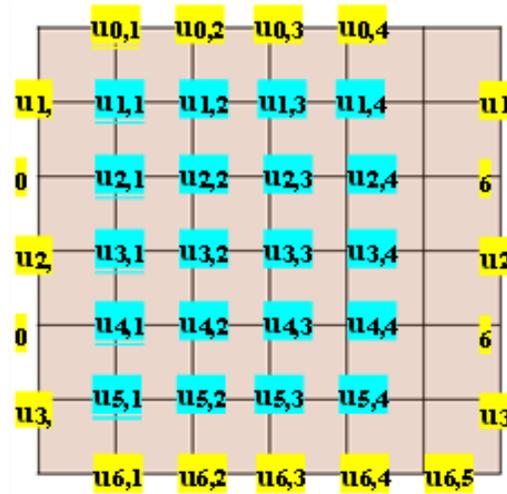
$$\text{Aquí, se realizó el ajuste } i = 1, 2, \dots, 5 \quad \text{y} \quad j = 1, 2, \dots, 5 \quad (13)$$

Se puede apreciar que para calcular un valor interior “ $u_{i,j}$ ” en la malla, el procedimiento es equivalente a calcular el promedio de los valores adyacentes más cercanos a dicho punto “ $u_{i,j}$ ” (Zill & Cullen 2009).



Figura 1.

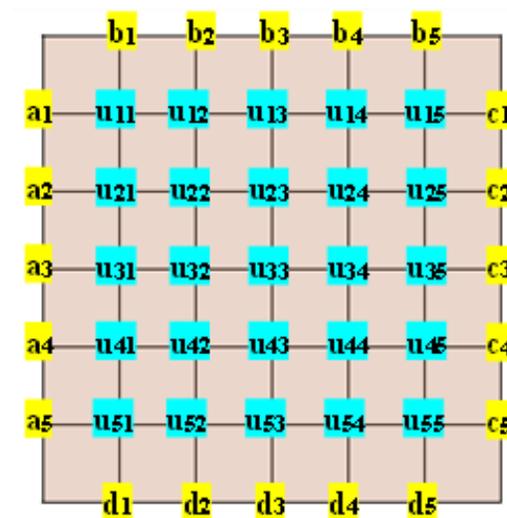
La malla 6×6 representa los valores de la función “ u ” en una distribución discreta y uniforme.



Con objetivo de mostrar la malla de la figura 1 más simple a la vista, se presenta la misma de la siguiente forma.

Figura 2.

Malla de la figura 1 mostrada de forma más simple.

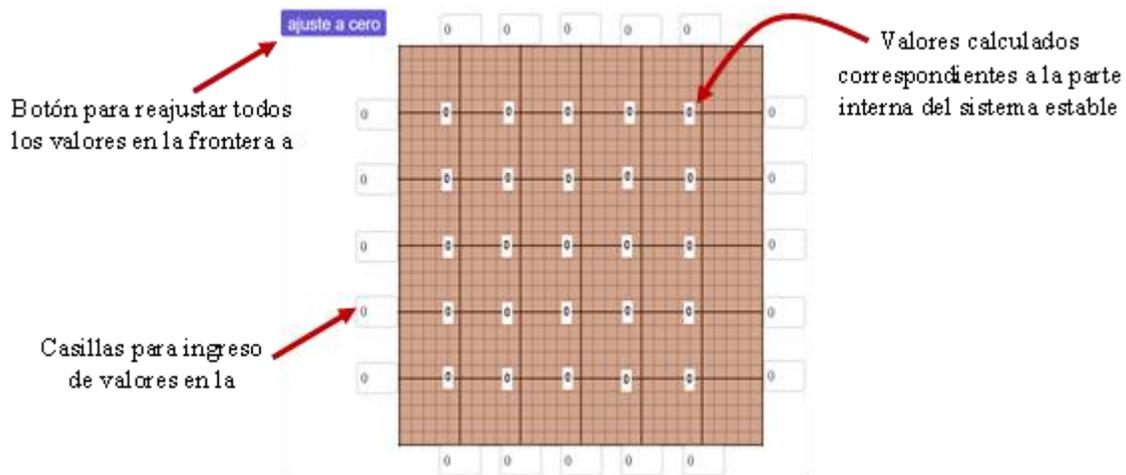


Determinante (Matriz)

