FÍSICA

Tecnociencia 2003, Vol. 5, N° 2.

EVOLUCIÓN DE LA NOCIÓN DE MEDICIÓN DE NEWTON A MANDELBROT

[1]Diego O. Fernández y [2]Bernardo Fernández G.
[1]Universidad de Paris VI, Pierre et Marie Curie
[2]Universidad de Panamá, Centro de Investigaciones con Técnicas Nucleares, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología.
e-mail: fisicabfg@yahoo.es

RESUMEN
Se presentan los elementos formales de la evolución de la noción de medición desde Newton hasta Mandelbrot. De comparar con un patrón invariante por cambio de sistema de referencia inercial, se pasa a hacerlo con un patrón que varía con la rapidez relativa del referencial y luego, a comparar con uno que varía con la escala. Esto conduce a buscar nuevos invariantes: el intervalo de universo en relatividad de Einstein y los exponentes críticos en el caso de los fractales.

PALABRAS CLAVES
Medida, paradoja de Zenón, fractales, escala, invariación.

INTRODUCCIÓN
¿Es legítimo preguntarse, a esta altura de la historia, sobre la noción de medición en física?. Para un "físico" pos-galileano no hay duda de ello, es necesario percatarse que la medición está subordinada a la "veracidad" de las proposiciones.

1. De la medida, como resultado de la medición, depende la veracidad de las proposiciones

Ejemplo: Sea una proposición P: "Pedro es más grande o igual de tamaño que Pablo"; $P_{edro} \geq P_{ablo}$.

Para determinar si P es verdadera o falsa debemos darnos una "regla" (graduada):

1.1. Con una regla graduada en metros, la proposición es verdadera pues la cifra cierta, en el proceso de medición, es 1 y la incierta, la que sigue, que sólo es apreciable por medios o tercios de metro: $P_{edro} = 1{,}7$ m y $P_{ablo} = 1{,}7$ m. El primer decimal es pues dudoso, es decir, no podemos distinguir entre ambas medidas y se enuncia $P_{edro} = P_{ablo}$.

1.2. Con una regla graduada en centímetros, la proposición es falsa pues el proceso de medición conduce a $P_{edro} = 175{,}0$ cm y $P_{ablo} = 176{,}0$ cm donde los enteros son ciertos y los ceros decimales son dudosos.

1.3. Con una regla graduada en nanómetros nos daremos cuenta que las alturas de Pedro y Pablo varían con el tiempo (una ráfaga de viento, etc.); y si la medición no se fija dentro de un intervalo de tiempo tendremos que decir que la proposición es indecidible.

La paradoja de Zenón de Eleas es un ejemplo histórico que nace de la incomprensión del principio de Galileo cuyo enunciado es el siguiente: "La experiencia es el criterio de verdad en Física".

2. La paradoja de Zenón

Permítasenos evacuar de la paradoja de Zenón la presencia de Aquiles, así como la obscura cuestión lógica del tiempo como parámetro de evolución. Reformulemos el enunciado de la paradoja de la siguiente manera; proposición P: "Para ir de *A* a *B*, una tortuga va en línea recta de *A* hacia *B* primero, al punto que se encuentra a una distancia de ½ *AB* de *A*, después, al punto que se encuentra a ¾ *AB* para luego ir al punto que se encuentra a una distancia de $^{7}/_{8}$ *AB* de *A*, y así sucesivamente."

El enunciado de Zenón establece que:

2.1. P $\Rightarrow$ (implica) la tortuga nunca llega (matemática)
2.2. P es verdad. (lógica)
2.3. (Luego) La tortuga no llega nunca (matemática)
2.4. Sin embargo, la tortuga si llega (experiencia)

Entonces hay una paradoja.

La etapa (i) es dudosa, al menos de acuerdo a los conocimientos matemáticos de la época. Para mejorar la situación podríamos agregar algunas hipótesis suplementarias (por ejemplo, uniformidad de la rapidez de la tortuga) con las cuales podríamos mostrar que P implica que la tortuga llega a su destino. Pero no serían hipótesis en concordancia con la matemática de la época. Además, debemos rechazarle a Zenón el estatus de físico (la experimentación nace con el dúo Galileo-Newton) y no es porque cinco siglos antes de nuestra era no se conocía el cálculo diferencial e integral, si no porque la física no tenía el estatus de Ciencia.

Modifiquemos P para que (i) sea matemáticamente correcta. Para ello, razonemos por etapas; la primera será "la tortuga llega hasta la mitad de la totalidad del camino". En ese caso, ¿cuántas etapas necesita la tortuga para llegar a su destino? Con ello superamos la cuestión del tiempo como parámetro de evolución.

La falla de Zenón está en (ii): "que una proposición sea lógica no significa que sea físicamente verdadera".

