Tecnociencia, Vol. 26, N°2: 126-140
Julio-Diciembre 2024
ISSN L 2415-0940

ANÁLISIS DETALLADO DE LOS PROCEDIMIENTOS EMPLEADOS POR LEONHARD EULER PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG, SU RELACIÓN CON EL ORIGEN DE LA TEORÍA DE GRAFOS Y LOS OBJETIVOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DETAILED ANALYSIS OF THE PROCEDURES USED BY LEONHARD EULER TO SOLVE THE KÖNIGSBERG BRIDGE PROBLEM, ITS RELATIONSHIP WITH THE ORIGEN OF GRAPH THEORY AND THE OBJECTIVES OF MATHEMATICAL EDUCATION

Darío Herrera Díaz
Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática, Panamá. dario.herrera@up.ac.pa , https://orcid.org/0000-0003-4792-3374

Fecha de recepción: 27 de febrero de 2024
Fecha de aceptación: 3 de mayo de 2024

DOI HTTPS://DOI.ORG/10.48204/J.TECNO.V26N2.A5407

RESUMEN

Se analizan minuciosamente los procedimientos que empleó Leonhard Euler para demostrar la irresolubilidad del problema de los puentes de Königsberg y para determinar la posibilidad de recorrer cualquier configuración de aguas y puentes. Simultáneamente, se presenta la formalización matemática de estos procedimientos en el contexto de la Teoría de Grafos. El análisis de contenido reveló que Euler empleó, principalmente, tres objetivos, en la actualidad, de la Educación Matemática para la solución del problema de los puentes de Königsberg, a saber: la modelización, la búsqueda de patrones y la argumentación; mientras que, las ideas empleadas por él, para determinar si es posible recorrer cualquier configuración de aguas y puentes, dieron origen al primer teorema de la Teoría de Grafos.

PALABRAS CLAVES

Königsberg, puentes, grafos, objetivos, Educación Matemática.

ABSTRACT

Leonhard Euler's procedures for proving the unsolvability of the Königsberg bridge problem and for determining the possibility of traversing any configuration of waters and bridges are analyzed in detail. At the same time, the mathematical formalization of these procedures is presented within the context of Graph Theory.

The content analysis revealed that Euler primarily employed three current objectives of Mathematical Education for solving the Königsberg Bridges problem, namely: modeling, pattern seeking, and argumentation. Meanwhile, the ideas he used to determine the possibility of traversing any configuration of waters and bridges gave rise to the first theorem of Graph Theory

KEY WORDS

Königsberg, bridges, graphs, objectives, Mathematical Education.

INTRODUCCIÓN

Los intentos por parte de los habitantes de una ciudad, a principios del siglo XVIII, de caminar por las cuatro zonas en que esta quedaba dividida, por un río que la atravesaba, y de pasar, una sola vez, por cada uno de los siete puentes que conectaban las regiones, dio origen a lo que en la actualidad se conoce como el problema de los puentes de Königsberg.

El matemático suizo Leonhard Euler demostró, recurriendo al razonamiento lógico deductivo, que el problema de los puentes de Königsberg es irresoluble, y el análisis empleado por él dio origen a la rama de la Matemática denominada, hoy en día, Teoría de Grafos (Hevia, 1996; Nottoli, 1998; Núñez, 2004; Pérez-Alcazar & Castro-Chadid, 2006; Paoletti, 2011; Espitia, 2020).

Este trabajo examina detenidamente los procedimientos desarrollados por Euler en su artículo titulado "Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinensis", el cual está dividido en 21 párrafos (Euler, 1736). En dicho artículo Euler demostró la irresolubilidad del problema de los puentes de Königsberg y proporcionó lineamientos para recorrer cualquier configuración de aguas y puentes. Además, se detalla la formalización matemática actual de los resultados presentados por Euler, destacando los objetivos de la Educación Matemática que se encuentran en estos y las demostraciones de los corolarios que se desprenden del primer teorema de la Teoría de Grafos.