El programa utiliza la fórmula de Leibniz para calcular determinantes y posteriormente, este valor es almacenado en una variable que genera el software automáticamente. Como ya se mencionó, utilizando la regla de Cramer, se calculó los valores interiores del sistema estable, para lo cual fue necesario dichos valores generados automáticamente. Finalmente, se diseñó el siguiente formato de presentación para esta herramienta en línea.

Figura 3.

Diseño o formato de presentación de esta herramienta en línea.



Término de discrepancia entre el modelo analítico y el modelo numérico

Las expresiones (7), (8) y (11) generaron suspicacia, esto, debido al hecho de que inicialmente se planteó “ h ” como una variable continua y tendiente a cero, pero posteriormente se adapta el resultado final a una malla, la cual, es de carácter discreto (Méndez *et. al.* 2015). Por lo que se supuso un factor o término que defina la equivalencia o igualdad, entre la ecuación analítica (expresión 1) y la ecuación en diferencias (expresión 11). Según Solorza *et. al.* (2009), este término se puede visualizar utilizando una expansión en serie de Taylor, de la siguiente forma. Primero se planteó dicha expansión de la función “ $u(x, y)$ ” de manera parcial, es decir, se buscó la convergencia alrededor del punto “ x_0 ” con “ y ” constante, para después buscar la convergencia alrededor del punto “ y_0 ” con “ x ” constante, lo que sería

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^i u(x_0, y)}{\partial x^i} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \quad (14)$$

En donde se hizo el siguiente ajuste de variable



$$x = x_0 + h \quad (15)$$

Con lo que se obtuvo

$$u(x_0 + h, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^i u(x_0, y) h^i}{\partial x^i i!} \quad (16)$$

Posterior a esto, se procedió a mostrar de forma explícita los tres primeros términos de esta serie y el resto se dejó reducido con el signo de suma discreta. Adicional a esto, se deseaba plantear una derivada por método de incrementos (Stewart 2002) utilizando algunos términos de dicha serie. Para tal fin, se realizaron los siguientes pasos

$$u(x_0 + h, y) = u(x_0, y) + \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x} h + \frac{\partial^2 u(x_0, y) h^2}{\partial x^2 2!} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\partial^i u(x_0, y) h^i}{\partial x^i i!} \quad (17)$$

Despejando y dividiendo entre “h”

$$\frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x_0, y) h}{\partial x^2 2!} = \frac{u(x_0+h, y) - u(x_0, y)}{h} - \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\partial^i u(x_0, y) h^{i-1}}{\partial x^i i!} \quad (18)$$

Al seguir los pasos equivalentes para la variable “y”, se obtiene

$$\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial^2 u(x, y_0) h}{\partial y^2 2!} = \frac{u(x, y_0+h) - u(x, y_0)}{h} - \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\partial^i u(x, y_0) h^{i-1}}{\partial y^i i!} \quad (19)$$

Se planteó de nuevo la expresión (14) pero se realizó ahora el siguiente ajuste de “x”

$$x = x_0 - h \quad (20)$$

$$u(x_0 - h, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^i u(x_0, y) (-1)^i h^i}{\partial x^i i!} \quad (21)$$

$$u(x_0 - h, y) = u(x_0, y) - \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x} h + \frac{\partial^2 u(x_0, y) h^2}{\partial x^2 2!} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\partial^i u(x_0, y) (-1)^i h^i}{\partial x^i i!} \quad (22)$$