"Para ir de *A* a *B* la tortuga va primero a 2 *AB*, vuelve a *B*" y así sucesivamente. Sin embargo, si *B* está sobre el borde de un precipicio la tortuga no llega a su destino. Cualquier lógico griego le hubiese concedido la primacía del razonamiento por reducción al absurdo y negado la validez lógica. P puede ser una verdad lógica pero no física.

3. ¿Suministra la matemática un criterio de verdad en Física?

A partir de Galileo, el criterio de verdad en física es la experimentación. Sin embargo, debemos reconocer que son correctos los resultados que nos brinda la matemática. ¿Es esto paradójico? En un primer tiempo aceptamos que la matemática nos brinda las proposiciones que son lógicamente verdaderas. Aceptemos la hipótesis formalista que nos dice que la matemática se construye con un conjunto de proposiciones verdaderas a priori, llamadas axiomas. Toda proposición que se deduce de esos axiomas, gracias a la lógica matemática (por lo menos aristotélica), se llama teorema. Es cierto que podríamos tomar otro conjunto de axiomas y obtener otro cuerpo de teoremas, no necesariamente compatibles con los primeros. La adecuación de la lógica matemática a la física es materia de otro análisis. En cuanto al estatus operativo, los físicos verifican los axiomas a través de la experiencia, para asegurarse de su validez. Un ejemplo lo constituyen las geometrías (Euclidiana, Riemaniana o de Lobachevski). La utilización de la geometría plana en vez de la esférica en una región de la superficie de la Tierra se justifica si los instrumentos de medición no son suficientemente precisos para detectar la esfericidad de la Tierra.

4. La medición según Newton

Para Newton, medir es comparar con un patrón y la medida es el resultado del límite de número de veces que el patrón cabe en el objeto *u*; cuando el patrón *r* tiende a cero, tenemos:

$$M = \lim_{r \to 0} \frac{u}{r}$$

4.1. Imposibilidad del método para medir fractales.

Benoît Mandelbrot mostró que existen objetos que no responden a la medición según el método de Newton y son más numerosos de lo esperado. Para esos objetos, la relación establecida por Newton no admite límite finito. Se tiene para ellos la relación

$\lim_{r \to o} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\ln n}{\ln r}\right) = 1 - D$, donde D designa la dimensión fractal.

4.2. Cambio de escala

Se llamará distancia sobre el conjunto E a toda aplicación f de E x E en $[0, \infty]$ que satisface a:

(EC_1) para todo $x \in E$, $f(x, x) = 0$

(EC_2) para todo $x \in E$ y $y \in E$, $f(x,y) = f(y,x)$, (simetría)

(EC_3) para todo $x \in E$, $y \in E$ y $z \in E$, $f(x,y) \leq f(x,z) + f(z,y)$ (desigualdad triangular)

Las diferentes medidas que resultan de medir con un patrón cada vez más pequeño se entienden como distancias diferentes. Para los objetos usuales esas distancias definen una estructura uniforme de espacio medible para los cuales la distancia es la medida “absoluta” (es decir, el límite de la familia de distancias).

Para los fractales se deben aceptar propiedades más débiles.

4.3. Condiciones para una medida "conveniente"

Las condiciones habituales impuestas a una medida conveniente son:

i) Continuidad

ii) Invariación por cambio de sistema de referencia

La existencia de la continuidad es para permitir acercarse tanto como se quiera a su valor, lo que significa

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), ie\ \forall\varepsilon > 0, \exists \mathrm{V}\ \varepsilon V(a), \forall x \in V, |f(x) - f(a)| \le \varepsilon$$

La exigencia (ii) responde al grupo de biyecciones del espacio que

(T_1) Conservan la homogeneidad del espacio (linealidad)

(T_2) Conservan la isotropía

(T_3) Conservan la causalidad (grupo no compacto y que se denomina grupo de Galileo)

4.3.1. Grupo que opera sobre un conjunto

Se dice que un conjunto Ω, con una estructura Σ, opera sobre E con estructura θ si existe un Σ-morfismo de Ω en $\mathrm{End}_\theta(E)$.

Para nosotros el grupo Ω opera sobre E si a todo elemento α de Ω se asocia la aplicación f_α de E en E tal que:

$$(GE) \qquad \forall\varepsilon, \beta \in \Omega,\ \forall x \in E, f_{\alpha+\beta} = f_\alpha \, o \, f_\beta$$

Para toda α, f_α es una biyección de E. Si tomamos como Ω *con estructura* Σ el grupo de Galileo tenemos:

$$\forall\alpha \in \Omega,\ \forall x, y \in E, M(x, y) = M[f\alpha(x), f\alpha(y)].$$

4.3.2. **¿Por qué invariación?**

El primer principio de la relatividad se enuncia de la forma siguiente: "Todas las leyes de la física tienen la misma forma en los sistemas de referencia inerciales".