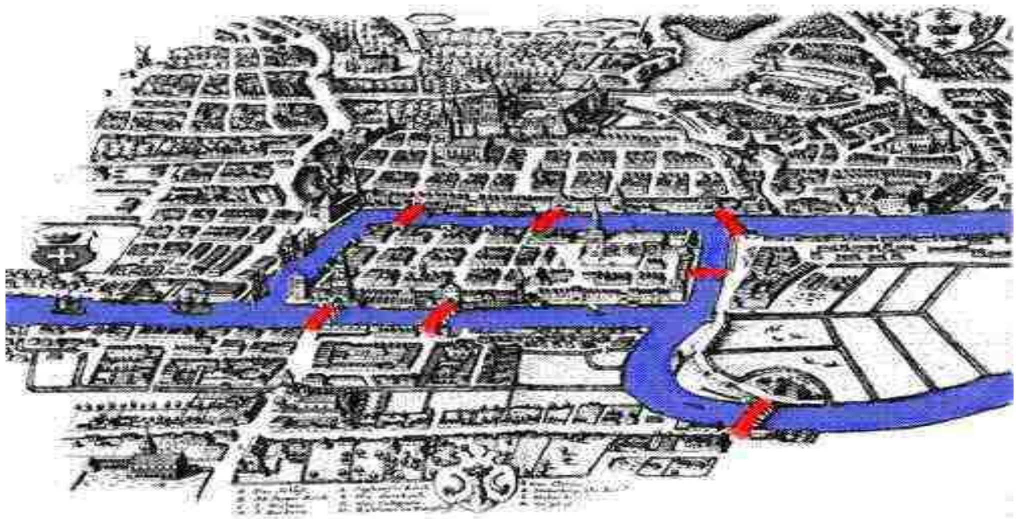
DESARROLLO

1. Origen del problema de los siete puentes de Königsberg

Hasta 1945, la ciudad de Königsberg constituía parte de la nación de Prusia; posteriormente paso a denominarse Kaliningrado y, en la actualidad, es territorio de la Federación de Rusia. La ciudad está dividida en cuatro áreas por un río denominado Pregel, en los tiempos de Königsberg, y Pregolya, hoy en día.

Para el siglo XVIII, las cuatro áreas que formaban Königsberg se conectaban a través de siete puentes denominados, según Paoletti (2011): puente de Herrero, puente de Conexión, puente Verde, puente de Comerciante, puente de Madera, puente Alto y puente de Miel (ver Figura 1).

Figura 1
Una vista de Königsberg que muestra los siete puentes sobre el río Pregel



Nota. Tomado de "*La solución de Leonard Euler al problema del puente de Königsberg*", por T. Paoletti, 2011, Mathematical Association of America.

Se cuenta que, a manera de entretenimiento, los habitantes de Königsberg trataban de encontrar un camino que les permitiera recorrer las cuatro zonas de la ciudad, atravesando cada uno de los siete puentes una y sólo una vez (Grimaldi, 1998; Núñez, 2004; Pickover, 2009; Paoletti, 2011). De aquí surge el problema de los puentes de Königsberg (o el problema de los siete puentes de Königsberg), es decir: ¿*Será posible caminar por todas las zonas de la ciudad cruzando cada uno de los siete puentes exactamente una vez*?

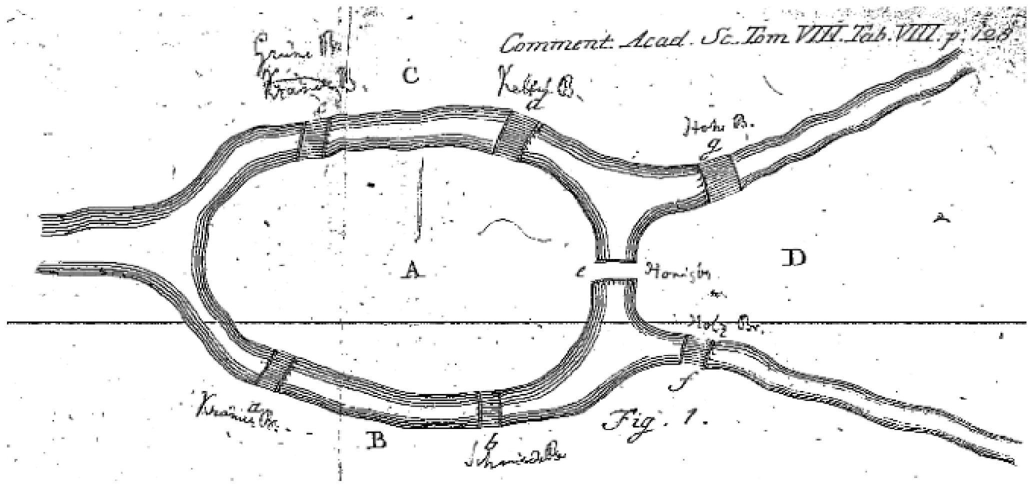
2. Procedimiento desarrollado por Euler para resolver el problema de los siete puentes de Königsberg