Una vez más se utilizó el método por incrementos, dando como resultado

$$\frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u(x_0, y) h}{\partial x^2 2!} = \frac{u(x_0, y) - u(x_0 - h, y)}{h} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\partial^i u(x_0, y) (-1)^i h^{i-1}}{\partial x^i i!} \quad (23)$$

Así como en la expresión (19) se puede llegar a la siguiente equivalencia para “y”

$$\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial^2 u(x, y_0) h}{\partial y^2 2!} = \frac{u(x, y_0) - u(x, y_0 - h)}{h} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\partial^i u(x, y_0) (-1)^i h^{i-1}}{\partial y^i i!} \quad (24)$$

Se procedió ahora, a restar las expresiones (18) y (23), además de dividir el resultado entre “h”. Con lo que se llegó al siguiente resultado



$$\frac{\partial^2 u(x_0, y)}{\partial x^2} = \frac{u(x_0+h, y) - 2u(x_0, y) + u(x_0-h, y)}{h^2} - \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\partial^i u(x_0, y)}{\partial x^i} \frac{h^{i-2}}{i!} [(-1)^i + 1] \quad (25)$$

Se pudo apreciar de la expresión (25), que todos los términos de la serie que tienen una “ i ” impar, son anulados. Por otro lado, se obtuvo un resultado similar al restar las expresiones (19) y (24), para posteriormente, tal como antes, restarle “ h ”.

$$\frac{\partial^2 u(x, y_0)}{\partial y^2} = \frac{u(x, y_0+h) - 2u(x, y_0) + u(x, y_0-h)}{h^2} - \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\partial^i u(x, y_0)}{\partial y^i} \frac{h^{i-2}}{i!} [(-1)^i + 1] \quad (26)$$

Al sumar las expresiones (25) y (26), para aplicarla sobre puntos arbitrarios $P(x, y)$, se llegó a lo siguiente

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{u(x+h, y) + u(x, y+h) - 4u(x, y) + u(x-h, y) + u(x, y-h)}{h^2} - \sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{\partial^i u(x, y)}{\partial x^i} + \frac{\partial^i u(x, y)}{\partial y^i} \right) \frac{h^{i-2}}{i!} [(-1)^i + 1] \quad (27)$$

El modelo analítico que describe este sistema estable es la ecuación de Laplace, por lo que, para referirse a dicha ecuación se utilizó las letras

$$MA = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \quad (28)$$

De forma similar, para hacer referencia al modelo discreto (diferencias finitas) correspondiente a este sistema estable, se utilizó las siguientes letras

$$MD = \frac{u(x+h, y) + u(x, y+h) - 4u(x, y) + u(x-h, y) + u(x, y-h)}{h^2} \quad (29)$$

El término faltante, fue denominado “término de discrepancia”, el cual se le asignó las letras

$$TD = - \sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{\partial^i u(x, y)}{\partial x^i} + \frac{\partial^i u(x, y)}{\partial y^i} \right) \frac{h^{i-2}}{i!} [(-1)^i + 1] \quad (30)$$

Al reescribir de nuevo estos tres términos bajo esta simbología, se tiene lo siguiente

$$MA = MD + TD \quad (31)$$

El término TD es un factor que construye la aproximación de la ecuación en diferencias finitas a la ecuación de Laplace (Solorza *et. al.* (2009)). Se supone que, si “ h ” tiende a cero, entonces ambos términos de la derecha en la expresión (31), también deben tender a cero. Para analizar el comportamiento de dicho término de discrepancia, se utilizó el primer término no nulo de esta serie de potencias, lo que sería



$$TD = -2 \left(\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} \right) \frac{h^{4-2}}{4!} \quad (32)$$

$$TD = - \left(\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} \right) \frac{h^2}{12} \quad (33)$$

