Tecnociencia 2003, Vol. 5, N° 1.

UNA GENERALIZACIÓN DE LA POTENCIACIÓN RETICULAR

JOSÉ DEL ROSARIO GARRIDO N.
Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Matemáticas, CENIO
email: cenio9@hotmail.com

RESUMEN
En este artículo, utilizando una técnica ideada por Thayse, se introduce una generalización del concepto de potenciación reticular y como subproducto se ofrece una presentación más uniforme de aspectos de la estructura reticular de las funciones discretas, incluyendo algunos resultados adicionales.

PALABRAS CLAVES
Funciones discretas, álgebra de De Morgan, potenciación reticular, cubos, anticubos, intervalo de retículo L, bloques, antibloques, bloque Muehldof.

INTRODUCCIÓN
Se hará referencia a relaciones de $S_1xS_2x...xS_n$ en L, conocidas como funciones discretas, donde los Si (i = 1,2,...,n) y L son conjuntos finitos. La teoría de funciones discretas, desarrollada por Davio, Deschamps y Thayse, comprende un estudio formal, en términos de la estructura de retículo, de anillo o de cuerpo, considerada para los conjuntos Si y L y numerosas aplicaciones a la teoría de circuitos de conmutación, especialmente en problemas de síntesis, la detección de riesgos (hazard) y de fallas de transmisión (fault). Un importante caso particular de estas funciones lo constituyen las funciones booleanas (switching functions). (Rudeanu 1974).

En este artículo, complementando una técnica de Thayse, se introduce una generalización de la noción de potenciación reticular que conduce a una presentación más uniforme de la estructura reticular de las funciones discretas y a ciertos resultados adicionales.

Un álgebra de De Morgan $(L, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ es un retículo distributivo $(L, \vee, \wedge)$ con menor elemento 0 y mayor elemento 1, provisto de un endomorfismo involutivo. Es claro que si $L_1, L_2, ..., L_n$ son álgebras de De Morgan, también lo es el producto cartesiano $L_1xL_2x...xL_n$ con respecto a las operaciones definidas entre componentes. Si L es un álgebra de De Morgan y X un conjunto arbitrario, entonces $L^X = \{ f \,/\, f:X \rightarrow L\}$ es también un álgebra de De Morgan con respecto a las operaciones correspondientes.

En la teoría de funciones discretas, cualquier conjunto finito de cardinalidad r, representado en la forma $L= \{ 0,1,..., r-1 \}$ puede ser provisto de la estructura de anillo de Z_r o bien de la estructura de álgebra de De Morgan $(L, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, r\text{-}1)$ donde

(1.1) $$x \vee y = \max (x, y)$$

(1.2) $$x \wedge y = \min (x, y)$$

(1.3) $$\overline{X} = r - 1 - x$$

Los conjuntos Si (i = 1, 2, ..., n) y L, de cardinales m_i (i = 1,2,...,n) y r respectivamente, el conjunto $S_1xS_2\,x...x\,S_n$ y el conjunto

(2) $$L^{S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n}$$

de funciones discretas, constituyen casos de álgebras de De Morgan, como se ha indicado anteriormente, partiendo de las estructuras de los Si (i = 1,2,...,n) y L dadas por las operaciones (1.1; 1.2 y 1.3). En lo que sigue, todas estas estructuras y la notación serán consideradas tácitamente.

GENERALIZACIÓN DE LA POTENCIACIÓN RETICULAR Y ALGUNAS CONSECUENCIAS

Se incorpora en esta etapa la notación T, $\perp$ introducida por Thayse: T es cualquiera de las operaciones $\vee$, $\wedge$ y $\perp$ es la operación dual de T.

Con e_T y $e_\perp$ se denotan los elementos neutros para T, y $\perp$ respectivamente. Así para cualquier $x \varepsilon L$.

(3) $$x \, T \, e_T = x \perp e_\perp = x$$

Evidentemente $\{e_T, e_\perp\} = \{0, r-1\}$ y $e_\perp = r - 1 - e_T$

Se sugiere ahora la siguiente definición: Para cualquier operación T, cualquier subconjunto A de L y cualquier elemento x de L, la T – potencia $x_T^{(A)}$ está dada por

(4) $$x_T^{(A)} = \begin{cases} e_T & \text{si } x \in A \\ e_\perp & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

En el caso $T = \wedge$, la definición anterior coincide con la de Thayse [Thayse 1978 pag. 92], pero la $\vee$ - potenciación no ha sido aún considerada. Esta nueva definición permite expresar, de manera más compacta, los resultados clásicos de la teoría referente a la estructura de retículo, como se verá seguidamente, mediante algunos ejemplos.

