



## POLIGONOS $\mathcal{P}$ -ÁDICA

**FLORES F., EDIS A.**

Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología,  
Departamento de Matemática.  
e-mail: edisf35@yahoo.es.

### RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo el estudio de la Geometría  $\mathcal{P}$ -ádica, en particular, resultados concernientes a triángulos, ángulos y polígonos. El mismo está basado en la comparación de la geometría Euclidiana, no en su forma general, sólo para teoremas que juzgamos interesantes por la especial forma de definición de la norma  $\mathcal{P}$ -ádica, y el efecto que tiene sobre los elementos de esta geometría. La cual arroja resultados muy llamativos para la aprensión de nuestros sentidos, habituados a la geometría intuitiva. El desarrollo de este artículo se fundamenta en el hallazgo de Kurt Hensel en 1897, sobre la teoría de los números  $\mathcal{P}$ -ádicos.

### PALABRAS CLAVES

Norma  $\mathcal{P}$ -ádica, números  $\mathcal{P}$ -ádicos, ángulos  $\mathcal{P}$ -ádicos, triángulos  $\mathcal{P}$ -ádicos, polígonos  $\mathcal{P}$ -ádicos.

### ABSTRACT

This work aims to study the  $\mathcal{P}$ -adic geometry, in particular, results concerning triangles, angles and polygons. It is based on a comparison of Euclidean geometry, not in its general form, only to judge that interesting theorems for the special form of definition of  $\mathcal{P}$ -adic norm, and the effect it has on the elements of this geometry. Which gives very striking results for the apprehension of our senses, accustomed to

the traditional geometry. The development of this article is based on the discovery of **Kurt Hensel** in 1897, on the theory of  $p$ -adic numbers.

## KEYWORDS

$p$ -adic norm,  $p$ -adic numbers,  $p$ -adic angles,  $p$ -adic triangles,  $p$ -adic polygons.

## INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que, el cuerpo de los números racionales  $\mathbf{Q}$  no es un cuerpo completo. Es decir, existen sucesiones de Cauchy de números racionales que pueden no converger a un número racional. El cuerpo de los números  $p$ -ádicos  $\mathbf{Q}_p$  se obtiene a partir del cuerpo de los números racionales por completación con respecto a otro valor absoluto o norma, la norma  $p$ -ádica. Esta aplicación, similar en varios aspectos al valor absoluto usual, posee varias propiedades importantes, aunque sin embargo, algunas de ellas contrastan con nuestra intuición sobre la distancia.

Para  $x \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$  en  $\mathbf{Z}$  el orden  $p$ -ádico de  $x$  se define por

$$\text{ord}_p(x) = \max \{r \in \mathbf{N} : p^r \mid x\}$$

Para  $x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ , si  $x = \frac{a}{b}$ , el orden  $p$ -ádico de  $x$  se define por

$$\text{ord}_p(x) = \text{ord}_p\left(\frac{a}{b}\right) = \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b)$$

Para  $x \in \mathbf{Q}$ , la norma  $p$ -ádica de  $x$  se define como:

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\text{ord}_p(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Los números  $p$ -ádicos fueron introducidos por Hensel, aparentemente a partir de una analogía con el cuerpo de funciones racionales  $\mathbf{C}(X)$  y el desarrollo en serie de Laurent.

Finalmente, aparte del interés matemático en sí mismo como en el análisis  $p$ -ádico, los cuerpos de los números  $p$ -ádicos tienen aplicaciones en otras ramas de la Matemática. Por ejemplo, resulta que los mismos son de particular interés e importancia en la teoría Algebraica de Números y en la Geometría. Es entonces nuestro interés presentar un tópico relacionado con la geometría a través de esta nueva norma, la norma  $p$ -ádica y observar comparativamente sus resultados con la Geometría euclidiana.