Para continuar este análisis, se recurrió al uso de la solución general (real) de la ecuación de Laplace, por lo que, las constantes en esta solución analítica dependen de las condiciones en la frontera y esto, sería de gran ayuda en la interpretación de algún sistema estable bajo condiciones de frontera del tipo Dirichlet. Por otro lado, para simplificar esta interpretación del fenómeno, se supusieron condiciones homogéneas en la frontera, permitiendo aplicar el método de separación de variables, lo que conduce a la siguiente solución general

$$u(x, y) = [Ae^{kx} + Be^{-kx}] \cos(ky - \theta) \quad (34)$$

Ahora bien, al realizar las derivadas parciales de orden cuatro y sumando las mismas, se obtuvo respectivamente

$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} = 2k^4 [Ae^{kx} + Be^{-kx}] \cos(ky - \theta) \quad (35)$$

Al haber introducido este desarrollo analítico en el término de discrepancia, mostrada en la expresión (33), se obtuvo

$$TD = - \frac{k^4 h^2}{6} [Ae^{kx} + Be^{-kx}] \cos(ky - \theta) \quad (36)$$

Los parámetros k , A , B y θ son definidos por las condiciones de contorno, sin embargo, el parámetro h no depende de dichas condiciones de fronteras, ya que fue impuesta con el fin de describir el modelo discreto de la ecuación de Laplace, utilizando el método de diferencias finitas. Bajo esta perspectiva, el término en cuestión depende de estos parámetros, antes mencionados, la posición en la malla y del cuadrado de h , es decir

$$TD = h^2 f(k, A, B, \theta, x, y) \quad (37)$$

Fue evidente de que, al subdividir la malla en secciones más pequeñas, es decir, utilizar una h más pequeña, hace que el modelo discreto se aproxime más al modelo continuo. Por otro lado, el conjunto de puntos $P(x, y)$ tomarán valores discretos. Adicional a esto, si la longitud de los lados de la malla mostrada en la figura 1 es “ L ”, las coordenadas cartesianas de dichos

puntos se escriben de la siguiente forma

$$x_i = ihL \quad y_j = jhL \quad (38)$$



Para esta configuración se impuso

$$h = 1/6 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq i \leq 6 \quad 0 \leq j \leq 6 \quad (39)$$

Con el objetivo de hacer una representación cuantitativa del comportamiento del término de discrepancia sobre toda la malla, se procedió a realizar mapas de contorno con la ayuda del software Surfer versión 13.6.618, en el cual se ajustó los parámetros mencionados de la siguiente forma

Figura 4.

Con este ajuste el término de discrepancia varía en un rango entre -0,75 y 0,4.

Tabla 1

Ajuste No. 1

Parámetro	Valor ajustado
k	$2\pi/3$
L	1
A	1
B	1
θ	0

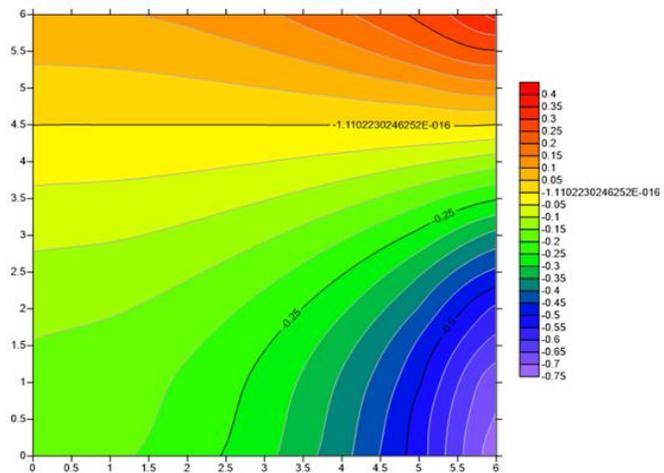


Figura 5.

Con este ajuste el término de discrepancia varía en un rango entre -0,145 y 0,005.