Euler, al poco tiempo de enterarse del problema de los siete puentes de Königsberg, presentó un informe a la Academia rusa de San Petersburgo, en donde demostró que el mismo es irresoluble (Núñez, 2004). Posteriormente, en 1736, proporcionó un método general para resolver problemas del mismo tipo. En los veintiún párrafos del artículo Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinensis (La solución de un problema relacionado con la geometría de la posición), Euler procede como sigue:

I. Proporciona un esquema del problema (ver Figura 2)

Figura 2

"Modelo matemático" creado por Euler para el problema de los puentes de Königsberg



Nota. Figura 1 de Euler en Solutio problematis ad geometriam situs pertinensis. Tomado de "*La solución de Leonard Euler al problema del puente de Königsberg*", por T. Paoletti, 2011, Mathematical Association of America.

II. Las cuatro regiones de Königsberg las representó mediante las letras mayúsculas A, B, C y D.

III. Los siete puentes los representó mediante las letras minúsculas a, b, c, d, e, f y g.

IV. Las rutas o caminos las representa mediante una sucesión de letras, así:

   i. AB simboliza un viaje que comenzó en la región A y terminó en la región B, por el puente a o b (un puente, dos letras).

   ii. ABD representa la ruta que va de A a B, y posteriormente de B a D; atravesando dos puentes (dos puentes, tres letras).

   iii. $ABDC$ representa la ruta que va de A a B, de B a D, y de D a C; atravesando tres puentes (tres puentes, cuatro letras).

   iv. $CADBA$ representaría el siguiente camino: de la región C a la A (por el puente c o d), de la región A a la D (por el puente e), de la región D a la B (por el puente f), y de la región B a la A (por el puente a o b). Obsérvese que se atraviesan cuatro puentes y en la representación del camino hay cinco letras.

Por i, ii, iii, y iv, Euler llega a la conclusión: la sucesión de letras que represente un camino que recorra la ciudad de Königsberg, cruzando los siete puentes una sola vez, debe consistir en ocho letras.

Vemos, pues, que Euler crea un modelo matemático para el problema de los puentes de Königsberg, al prescindir del significado real o físico de los elementos de este, asociando las regiones de la ciudad y los puentes (objetos no matemáticos) con letras mayúsculas y minúsculas, respectivamente ("objetos matemáticos"). También, recurre a la búsqueda de patrones para determinar la sucesión de letras (cantidad de letras) que representan las rutas o caminos, es decir, a través de la secuencia lógica $i, ii, iii,$ y iv de IV llega a la conclusión que, la cantidad de letras que representa un camino excede en uno a la cantidad de puentes involucrados en la ruta (cruzando cada puente una sola vez).

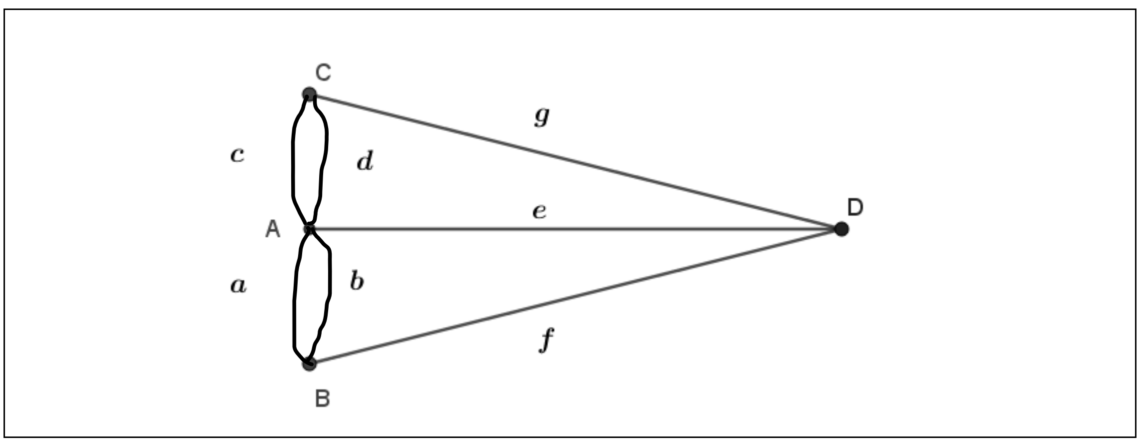
Hoy en día, la modelización y la búsqueda de patrones son dos objetivos de la Educación Matemática que facilitan el conocimiento matemático y el desarrollo del pensamiento en general (Hernández et al., 2001; Lupiañez, 2005; Planas & Alsina, 2009; Alsina, 2020).