### 1. TRIÁNGULOS Y ÁNGULOS EN $\mathbb{Q}_p$

A menudo concebimos a  $\mathbb{R}$  como una línea recta. En  $\mathbb{Q}_p$  las cosas no son tan simples. Iniciamos con algunas definiciones siguiendo la geometría Euclidiana, tanto como nos sea posible, a través de la norma en mención.

#### Definición 1.

- (1) Un punto es un elemento de  $\mathbb{Q}_p$ .
- (2) Un triángulo es un conjunto  $\{a, b, c\}$  de elementos distintos de  $\mathbb{Q}_p$ , denotado con el símbolo  $\Delta abc$ .
- (3) Las longitudes de los lados de un triángulo están dadas por  $d(a, b) = |a - b|_p$ ,  $d(a, c) = |a - c|_p$  y  $d(b, c) = |b - c|_p$ .

Notemos que nuestra definición de triángulo aparenta ser diferente de la definición euclidiana, pues la nuestra permite que tres puntos colineales formen un triángulo. Sin embargo, veremos que nunca podemos tener tres puntos colineales en la geometría  $p$ -ádica.

Una característica bien conocida del valor absoluto  $p$ -ádico es más desconcertante, cuando se formula en términos de triángulos.

**Teorema 1.** En  $\mathbb{Q}_p$  todos los triángulos son isósceles.

**Demostración:** Sea  $\Delta abc$  un triángulo con longitudes  $p^{-ord(a-c)}$ ,  $p^{-ord(a-b)}$  y  $p^{-ord(b-c)}$  si dos de tales valores son iguales no hay nada que probar.

Sin perder generalidades supongamos que  $ord(a - b) \neq ord(b - c)$ .  
 Por las propiedades de orden en  $\mathbf{Q}_p$ .

$$ord(a - c) = \min\{ord(a - b), ord(b - c)\}$$

Así al menos dos de los lados deben ser de igual longitud.

**Teorema 2.** Sea un triángulo no equilátero, el lado desigual tiene menor longitud.

**Demostración:** sea  $\Delta abc$  un triángulo con

$$ord(a - b) = ord(b - c) \text{ y } ord(b - c) \neq ord(a - c)$$

Entonces

$$ord(a - c) = ord((a - b) - (c - b)) \geq \min\{ord(a - b), ord(b - c)\},$$

y como

$$ord(a - c) \neq ord(a - b) = ord(b - c),$$

tenemos que  $ord(a - c) > ord(a - b)$ .

En la geometría euclidiana con la distancia usual, la cual denotamos “ $|\cdot|$ ”, tres puntos son colineales sí y sólo sí:

$$|a - c| = |a - b| + |b - c|$$

Suponiendo que

$$|a - c| > |a - b| \text{ y } |a - c| > |b - c|$$

Si usamos la distancia  $p$ -ádica sobre  $\mathbf{Q}_p$  vemos que la colinialidad no es posible para más de dos puntos.

**Corolario 1.** Dado tres puntos distintos

$$a, b, c \in \mathbf{Q}_p, |a - c|_p < |a - b|_p + |b - c|_p$$

En otras palabras ninguna terna de puntos de  $\mathbf{Q}_p$  son colineales.

La prueba se obtiene fácilmente del teorema 2.

El corolario anterior, es el que tenemos en mente cuando decimos que a menudo concebimos a  $\mathbf{R}$  como una recta y que en  $\mathbf{Q}_p$  no todo es tan simple.

Hemos visto que los todos triángulos en  $\mathbf{Q}_p$  son isósceles. Triángulos equiláteros usualmente son más fáciles de construir, por ejemplo si  $p = 5$  el triángulo  $\{10,15,20\}$  es equilátero. En general, para  $p \geq 3$  los puntos  $2p, 3p$  y  $4p$  forman un triángulo equilátero, pues

$$d(2p, 3p) = |p(3 - 2)|_p = p^{-1}$$

$$d(3p, 4p) = |p(4 - 3)|_p = p^{-1}$$

y 
$$d(2p, 4p) = |p(4 - 2)|_p = p^{-1}$$

En  $\mathbf{Q}_2$  no obstante, no existen triángulos equiláteros. Prueba que daremos como corolario del siguiente teorema.