Tabla 2

Ajuste No. 2

Parámetro	Valor ajustado
k	$2\pi/4$
L	1
A	1
B	1
θ	0

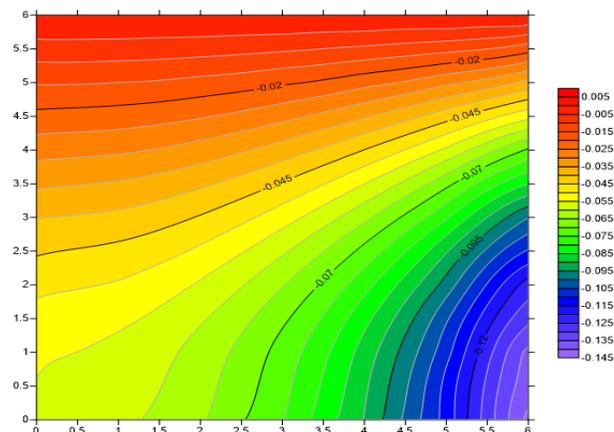


Figura 6.

Con este ajuste el término de discrepancia varía en un rango entre -0,044 y -0,006.

Tabla 3
Ajuste No. 3

Parámetro	Valor ajustado
k	$2\pi/5$
L	1
A	1
B	1
θ	0

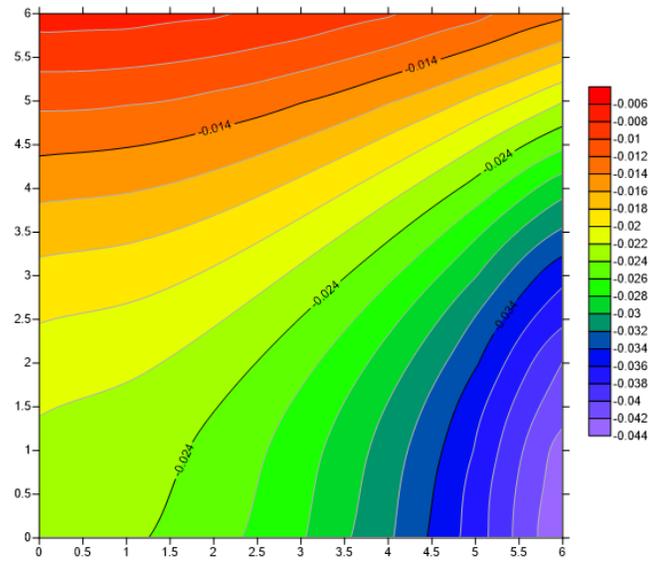
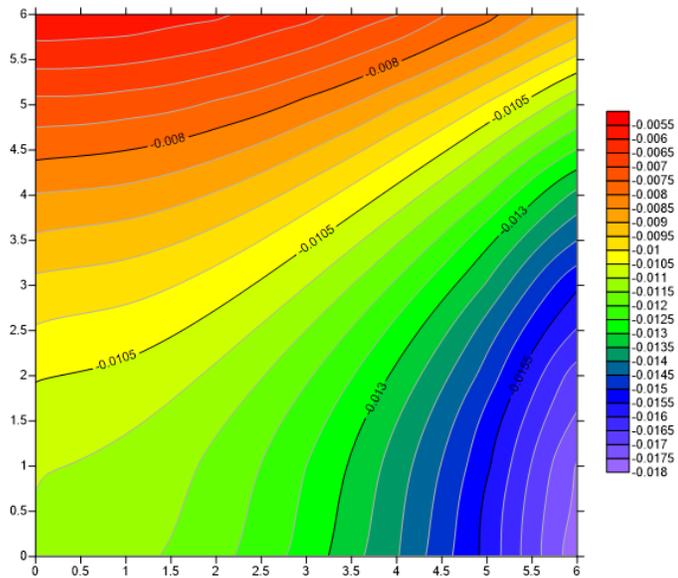


Figura 7.

Con este ajuste el término de discrepancia varía en un rango entre -0,018 y -0,0055.