Las siguientes reglas básicas de cálculo pueden verificarse fácilmente

(5) $$x_T^{(A)} = \left| e_T - x_\vee^{(A)} \right| = \left| e_\perp - x_\Lambda^{(A)} \right|,$$

(las barras se refieren al valor absoluto)

(6) $$\overline{x_T^{(A)}} = x_T^{(\bar{A})} = x_\perp^{(A)},$$

(7.1) $$x_T^{\bigcap_{j=1}^{\rho} A_j} = \mathop{T}_{j=1}^{\rho} x_T^{(Aj)},$$

(7.2) $$x_T^{\bigcup_{j=1}^{\rho} Aj} = \mathop{\perp}_{j=1}^{\rho} x_T^{(Aj)},$$

(7.3) $$x_V^{(\overset{\rho}{\underset{j=1}{\Pi}} A_j)} = \overset{\rho}{\underset{j=1}{\perp}} x_V^{(A_j)}, \forall \Pi \in \{\cup, \cap\}$$

(7.4) $$x_\Lambda^{(\overset{\rho}{\underset{j=1}{\Pi}} A_j)} = \overset{\rho}{\underset{j=1}{\mathrm{T}}} x_\Lambda^{(A_j)}, \forall \Pi \in \{\cup, \cap\}$$

En (7.3) y (7.4) ∐ y Π son las operaciones de teoría de conjuntos análogas a T y ⊥ respectivamente. Es decir (∐ y Π) es (U, ∩) ó **(∩,U)** de acuerdo como (T y ⊥) sea (∨, ∧) ó (∧,∨).

En el caso T = ∧, las expresiones (6), (7.1) y (7.2) corresponden respectivamente a las identidades clásicas siguientes [Thayse, 1978].

(6’) $$\overline{x^{(A)}} = x^{(\bar{A})}$$

(7.1’) $$x^{(\overset{\rho}{\underset{j=1}{\cap}} A_j)} = \overset{\rho}{\underset{j=1}{\Lambda}} x^{(Aj)}$$

(7.2’) $$x^{(\overset{\rho}{\underset{j=1}{\cup}} A_j)} = \overset{\rho}{\underset{j=1}{\mathrm{V}}} x^{(Aj)}$$

Se define como T-cubo cualquier función de (2) que admite la forma representativa

(8.1) $$1 \ \mathrm{T} \ \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{T}}} \ x_{i_\mathrm{T}}^{(A_i)}$$

donde 1 ε L, $A_i \subseteq S_i$ (i = 1,2,...n) y $x_1, x_2, ..., x_n$ son variables de S_1, $S_2, ..., S_n$, respectivamente. Teniendo en cuenta (6) se puede ver que los T-cubos pueden también definirse por la forma

(8.2) $$1 \ \mathrm{T} \ \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{T}}} \ x_{i_\perp}^{(B_i)}$$

Se puede escribir (8,1) y (8,2) en la forma más general

(8.3) $\qquad 1 \; T \; \overset{n}{\underset{i=1}{T}} \; x_{i_{\psi_i}}^{(C_i)}$, donde $\psi_i \; \varepsilon \; \{\wedge,\vee\}$ (i = 1, 2, ..., n)

Haciendo T = $\wedge$ en (8.1) y T = $\vee$ en (8.2), se obtienen respectivamente las definiciones clásicas de cubos y anticubos los cuales, mediante la notación de T-cubos, reciben un tratamiento simultáneo en este artículo.

Si cada (Ai) en (8.1) es el conjunto unitario $\{a_i\}$, el T-cubo toma el valor de 1 si $x_i = a_i$ y 0 en el caso contrario. El T-cubo es $\perp$-irreductible cuando $1 = |e_\perp - 1|$ y en este caso se dirá que el cubo (8.1) es un T-átomo, puesto que es un átomo del retículo (2) con respecto al orden cuyo elemento nulo es e_T. Obsérvese que haciendo T = $\wedge$ y T = $\vee$ se recapturan los conceptos de átomo y su dual, respectivamente.