**Teorema 3.** Dado un primo  $p$ , cualquier subconjunto de  $\mathbf{Q}_p$  tiene a lo más  $p$  puntos equidistantes.

**Demostración:** Supongamos lo contrario, esto es que existe  $p + 1$

puntos distintos equidistantes,  $a_1, a_2, \dots, a_{p+1}$  con  $a_i = \sum_{k=j_i}^{\infty} a_{ik} p^k$ ,  $a_{ij_i} \neq 0$ . Como los  $a_i$  son todos equidistantes, existe  $m \in \mathbf{Z}$  tal que  $\text{ord}(a_i - a_j) = m$  para todo  $i, j$  y  $a_{ik} = a_{jk}$  para todo  $k < m$ .

Así

$$\begin{aligned} a_i - a_j &= \sum_{k=m}^{\infty} (a_{ik} - a_{jk}) p^k \\ &= \left( p^m \sum_{k=0}^{\infty} a_i(k+m) p^k \right) - \left( p^m \sum_{k=0}^{\infty} a_j(k+m) p^k \right) \\ p^m a'_i - p^m a'_j & \\ p^m (a'_i - a'_j) & \\ \text{donde } a'_i &= \sum_{k=0}^{\infty} a_i(k+m) p^k, \quad a'_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_j(k+m) p^k. \end{aligned}$$

Así  $\text{ord}(a_i - a_j) = m + \text{ord}(a'_i - a'_j) = m + \mathbf{0}$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ , pues supongamos que

$$\text{ord}(a'_i - a'_j) = m, \text{ para los } p + \mathbf{1} \text{ puntos, y así } \text{ord}(a'_i - a'_j) = \mathbf{0}.$$

Sin embargo, como

$\mathbf{0} \leq a'_{i0} \leq p - \mathbf{1}$ , para todo  $i$  y como se trata de  $p + \mathbf{1}$  puntos, existe  $i, j$  distintos tal que  $a'_{i0} = a'_{j0}$ .

Así  $\text{ord}(a'_i - a'_j) > \mathbf{0}$ , para algún  $i$  y  $j$ .

**Corolario 2.** No existen triángulos equiláteros bajo la métrica  $\mathbf{2}$ -ádica.

Sobre el tema de la existencia, probaremos que no existen triángulos rectángulos en  $\mathbf{Q}_p$ . Diremos que un triángulo rectángulo en  $\mathbf{Q}_p$  es un triángulo cuyas longitudes satisfacen el teorema de Pitágoras.

**Teorema 4.** Para cualquier  $a, b, c \in \mathbf{Q}_p$ , tenemos,  $|a - c|_p^2 \neq |a - b|_p^2 + |b - c|_p^2$ , en otras palabras no existe triángulos rectángulos en  $\mathbf{Q}_p$

Supongamos que  $\Delta abc$  es rectángulo con el lado mayor  $ab$ . Entonces  $|b - c|_p = |a - c|_p$  tenemos que

$$|a - b|_p^2 \neq |b - c|_p^2 + |a - c|_p^2 = 2|b - c|_p^2.$$

Así

$$(p^{-\text{ord}(a-b)})^2 = 2(p^{-\text{ord}(b-c)})^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{p^{2\text{ord}(a-b)}}{p^{2\text{ord}(b-c)}} \\ \frac{1}{2} &= p^{2\text{ord}(a-b) - 2\text{ord}(b-c)} \\ \frac{1}{2} &= p^{2\text{ord}\left(\frac{a-b}{b-c}\right)} \end{aligned} \quad (1)$$

Entonces (1) implica que  $p = 2$  y  $\text{ord}\left(\frac{a-b}{b-c}\right) = -\frac{1}{2}$ , pero  $\text{ord}$  por definición es entero, por lo tanto esto no puede ocurrir.