Tabla 4
Ajuste No. 4

Parámetro	Valor ajustado
k	$2\pi/6$
L	1
A	1
B	1
θ	0



Reporte de la regresión plana del tipo: $Z = \alpha X + \beta Y + \gamma$

Fitted Parameters

α	β	γ
Parameter Value: -0,000898073241222	0,00113539084511	-0,0116905003197
Standard Error: $6,74678242859 \times 10^{-5}$	$6,74678242859 \times 10^{-5}$	0,000316452146312

Inter-Parameter Correlations

α	β	γ
α : 1,000	-0,000	-0,640
β : -0,000	1,000	-0,640
γ : -0,640	-0,640	1,000

ANOVA Table

Source	df	Sum of Squares	Mean Square	F
Regression:	2	0,000410746991881	0,000205373495941	230,194484779
Residual:	46	$4,10399963419 \times 10^{-5}$	$8,92173833519 \times 10^{-7}$	
Total:	48	0,000451786988223		

Coefficient of Multiple Determination (R^2): 0,909160738552

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se programó una herramienta en línea y gratuita, en la plataforma Geogebra. La cual está disponible en el siguiente link <https://www.geogebra.org/m/rmwrxxsa>. Esta herramienta resuelve la ecuación de Laplace por método directo, no por método iterativo, lo que ahorra mucha más memoria (Nakamura 1992). El sistema físico estable a tratar debe abordarse en coordenadas cartesianas. Por otro lado, se deben introducir 20 valores en la frontera para calcular 25 valores en el interior de dicho sistema físico. En la expresión (12), se aprecia que para calcular cada valor interior se recurre al valor promedio de los valores adyacentes más cercanos a dicho punto interior. Por lo que las proximidades entre los puntos afectan la veracidad de los valores calculados (Bayron *et. al.* 2006). Por consiguiente, el tamaño de la malla está relacionado con la precisión de los valores interiores calculados, ya que en la ecuación (31) se planteó un término de discrepancia TD que influye en la aproximación de la ecuación en diferencias que representa a la ecuación de Laplace. Tal como se aprecia en la



expresión (33), dicho término está en función del parámetro “ h ” y de la derivada parcial de orden cuatro de la función “ u ”, la cual representa al sistema físico. Se pudo notar que, si la función “ u ” cambia de manera suave, el TD depende en gran parte del parámetro “ h ”. Sin embargo, con el objetivo de hacer más explícito el comportamiento del TD bajo las condiciones impuestas en el sistema discreto y tomando en cuenta la solución general de la ecuación de Laplace, se pudo apreciar, a través de una gráfica de barras (figura 8), cómo varía dicho término de discrepancia al variar el parámetro k , esto, unificando los resultados mostrados en los ajustes 1, 2, 3 y 4 e introducidos en la tabla 5.

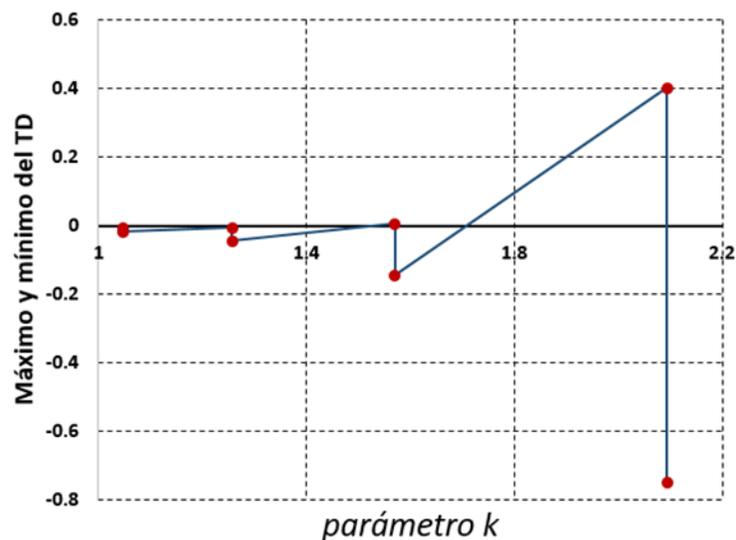
Tabla 5

Valores máximos y mínimos tomados por el término de discrepancia en función de los valores correspondientes del parámetro k

	Parámetro k			
	$2\pi/3$	$2\pi/4$	$2\pi/5$	$2\pi/6$
Valor mínimo	-0,75	-0,145	-0,044	-0,018
Valor máximo	0,4	0,005	-0,006	-0,0055

Figura 8.