En todo referencial inercial un cuerpo no sometido a fuerzas externas se mueve en línea recta a velocidad constante, o bien las geodésicas del espacio son rectilíneas y parten en todas las direcciones (isotropía y homogeneidad del espacio).

La tercera propiedad indica que un lazo eventual de causalidad debe señalarse con una medida, y debe ser invariante por cambio de sistema de referencia.

5. Los límites de la medida de Newton

5.1. **Michelson y Morley** construyeron un dispositivo con el cual las longitudes no son estables por cambio de sistema de referencia (sistemas que se mueven a rapidez v cerca de *c*).

5.2. **Einstein** introdujo el espacio de Minkowski, pseudoeuclidiano, donde el tiempo mantiene algún grado de privilegio (que se expresa en el signo). Esto condujo a definir el grupo de transformaciones del espacio como el grupo de biyecciones del espacio de Minkowski que verifican (T_1), (T_2) y (T_3). El grupo se denomina Grupo de Poincaré.

Esto implica que la operación de medición de longitudes toma tiempo. La medida pasa a ser:
$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ (que es un invariante llamado intervalo de universo) en lugar de $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ para Galileo.

El cambio del sistema de referencia corresponde a las isometrías del espacio de Minkowski.

5.2.1 El espacio usual es proyección del espacio de Minkowski

Todo grupo diferenciable, en biyección con una parte C conexa de *R* admite un parámetro aditivo.

$$\exists\ \psi: G \to R,\ \forall f_\lambda , f_\mu \in\ G, f_\lambda\ T f_\mu$$
$$= f_{\psi(\lambda)\ +\ \psi(\mu)}$$

Para la relatividad de Einstein ese parámetro aditivo no es la rapidez; como ya vimos, v está acotada por *c* (las rapideces no se adicionan como los números reales). El parámetro aditivo del grupo de Poincaré es un ángulo φ (cuya proyección está asociada a la rapidez) y es el ángulo de rotación del espacio de Minkowski (que incluye el eje del tiempo) asociado al cambio de sistema inercial $\quad v = c \tanh \varphi$

5.2.2. La causalidad

Un suceso precede a otro si se puede enviar una señal para iniciarlo; es decir, si la distancia temporal es superior a la distancia espacial. O sea, si el signo de ds^2 es positivo.

6. Medidas usuales de fractales

La dimensión fractal es insuficiente como magnitud para caracterizar un fractal usual; podemos citar las magnitudes como ramificación, lagunaridad, explayamiento, etc. que informan sobre la conectividad y la distribución de materia en un fractal. La dimensión fractal informa sobre la forma por cambio de escala.

Para la invariación en el espacio de Minkowski tenemos que, para un cambio de escala de parámetro λ,

$$x^\mu = (ct, x, y, z) \to x'^\mu = (\lambda ct, \lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

engendra en la distancia un cambio final $\lambda^2 ds^2$.

Sin embargo, en la distancia ds' se debe reflejar un cambio por el hecho de que $ds' = dx^\mu$

$$d\, x'^\mu = f\, dx^\mu$$

donde $f\ (ct, x, y, z)$ debe ser de la forma $f\ (ct, x, y, z) = Ax^\mu$ con las siguientes propiedades

i) A complejo

ii) $ff^* = 1$

iii) $x \to \lambda\, x \Rightarrow f' = T\, f$ con $T = x^\mu \partial_\mu$

Con esas propiedades vemos que el cambio $x'^{\mu'} = \lambda x^{\mu}$ induce en f el cambio $f' = \lambda f$ de manera que

$$ds'^2 = f'^* f' ds^2$$

$$ds'^2 = \lambda^2 f^* f ds^2$$

y si $f^* f = 1$ tenemos que el signo de ds^2 se conserva y con ello la causalidad. Vemos que se conserva la forma del objeto, que se traduce por la invariación de λ, que es el valor propio del operador T aplicado a las funciones f (homogéneas) y se denomina exponente crítico. Los fractales se caracterizan por ser invariantes por cambio de escala, no así por rotación y por traslación.

ABSTRACT

Formal features of the development of the measurement notion from Newton to Mandelbrot are presented. From comparing with a pattern that is invariant with a change of the inercial referencial system, it turns into comparing with a pattern that varies with the relative speed of the referencial, and again into a pattern that varies with the scale. This leads to the search of new invariants: The universe interval in Einstein's relativity and critical exponents in the case of fractals.

REFERENCIAS

Gouyet J.F. 1992. Physique et Structures fractales. Masson, Paris.

Guyon E. & H. E. Stanley. 1991. *Les formes fractales*. Elsevier Science Pulishers.

Peitgen I. & O. Heinz. 1992. *Fractal for the room*, part Two. Editorial Springer – Verlag New York, Inc.

Recibido agosto del 2002, aceptado mayo del 2003.