### 1.1. ÁNGULOS EN $\mathbf{Q}_p$

Mantenemos la intención de crear analogía con la geometría euclidiana definimos ángulos usando la ley del coseno, como es el caso euclidiano.

**Definición 2.** Dado puntos distintos  $a, b, c$  en  $\mathbf{Q}_p$ , definimos el ángulo  $\theta$  entre los lados  $\overline{ac}$  y  $\overline{bc}$  por:

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{|a - c|_p^2 + |b - c|_p^2 - |a - b|_p^2}{2|b - c|_p |a - c|_p} \right)$$

Si no tenemos triángulos rectángulos en  $\mathbf{Q}_p$ , probablemente no tenemos ángulos recto.

Hay dos probabilidades para  $\theta$ , dependiendo de si:

- [1]  $|a - b|_p = |b - c|_p$  o
- [2]  $|a - c|_p = |b - c|_p$ .

**En el primer caso:** supongamos que  $|a - b|_p = |b - c|_p$  (figura 1)



Fig. 1.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|b - c|_p^2}{2|b - c|_p |a - c|_p} \\ &= \frac{|b - c|_p}{2d(a, c)} \\ &= \frac{p^{\text{ord}(a-c)}}{2p^{\text{ord}(b-c)}} \\ &= \frac{1}{2} p^{\text{ord}(a-c) - \text{ord}(b-c)} \end{aligned}$$

Por el teorema 3.2.  $\text{ord}(a - c) \leq \text{ord}(b - c)$ , así  $0 < \cos \theta \leq \frac{1}{2}$ ,  
 $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  y  $\cos \theta = \frac{1}{2} p^k$

con  $k = \text{ord}(a - c) - \text{ord}(b - c)$

En el segundo caso: supongamos  $|a - c|_p = |b - c|_p$  (figura 2)

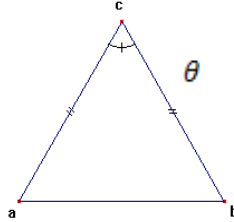


Fig. 2.

Entonces

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{-|a - b|_p^2 + 2|b - c|_p^2}{2d|b - c|_p^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{|a - b|_p}{|b - c|_p} \right)^2 + 1 \\
 &= \frac{-p^{2\text{ord}(b-c)}}{2p^{2\text{ord}(a-b)}} + 1 \\
 &= 1 - \frac{1}{2} p^{2(\text{ord}(b-c) - \text{ord}(a-b))} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Por el teorema 2.  $\text{ord}(b - c) - \text{ord}(a - b) < 0$  así pues podemos escribir

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2p^k} > 0$$

donde  $k = -2(\text{ord}(b - c) - \text{ord}(a - b)) > 0$ . Así  $\frac{1}{2} < \cos \theta < 1$ .

Notemos algunas consecuencias especiales. Si  $k = 0$ , tenemos  $\theta = \frac{\pi}{3}$  en ambos casos. Caso 1 y Caso 2. Cuando  $k$  aumenta tenemos en el caso[1] que  $\theta$  se aproxima a  $\frac{\pi}{2}$  pero nunca es  $\frac{\pi}{2}$  pues  $\cos \frac{1}{2p^k} > 0$ , para todo  $k$ .



En el caso 2 cuando  $k$  aumenta,  $\theta$  se aproxima a cero, pero no se anula, pues  $1 - \frac{1}{2p^{2k}} < 0$ , para todo  $k$ .

La siguiente proposición muestra que dado cualquier entero positivo  $j$  y cualquier par de puntos  $a$  y  $c$  en  $\mathbf{Q}_p$ , podemos hallar un tercer punto  $b \in \mathbf{Q}_p$  tal que

$$\text{ord}(b - c) - \text{ord}(a - b) = -j$$

Así también que para cualquier entero  $j$  existe  $a, b, c \in \mathbf{Q}_p$  tal que  $\cos \theta = 1 - \frac{1}{2p^{2j}}$ , para que estos ángulos existan.