Las ideas empleadas por Euler, en la solución de los puentes de Königsberg, se formalizan en la Teoría de Grafos. En vez de utilizar letras mayúsculas para las regiones y letras minúsculas para los puentes, se utilizan puntos y líneas, respectivamente; lo que da origen a la definición de grafo.

Definición 1. Un Grafo $G = (V, E)$ consiste en un conjunto no vacío V llamado conjunto de vértices (nodos, puntos) y un conjunto E de pares ordenados o no ordenados de elementos de V, denominado el conjunto de aristas, tales que hay un mapeo del conjunto E al conjunto de pares ordenados o no ordenados de elementos de V. Si cada arista se asocia con un par no ordenado de vértices, entonces G se llama grafo no dirigido.

El modelo matemático de Euler (ver Figura 2**)** se transforma en lo que hoy conocemos como un grafo, (ver Figura 3), (Grimaldi, 1998).

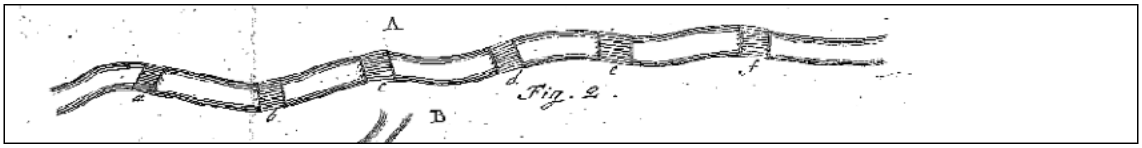
Figura 3
Grafo asociado al problema de los puentes de Königsberg



V. Euler deduce que, en una sucesión que represente un camino, el número de ocurrencias de cada letra, que simboliza una región, depende del número impar de puentes que conducen a cada una de estas masas de tierra. Para explicar su deducción, recurre a un caso más simple de masa de tierra y puentes (ver Figura 4).

Figura 4

"Modelo matemático" creado por Euler para un problema de una sola región, a la cual conducen cualquier número de puentes



Nota. Figura 2 de Euler en Solutio problematis ad geometriam situs pertinensis. Tomado de "*La solución de Leonard Euler al problema del puente de Königsberg*", por T. Paoletti, 2011, Mathematical Association of America.

Apoyándose es este modelo (Figura 4), Euler evalúa las condiciones en la que se recorre la región A. Para tal efecto, denotemos AaB la ruta que va de A a B por el puente a, BbA la ruta que va de B a A por el puente b y así sucesivamente. Los resultados de la evaluación se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1

Deducciones del modelo creado por Euler para un problema de una sola región

Ruta	Número de puentes que se cruzan	Número de apariciones de la letra A
AaB	1	1
$AaBbAcB$	3	2
$AaBbAcBdAeB$	5	3

De donde infiere que:

i. Si el puente a es el único que conectara con la región A, entonces A aparecería una vez en la representación del camino buscado. La ruta iniciaría o terminaría en A, dando lugar a una sola aparición de la letra A.

ii. Si hubiese tres puentes que condujeran a la región A (digamos $a, b,$ y c), entonces A aparecería dos veces en la representación del camino buscado. Si la ruta inicia en A, al salir (primera aparición de A) por el puente, digamos a, tendríamos que regresar (segunda aparición de A) por el puente b e inmediatamente salir por el puente c. En caso contrario, al entrar (primera aparición de A) por el primer puente, saldríamos por el segundo puente, para finalmente volver a entrar (segunda aparición) por el tercer puente, y finalizar el recorrido.

iii. Por i, ii , y como hay cinco puentes que conducen a la región A (véanse las Figura 2 o Figura 3), entonces la letra A aparecería tres veces en la representación del camino buscado. Si iniciamos en A y salimos (primera aparición de A) por el primer puente, posteriormente regresaríamos (segunda aparición de A) por el segundo puente e inmediatamente saldríamos por el tercer puente, luego volveríamos a regresar a la región A por el cuarto puente (tercera aparición de A) para salir por el quinto puente. En caso contrario, la ruta buscada terminaría en la región A.

Por i, ii y iii , Euler concluye:

iv. *Si el número de puentes, m, que conducen a un área es impar, por ejemplo, a la región A, entonces la letra A debe aparecer $\frac{m+1}{2}$ veces en la representación del camino buscado.*

v. Como hay tres puentes que conducen a cada una de las regiones B, C y D; estas letras deben aparecer dos veces, cada una, en la representación del camino buscado y, por iii y iv, la ruta quedaría simbolizada por nueve letras. Esto contradice lo establecido en IV.