Las fórmulas (5), (7.1),..., (7.4) facilitan los cálculos con T–cubos. En particular, se busca obtener formas canónicas de funciones discretas. Como era de esperar, cualquier función.

$$f: \quad S_1 x S_2 x ... x \; S_n \rightarrow L$$

puede escribirse en la forma:

(9) $$f(\underline{x}) = \frac{1}{\underline{a} \in L^n}\left[f(\underline{a}) \; T \; \overset{n}{\underset{i=0}{T}} \; x_{i_T}^{(a_i)} \right]$$

donde se ha utilizado la notación

$\underline{x} = (x_1,x_2,...x_n) \; \varepsilon \; S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$, $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_n) \; \varepsilon \; L^n$ y $X_T^{(a)}$ en lugar de $X_T^{(\{a\})}$

La prueba de la fórmula (9) es la misma del teorema clásico para T = $\wedge$ [Thayse 1978, pag. 101], o bien para el teorema dual [Thayse 1978, pag. 102]. Es fácil ver que los teoremas que se refieren a las formas canónicas conjuntivas y disyuntivas [Thayse 1978, pag. 105] pueden ser dados en una única formulación con este lenguaje.

Como se afirma en Thayse, 1978 es de gran utilidad el conjunto de la forma

$$(10) \qquad [a, b] = \{a, a \oplus 1, a \oplus 2, \ldots, a \oplus k = b \},$$

donde $a, b \; \varepsilon \; L$ y el símbolo $\oplus$ se refiere a la suma módulo r; se hace alusión a [a,b,] como un intervalo de L.

La siguiente propiedad está implícitamente considerada en Thayse 1978, pag. 138.

El complemento del intervalo $[a, b] \neq L$, $a, b \; \varepsilon \; L$ es un intervalo de la forma

$$(11) \qquad \overline{[a, b]} = [b \oplus 1, a - b]$$

Se Llamará T-bloque a cualquier T-cubo de la forma

$$(12.1) \qquad 1 \; T \; \underset{i-1}{\overset{n}{T}} x_{i_T}^{[a_i, b_i]}$$

pero atendiendo a (6) y (11) este T-bloque puede también representarse en la forma

$$(12.2) \qquad 1 \; T \; \underset{i-1}{\overset{n}{T}} X_{i_\perp}^{\overline{[a_i, b_i]}}$$

Además las expresiones (12.1) y (12.2) admiten la forma específica común

$$(12.3) \qquad 1 \; T \; \underset{i-1}{\overset{n}{T}} x_{i_{\psi_i}}^{[c_i, d_i]}, \text{ donde } \psi_i \in \{\wedge, \vee\}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

tomando en cuenta las fórmulas (7.1) y (7.2) y el hecho de que cualquier subconjunto A de L puede expresarse como una intersección o como una unión de intervalos [Thayse 1978, pag. 131, 135]. Se puede ver que cualquier expresión compuesta de operaciones entre T-cubos puede reemplazarse por otra expresión equivalente compuesta de operaciones entre T-bloques.

Se dirá que el T-bloque (12.1) es convexo si

(13.1) $a_i \leq b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

utilizando (6) y (11), se aprecia que una formulación equivalente a esta definición requiere que

(13.2) $a'_i > b'_i$ ó $a'_i = 0$ ó $b'_i = m_i\text{-}1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

Tomando $T = \wedge$ en (12.1) y (13.1) y $T = \vee$ en (12.2) y (13.2) se obtiene las definiciones de bloque convexo, antibloque y antibloque convexo.

Además, se pueden recapturar diversos teoremas de expansión, de la teoría de retículos, dados en Thayse, 1978 y de hecho se enriquece la colección de fórmulas en cuyas estructuras intervienen la potenciación clásica $x_\wedge^{(A)}$ y la nueva $x_\vee^{(A)}$.

Se verá ahora el caso de las funciones lógicas. Es decir, funciones discretas para las que Si = L para i = 1,2, ..., n.