**Proposición 1.** Dado un entero  $j, a, c \in \mathbf{Q}_p, a \neq c$ , podemos escoger  $b \in \mathbf{Q}_p$  tal que  $\Delta abc$  cumple  $|a - b|_p < |a - c|_p, |a - c|_p = |b - c|_p$  y  $\cos(\angle abc) = 1 - \frac{1}{2p^{2k}}$ .

**Demostración:** Sea  $j$  un entero positivo. Sea  $a, c \in \mathbf{Q}_p$  con  $a - c = p^\alpha d, \text{ord}(d) = 0$  y  $\alpha \in \mathbf{Z}$ . Escojamos  $\beta = \alpha + j$  y sea  $b = p^\beta + a$ . Entonces

$$\text{ord}(b - a) = \text{ord}(p^\beta) = \beta$$

Como  $\beta < \alpha$ , tenemos que  $p^{-\beta} < p^{-\alpha}$  y así  $|a - b|_p < |a - c|_p$ .  
Resolviendo  $a - c = p^\alpha d$  para  $c$ ,

Tenemos que

$\text{ord}(b - c) = \text{ord}(p^\beta + a - (p^\alpha d)) = \text{ord}(p^\beta + p^\alpha d) \geq \min\{\alpha, \beta\} = \alpha$   
de manera que  $\alpha < \beta$ . Entonces  $\text{ord}(b - c) = \text{ord}(a - c)$ . Así  $|a - c|_p = |b - c|_p$

Finalmente,  $\text{ord}(b - c) - \text{ord}(a - b) = \alpha - \beta = \alpha - (\alpha + j) = -j$  y así por (2)

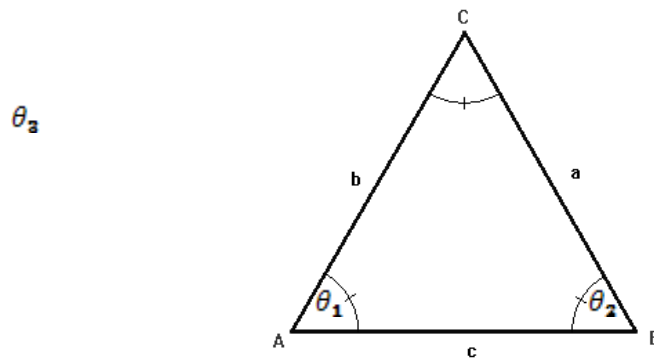
$$\cos(\angle abc) = 1 - \frac{1}{2p^{2j}}$$

**Observación:** En secciones previas probamos que las distancias en  $\mathbf{Q}_p$  no son aditivas (corolario 1.) Esto también se extiende para los ángulos en  $\mathbf{Q}_p$ .

Para estos resultados surge la intención de preguntarnos sobre la comparación de algunas propiedades de la geometría euclidiana respecto a la geometría  $p$ -ádica, tales dudas la ilustraremos la siguientes proposiciones:

**Proposición 2.** Los ángulos interiores de un triángulo suman  $180^\circ$ .

**Demostración:** Consideremos el triángulo  $\triangle ABC$



Por el teorema 1. los lados  $a$  y  $b$  son iguales, luego por la ley del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta_1$$

$$b^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta_1$$

$$c^2 - 2bc \cos \theta_1 = 0$$

$$\cos \theta_1 = \frac{c^2}{2bc} \Rightarrow \cos \theta_1 = \frac{c}{2b}$$

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{c}{2b}\right)$$

de manera análoga

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{c}{2b}\right)$$

$$\text{luego para } c^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos \theta_3 \Rightarrow \cos \theta_3 = 1 - \frac{c^2}{2b^2} = \frac{2b^2 - c^2}{2b^2}$$

$$\theta_3 = \arccos\left(\frac{2b^2 - c^2}{2b^2}\right)$$

entonces  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2 \arccos\left(\frac{c}{2b}\right) + \arccos\left(\frac{2b^2 - c^2}{2b^2}\right)$