Por lo anterior, no es posible caminar por todas las zonas de la ciudad de Königsberg cruzando cada uno de los siete puentes exactamente una vez.

En este punto, se observa como Euler justifica la respuesta al problema, es decir, elabora argumentos que explican sus afirmaciones. Igualmente, en la actualidad, la Educación Matemática tiene como uno de sus objetivos fundamentales que los estudiantes empleen la argumentación, ya sea para justificar los procedimientos matemáticos al resolver problemas o bien para participar en la reconstrucción del conocimiento matemático (Hernández et al., 2001; Lupiañez, 2005; Llinares, 2013; Ríos-Cuesta, 2021)

Lo expuesto en V queda formalizado en la Teoría de Grafo como sigue:

Definición 2. El grado de un vértice en un grafo no dirigido es el número de aristas incidentes en él, con la excepción de que un lazo en un vértice contribuye dos veces al grado de ese vértice. El grado de un vértice se denota por medio de $grad(v)$.

La definición corresponde al número de ocurrencias de la letra A (en una sucesión que represente un camino), dependiendo del número de puentes que conducen a la región que representa.

Definición 3. Una trayectoria es una sucesión de vértices con la propiedad de que cada vértice es adyacente al siguiente y tal que en la correspondiente sucesión de aristas todas las aristas son distintas. Es permitido que un vértice aparezca en una trayectoria más de una vez.

Definición 4. Un circuito es una trayectoria que comienza y termina en el mismo vértice.

Definición 5. Un grafo es conexo si cualesquiera dos de sus vértices se puede unir por una trayectoria.

Definición 6. Una trayectoria de Euler es una trayectoria que recorre todas las aristas de un grafo conexo. Análogamente, un circuito de Euler es un circuito que recorre todas las aristas de un grafo conexo.

Teorema 1. Existencia de trayectorias de Euler.

a. Si un grafo tiene más de dos vértices de grado impar, entonces no puede tener una trayectoria de Euler
b. Si un grafo conexo tiene exactamente dos vértices de grado impar, entonces tiene por lo menos una trayectoria de Euler. Cualquier trayectoria de Euler debe iniciar en uno de los vértices de grado impar y terminar en el otro.

Teorema 2. Existencia de circuitos de Euler

a. Si en un grafo algún vértice tiene grado impar, entonces no puede tener un circuito de Euler
b. Si todos los vértices de un grafo conexo tienen grado par, entonces hay por lo menos un circuito de Euler.

En el grafo asociado al problema de los puentes de Königsberg (Figura 3) se tiene en total cuatro vértices de grado impar; por lo tanto, no existe una trayectoria de Euler, y menos un circuito de Euler. Luego, es imposible recorrer las cuatro zonas cruzando los siete puentes una sola vez.

3. Procedimiento desarrollado por Euler para determinar si es posible recorrer cualquier configuración de aguas y puentes

Primero determina el número de ocurrencias de una letra, en la representación de un camino buscado, cuando esta representa una región a la cual se puede llegar por un número par de puentes. Procede como sigue:
Sea A una región a la que se llega por un número par de puentes.

Caso I: A es el punto de partida.

- Dos puentes que conectan a la región: A aparecerá dos veces, uno como punto de partida y otro como punto final.
- Cuatro puentes que conectan a la región: A aparecerá tres veces; uno como punto de partida, otro como punto de llegada y salida, y finalmente, el tercero como punto de llegada.

De donde se infiere que el número de ocurrencias de A es:

$$\frac{\text{números de puentes que conducen a } A}{2} + 1$$

Caso II: A no es el punto de partida.

- Dos puentes que conectan a la región: A aparecerá una vez, el viaje tendría que entrar por un puente y salir inmediatamente por el único otro puente disponible.
- Cuatro puentes que conectan a la región: A aparecerá dos veces, ya que se procede como el punto anterior

De donde se infiere que el número de ocurrencias de A es:

$$\frac{\text{números de puentes que conducen a } A}{2}$$

Como se puede partir de una sola área, Euler adopta la fórmula obtenida para el segundo caso. Ahora, para determinar si era posible realizar un recorrido a través de masas de tierra divididas por ríos y conectadas por un número impar o par de puentes, usando cada puente una vez y solo una vez, Euler proporcionó el siguiente procedimiento:

I. Al número total de puentes le suma uno, es decir, si P es el número total de puentes, Euler colocó $P + 1$ al inicio de un "cuadro".
II. En una primera columna colocó las letras mayúsculas que representan las distintas regiones o masas de tierra. Denotémoslas por: $A_1, A_2, \dots, A_n$.
III. Forma una segunda columna con el número de puentes que conducen a cada región. Escribiremos $P(A_i)$ para indicar el número de puentes que conducen a la región A_i.
IV. Señala con un asterisco aquellas letras de las que salen un número par de puentes.
V. Si el número de la segunda columna es impar, lo aumenta en una unidad, y el resultado lo divide entre dos. Si el número de dicha columna es par, lo divide entre dos. Lo que Euler calcula es el número de ocurrencias de las letras que representan las distintas regiones. Así, si denotamos por $N(A_i)$ el número de ocurrencias de la letra A_i se tiene que,

$$N(A_i) = \begin{cases} \frac{P(A_i)+1}{2} & \text{si } P(A_i) \text{ es impar} \\ \frac{P(A_i)}{2} & \text{si } P(A_i) \text{ es par} \end{cases}$$

VI. Crea una tercera columna con los números obtenidos en el paso anterior.
VII. Si la suma de la última columna es menor o igual al número colocado al inicio, $(P+1)$, entonces el problema tendría solución.

En este punto se introduce los que se conoce como la suma de Euler (denotada por E): Suma de los números de ocurrencias de todas las letras que representan las áreas de la configuración. Es decir,

$$E = \sum_{i=1}^{n} N(A_i)$$

La solución al problema de Königsberg, aplicando el método antes descrito, procede como sigue.

Ejemplo 1. Solución, por el método general, al problema de Königsberg

Como hay siete puentes en Königsberg, el número de puentes más uno es igual a **8.** El trabajo realizado por Euler, en el párrafo 14 (Euler, 1736), lo resumimos en la Tabla 2.

Tabla 2
Método general aplicado al problema de Königsberg

Letras que representan las distintas regiones	Número de puentes que conducen a la región	Número de apariciones de la letra en el camino buscado
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

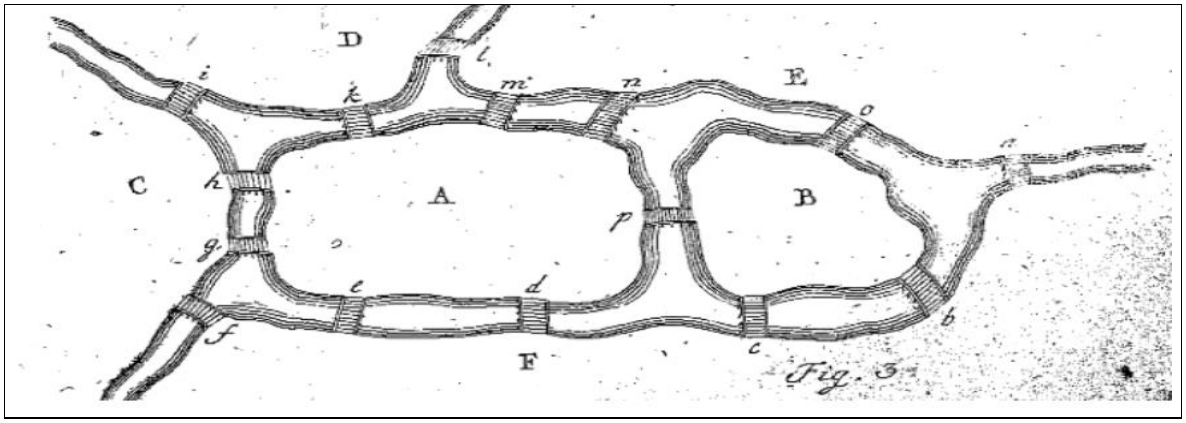
Como la suma de la tercera columna (**9**) es mayor que el número colocado al inicio, el recorrido es imposible atravesando cada puente una sola vez.

Ejemplo 2. Solución a un problema creado por Euler

Euler aplica su método general para determinar si es posible recorrer las regiones de la figura proporcionada por él, atravesando los 15 puentes una sola vez (ver Figura 5).

Figura 5

“Modelo matemático” creado por Euler para cualquier configuración de aguas y puentes



Nota. Figura 3 de Euler en Solutio problematis ad geometriam situs pertinensis. Tomado de “*La solución de Leonard Euler al problema del puente de Königsberg*”, por T. Paoletti, 2011, Mathematical Association of America.