Valores máximo y mínimo del TD vs valores del parámetro k .



CONCLUSIONES

Esta herramienta en línea proyecta un uso de carácter académico o investigativo. Sin embargo, tiene que haber una correspondencia entre las limitaciones de este simulador y los parámetros o condiciones impuestos por un profesor o un investigador para el estudio de un sistema físico estable. En este caso, fácilmente se pudo apreciar que mientras el parámetro “ h ” sea menor, el término de discrepancia se irá reduciendo, de manera que mejora la aproximación del método numérico. Por otro lado, existen ventajas siempre que se utilicen simuladores, ya que utilizar directamente medidores en algunos casos acarrea un método invasivo al sistema o un alto costo en equipos. Resulta evidente que el carácter discreto de las soluciones numéricas limita el conocimiento total del sistema, ya que los sistemas físicos son de carácter continuo en la distribución de sus valores, en la mayoría de los casos (Tifa De Jesús & Toribio, J. 2021). Pero hay algunos casos, en que el conocimiento de algunos valores particulares del sistema físico, ayudan a describir la forma en que deben abordarse los mismos para su estudio más adecuado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bayron, J., Cossio, J., y Vélez, C. (2006), "Existencia de soluciones para un problema de Dirichlet sublineal." *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, Vol. XIV, núm.1, pp.29-34. ISSN: 0120-6788.
- Espinoza, M. (2003), “Dos contribuciones sobre la estabilidad y el determinismo de los sistemas”. *Revista Límite de filosofía y psicología*, ISSN 0718-1361, ISSN-e 0718-5065, No. 10, pp. 5-32.
- Méndez, L., Orozco, G. y Fonseca F. (2015), “Discretización en diferencias finitas de la ecuación de Laplace y Poisson. Aplicación a un anillo circular (dona)”. *Revista Ciencia en Desarrollo*, ISSN 0121-7488, 6(2).
- Nakamura, S. (1992). *Métodos Numéricos Aplicados con Software*. Prentice-Hall. México.
- Pacheco, M., Honorato, y G., Mercado, A. (2018). El problema de Dirichlet para elipsoides [Tesis de Grado]. Universidad de Valparaíso, Chile.
- Pérez, A. & Gutiérrez, J. (2001), “Ecuaciones en diferencias. Planteamiento general”. *Revista de Comunicación Vivat Academia*, ISSN: 1575-2844, IV(31), pp. 1-21.
- Poole, D. (2011). *Álgebra lineal. Una introducción moderna*. Tercera Edición. Editorial CENGAGE Learning.



Ríos I., D., Ríos I., S., Martín J., J. (2000). *Simulación. Métodos y aplicaciones*. Editorial RA-MA.

Segundo, G. (2010), “Solución numérica de la ecuación de Laplace”, Editorial ANEP CFE Instituto de Profesores “Artigas”.

Solorza, S., Yee-Romero, C., Jordan-Aramburo, A. y Cardeña-Sánchez, S. (2009). El término de error en los esquemas de diferencias finitas. *Educatio Siglo XXI*, 4 (1), 168-173.

Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. Cuarta Edición. Editorial Thomson Learning.

Tifa De Jesús, P. N., & Toribio, J. (2021), “Solución equivalente del problema de Dirichlet usando transformada de Legendre y funciones de Green, representada por la fórmula integral de Poisson”. *Latin-American Journal of Physics Education*. ISSN 1870-9095, 15(4), pp. 4301 (1-5).

Zill, D. G., Cullen, M. R., (2009). *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*. Séptima edición. Editorial CENGAGE Learning.