Consideremos la siguiente función

$$f(x) = 2 \arccos\left(\frac{x}{2b}\right) + \arccos\left(\frac{2b^2 - x^2}{2b^2}\right) \text{ para } x \in [0, b]$$

$$f'(x) = 2 \left( \frac{-\frac{1}{2}b}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} \right) + \frac{\left(-\frac{x}{b^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2b^2}\right)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{b^2 - \frac{x^2}{4}}} + \frac{\frac{x}{b^2}}{\sqrt{1 - 1 - \frac{x^2}{b^2} - \frac{x^4}{4b^4}}}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{4b^2 - x^2}} + \frac{\frac{x}{b^2}}{\sqrt{\frac{4b^2x^2 - x^4}{4b^4}}}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{4b^2 - x^2}} + \frac{\frac{x}{b^2}}{\sqrt{4b^2x^2 - x^4}}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{4b^2 - x^2}} + \frac{\frac{x \cdot 2b^2}{b^2 \cdot 1}}{\sqrt{x^2(4b^2 - x^2)}}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{4b^2 - x^2}} + \frac{\frac{x \cdot 2b^2}{b^2 \cdot 1}}{x\sqrt{4b^2 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{4b^2 - x^2}} + \frac{2}{\sqrt{4b^2 - x^2}} = 0$$

entonces  $f$  es constante y

$$f(0) = \pi \quad \text{y} \quad f(b) = 2 \arccos\left(\frac{b}{2b}\right) + \arccos\left(\frac{2b^2 - b^2}{2b^2}\right)$$

$$f(b) = 2 \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f(b) = 3 \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

de esto resulta que

$$2 \arccos\left(\frac{x}{2b}\right) + \arccos\left(\frac{2b^2 - x^2}{2b^2}\right) = \pi \quad \text{es un identidad, es decir que}$$

$$2 \arccos\left(\frac{c}{2b}\right) + \arccos\left(\frac{2b^2 - c^2}{2b^2}\right) = \pi$$

lo que finalmente prueba que

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$$

## 2. POLÍGONOS EN $\mathbf{Q}_p$

Después de hacer un estudio sobre los triángulos en  $\mathbf{Q}_p$ , nos preguntamos naturalmente sobre la forma y posibilidades de construcción de los polígonos regulares o  $n$ -ágonos con  $n > 3$  en  $\mathbf{Q}_p$ .

En este capítulo desarrollaremos las propiedades para la cuales se da la posibilidad de construcción de polígonos en  $\mathbf{Q}_p$

**Definición 2.** Un polígono regular de  $n$  lados es un conjunto de  $n$  puntos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  los cuales llamaremos vértices, tales que  $|a_i - a_{i+1}|_p = |a_{i+1} - a_{i+2}|_p$  para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , entendiéndose que  $a_{n+1} = a_1$ .

Para  $p \geq 3$ , podemos construir un polígono  $n$ -ágonos regular  $p$ -ádico para cualquier  $n \geq 3$ . Por Ejemplo, tomamos los puntos  $0, 1, 2, 3, 4$  en orden y suponemos que  $p = 3$ . Entonces, como se muestra en la figura,

$$|0 - 1|_p = |1 - 2|_p = |2 - 3|_p = |3 - 4|_p = |4 - 1|_p = 1.$$

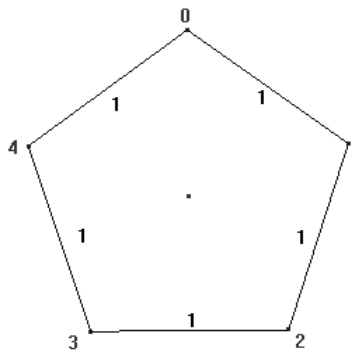


Fig. 3.