Como hay 15 puentes, el número de puentes más uno es igual a 16. Ordenando los datos en la tabla 3.

Tabla 3

Método general aplicado a un problema creado por Euler

Letras que representan las distintas regiones	Número de puentes que conducen a la región	Número de apariciones de la letra en el camino buscado
A^*	8	4
B^*	4	2
C^*	4	2
D	3	2
E	5	3
F^*	6	3

Como la suma de la tercera columna (16) es igual al número colocado al inicio, el recorrido es posible atravesando cada puente una sola vez.

Posteriormente, Euler señala que:

- La suma de los números en la segunda columna es igual al doble del número total de puentes (lema del apretón de manos), y de acuerdo con Hevia (1996) este es el primer teorema de la Teoría de Grafos. Se tiene entonces que:

Teorema 3: En una configuración de aguas y puentes:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 2P$$

Demostración:
Cada puente se cuenta dos veces en la sumatoria, uno por cada masa de tierra al que está unido.

Consecuencias del teorema 3:

- Como la suma de todos los puentes que conducen a cada región es par, es imposible que haya un número impar de regiones con un número impar de puentes. Esta afirmación se deduce del teorema anterior ya que una suma impar de números impares es también impar, mientras que la suma de números pares es par. Se ha obtenido un corolario del teorema 3.
- Si a todas las regiones llega un número par de puentes, la tercera columna sumara uno menos que el número total de puentes más uno. Entonces, la ruta que recorre todos los puentes de la configuración inicia y termina en la misma región. En efecto,

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 2P$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)}{2} = P$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(A_i)}{2} = P$$

$$\sum_{i=1}^{n} N(A_i) = P$$

$$E = P$$

Para demostrar que la ruta inicia y termina en una misma región, supongamos que se inicia en una región A, pero no termina en A; entonces el número de puentes que conducen a A debe ser impar, lo que es imposible.

- Si hay dos masas de tierra con un número impar de puentes, el viaje siempre será posible, si el viaje comienza en una de las regiones con un número impar de puentes. En efecto: Sean $A_1, \ldots, A_{n-2}$ las regiones a las que se llegan por un número par de puentes y A_{n-1}, A_n las dos regiones a las que se llega por un número impar de puentes. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 2P$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} P(A_i) + P(A_{n-1}) + P(A_n) = 2P$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} P(A_i) + P(A_{n-1}) + 1 + P(A_n) + 1 = 2P + 2$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-2} P(A_i)}{2} + \frac{P(A_{n-1}) + 1}{2} + \frac{P(A_n)}{2} = P + 1$$

$$\sum_{n=1}^{n} N(A_i) = P + 1$$

$$E = P + 1$$

- Si hay cuatro o más masas con un número impar de puentes, entonces es imposible que haya un camino. Si se considera, por ejemplo, cuatro masas de tierra y se procede como en el caso anterior se llega a:

$$E = (P + 1) + 1$$

Dependiendo del resultado de la suma de la tercera columna, Euler señala que:

- Si la suma es igual al número colocado al inicio, el recorrido debe iniciar en una zona no marcada con asterisco, es decir, una zona a la que se puede llegar por un número impar de puentes.
- Si la suma es menor que el número colocado al inicio, el recorrido debe iniciar en una zona marcada con asterisco, es decir, una región a la que se puede llegar por un número par de puentes.

CONCLUSIONES

Los procedimientos desarrollados por Euler para probar que el problema de los puentes de Königsberg es irresoluble, y la generalización de estos a cualquier configuración de aguas y puentes trajo consigo el desarrollo de una rama de la Matemática, entre otras, denominada Teoría de Grafos. Además, muestran cómo es posible construir o reconstruir el conocimiento matemático a partir de nociones elementales (v.gr. encontrar un camino) y un proceso de modelización (al prescindir del significado real o físico de los elementos del problema). La argumentación “euleriana” nos lleva al momento de abordar un problema a: reconocer algo familiar (todas las regiones de la ciudad de Königsberg estaban conectadas por un número impar de puentes), reconocer patrones (número de apariciones de una letra, dependiendo del número de puentes que conecta a la región que representa), establecer casos (número de puentes que conducen a una región sea par o impar, si el recorrido inicia o no en una región determinada). La modelización, búsqueda de patrones y argumentación son objetivos fundamentales de la Educación Matemática contemporánea presentes en el artículo "Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinensis" publicado por Euler en 1736. Euler empleó estos objetivos para demostrar la irresolubilidad del problema de los puentes de Königsberg. Además, en este artículo se introduce el lema del apretón de manos y sus respectivos corolarios, herramientas que permiten determinar de manera eficiente la posibilidad de recorrer cualquier configuración de aguas y puentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, A. 2020. *Revisando la educación matemática infantil: una contribución al Libro Blanco de las Matemáticas.* Edma 0-6: Educación Matemática en la infancia, 9(2): 1-20. Disponible en: https://dugi-doc.udg.edu/bitstream/handle/10256/18962/032488.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Visitado el 3 de marzo de 2023.