El conjunto de T-cubos, el conjunto de T-bloques y el conjunto de T–bloques convexos son cada uno subconjuntos T–generadores de L^{S^n}, mientras que el conjunto de los T–cubos y el conjunto de los T–bloques convexos son cada uno cerrado con respecto a la ley T. Esta es una formulación compacta de seis lemas de Thayse 1978, pags. 132 - 137 que implica inmediatamente que cualquier función discreta es la $\perp$-operación de todos sus T–cubos primos (T-bloques primos, T–bloques convexos primos), donde el significado del término "primo" está en concordancia con la teoría clásica de implicantes primos (Hammer, P. L. & Rudeanu, pag. 288).

La herramienta clave en la obtención de estos resultados está en la afirmación de que los T-cubos primos del T–cubo (8.1) son 1 y $x_{i_T}^{(A_i)}$ (i = 1,2,...,n) o equivalentemente 1 y $x_{i_\perp}^{(B_i)}$ (i = 1,2,...,n) si se hace referencia a la forma (8.2). También los T-bloques Muehldorf son aquellos T-bloques (12.1) tales que para cada i = 1,2,...,n se tiene que $a_i = 0$ ó $b_i = m_i - 1$. [Thayse 1978, pg. 139] se puede afirmar que cualquier T-bloque convexo admite su representación como una

T-operación de T-bloques Muehldof, y cualquier función discreta puede expresarse en términos T-bloques Muehldorf. Esta afirmación contiene el teorema de los generadores unitarios de funciones discretas [Thayse 1978, pg. 140].

El origen de la obtención de estas nuevas variantes de fórmulas está en la manipulación de los T–cubos y T-bloques expresados en las formas generales (8.3), y (12.3), respectivamente, aplicando las reglas de transformación (5) – (7).

CONCLUSIÓN

Al ampliar el concepto de potenciación reticular introducido por Thayse, surgen nuevas posibilidades para formalizar conceptos duales y compactar las expresiones algebraicas. Otras técnicas introducidas como la señalada en (5) y el uso de los símbolos $\coprod$ y Π aplicado en (7.3) y (7.4) así como la forma general de un T-cubo (8.3) fueron básicas para obtener las variantes de fórmulas de cubos y bloques incluidas en este trabajo.

ABSTRACT

In this note, using a technique due to Thayse, we introduce a generalization of the concept of lattice exponentiation and show that this yields a more uniform presentation of the lattice structure of discrete functions, including certain additional results.

REFERENCIAS

Davio, M. & C. Bioul. 1970. "Representation of lattice functions" R137 M.B.L.E. Laboratoire de Recherches. Brussels.

Davio, M., J.P. Deschamps & A. Thayse. 1978. "Discrete and switching functions". Mc Graw-Hill, New York.

Deschamps, J.P. 1975. "Partially Symmetrica logic functions". R299 M.B.L.E. Laboratoire de Recherches. Brussels.

Deschamps, J.P. & A. Thayse. 1973. "On theory of discrete functions". Part I, R838. Philips Research. Reports 28.

Garrido, J. 1980. “Functii discrete”. Referat de doctorat Nº1. Universitatea din Bucuresti.

Garrido, J. 1980. “Aplicatii a le functiilor discrete”. Referat de doctorat Nº2. Universitatea din Bucuresti.

Garrido, J. 1982. “Método Algebraice in teoria circuitelor de comutatie”. Teza de Doctorat. Universitatea din Bucuresti. Facultatea de Matematica.

Garrido, J. 1984. “Algebraical methods in the commutation circuits theory”. Papadimitropoulos Athens-Greece 1984.

Hammer, P.L. & Rudeanu. 1968. “Boolean methods in operation research and related areas”. Springer-Verlog, Berlin, Berlin, Heidelberg, New York.

Moisil, Gr. 1965. “Hazard and race phenomena in switching circuits”. Circular letter Nº13 An International Symposium to be held in Bucharest.

Moisil, Gr. 1973. “Many-valued logic and hazard phenomena in switching circuits. Lecture derived at the Department of Combinatorics and Optimization. University of Waterloo.

Rudeanu. 1974. “Boolean functions and equations”. North-Holland Publishing Company-Amsterdam London. American Elsevier Publishing Company-New York.

Thayse, A. 1970. “Transient analysis of logical networks applied to hazard detection” Report R135. M.B.L.E. Laboratoire de Recherches. Brussels.

Thayse, A. 1970. “Difference operators an extended truth vectors for discrete functions” M.B.L.E. Laboratoire de Recherches. Brussels.

Recibido noviembre del 2002, aceptado marzo del 2003.