Espitia, D. 2020. *Historia de puentes y conexiones: Una introducción a la teoría de redes*. Revista Orinoquia Ciencia y Sociedad, IV: 18-23. Disponible en: http://revistaorinoquia.unitropico.edu.co/wp-content/uploads/2020/10/4.pdf . Visitado el 6 de agosto de 2021.

Euler, L. 1736. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinensis*. Commentarii Academice Scientarum Imperialis Petropolitane, 8: 28-140. Disponible en: file:///G:/Ensayos%20de%20Dar%C3%ADo/Los%20puentes%20de%20konigsberg/Euler_%20Koenigsberg%20bridges%20_%20Maze%20texts.html . Visitado el 8 de septiembre de 2021.

Grimaldi, R.1998. *Matemáticas discretas y combinatoria: Una introducción con aplicaciones*. 3th ed. México: Editorial Pearson.

Hernández, H., Delgado, R., Fernández, B., Valverde, L. & Rodríguez, T. 2001. *Cuestiones de didáctica de la Matemática: Conceptos y Procedimientos en la Educación Polimodal y Superior*. 2th ed. Rosario: Homo Sapiens Ediciones.

Hevia, H. 1996. *El problema de los siete puentes de Königsberg: Leonhard Euler y la Teoría de Grafos*. Educación Matemática, 8 (1): 108-115.

Llinares, S. 2013. *Innovación en la Educación Matemática: más allá de la tecnología*. Modelling in Science Education and Learning, 6(1): 7-19. Disponible en: https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/100643/1819-5668-1-SM.pdf?sequence=1&isAllowed=y Visitado el 3 de marzo de 2023.

Lupiañez, J. 2005. Objetivos y fines de la Educación Matemática: Capacidad y Competencias Matemáticas. Didáctica de la Matemática. Pensamiento numérico:1-12. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/593/1/LupiannezJ05-2799.PDF . Visitado el 2 de febrero de 2023.

Núñez, J. 2004. *Siete puentes, un camino: Königsberg*. Suma, 45: 69-78.

Nottoli, H. 1998. *Teoría de grafos: Aplicaciones al diseño arquitectónico.* Educación Matemática, 10 (3): 109-127.

Paoletti, T. 2011. *La solución de Leonard Euler al problema del puente de Königsberg*. Mathematical Association of America. Disponible en: file:///G:/Ensayos%20de%20Dar%C3%ADo/Los%20puentes%20de%20konigsberg/La%20soluci%C3%B3n%20de%20Leonard%20Euler%20al%20problema%20del%20puente%20de%20Konigsberg%20_%20Asociaci%C3%B3n%20Matem%C3%A1tica%20de%20Am%C3%A9rica.html Visitado el 6 de agosto de 2021.

Pérez-Alcazar, J.H. & Castro-Chadid, I. 2006. *Didáctica Euleriana*. Universitas Scientiarum, 11(1): 59-83. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/3715/1/CuellarTeoriaGeometria2013.pdf Visitado el 6 de agosto de 2021.

Pickover, C. 2009. *El libro de las Matemáticas: De Pitágoras a la 57° dimensión, 250 hitos de la historia de las Matemáticas*. Madrid: Editorial Ilus Books.

Planas, N. & Alsina, A. 2009. *Educación Matemática y buenas prácticas: Infantil, Primaria, secundaria y educación superior*. Barcelona: Editorial GRAÓ.

Ríos-Cuesta, W. 2021. *Argumentación en educación matemática: elementos para el Diseño de estudios desde la revisión bibliográfica*. Revista Amazonia Investiga, 10(41): 96-105. Disponible en:file:///G:/Ensayos%20de%20Dar%C3%ADo/Los%20puentes%20de%20konigsberg/Sobre%20Educacion%20Matem%C3%A1tica/Dialnet-ArgumentacionEnEducacionMatematica-8038405.pdf Visitado el 3 de marzo de 2023.