Esta construcción trabaja para cualquier  $n$ , salvo en el caso de que el punto  $n-1$  es un múltiplo de  $p$ , haciendo  $|a_n - a_1|_p > |a_1 - a_2|_p = 1$ . En este caso el arreglo de los vértices es  $0, 1, \dots, n-3, n-1, n-2$ . Como  $p \geq 3$  todos los lados son de longitudes 1, como lo apreciamos anteriormente.

Para  $p=2$  esta condición funciona sólo la mitad de las veces. Ya sabemos que triángulos equiláteros no existen para  $p=2$ . Ahora probaremos que este resultado es parte de un comportamiento más general.

**Teorema 4.** En  $\mathbf{Q}_2$  existen polígonos regulares de  $n$  lados si y sólo si  $n$  es par.

**Demostración.** Sea  $p=2$  y  $G$  un polígono regular 2-ádico de  $n$  lados con longitud  $2^{-N}$ , donde  $N \in \mathbf{Z}$  es un entero.

Sean  $a_1, a_2, \dots, a_n$  en los vértices of  $G$ . Escribimos la expansión binaria de  $a_i$ , de la forma:

$$a_i = a_{ix_i} 2^{x_i} + a_{i(x_i+1)} 2^{x_i+1} + \dots$$

para  $x_i \in \mathbf{Z}$ . Por nuestra suposición  $|a_i - a_{i\pm 1}| = 2^{-N}$ , para  $1 \leq i \leq n$ .

Así, el primer término en la expansión binaria de  $a_i$ , difiere de la expansión de  $a_{i\pm 1}$ , en el  $N$ -ésimo término.

Posiblemente sus expansiones son las mismas para un número finito de términos, pero estos se cancelan cuando tomamos la diferencia  $|a_i - a_{i\pm 1}| = 2^{-N}$ , pues los únicos coeficientes posibles de las potencias de 2 son 0 y 1.

Además  $a_{i\pm 1}$  debe diferir de  $a_i$ , en el  $N$ -ésimo término, de otra forma

$$|a_i - a_{i\pm 1}| < 2^{-N}$$

Así,  $a_{im} = a_{jm}$  para todo  $i, j$  cuando  $m < N$ , y  $a_{iN} \neq a_{(a_{i\pm 1})N}$ .

Si enumeramos los  $a_i$ , llamando a la suma de los primeros  $N - 1$  términos  $A$ , vemos más claro el patrón Supongamos que  $a_{iN} = 1$ .

$$a_i = A + 1 \cdot 2^{-N} + \dots$$

$$a_{i+1} = A + 0 \cdot 2^{-N} + \dots$$

$$a_{i+2} = A + 1 \cdot 2^{-N} + \dots$$

$$a_{i+3} = A + 0 \cdot 2^{-N} + \dots$$

$\vdots$

Así  $a_{i+(n-1)} = A + 0 \cdot 2^{-N} + \dots$  si  $n$  es par. Pero si  $n$  es impar ( $< 2^{-N}$ )

Donde  $b \in \{0, 1\}$ . Así  $G$  no sería un polígono regular  $p$ -ádico de  $n$  lados. Por lo tanto  $n$  tiene que ser par.

Recíprocamente, podemos construir  $2$ -ádico polígonos regulares de  $n$  lados para  $n$  par, usando los puntos  $0, 1, 2, \dots, m - 1$ , como se mostró previamente. Cuando  $m - 1$  es impar,  $d_2(0, m - 1) = |0 - m - 1|_p = 1$ , y todos los otros lados tienen longitud 1.

Vemos que podemos usualmente construir polígonos regulares  $p$ -ádicos. Sin embargo, dado una colección arbitraria de  $k$  puntos en  $\mathbf{Q}_p$  es posible que ningún subconjunto de esta colección formen un polígono regular  $p$ -ádico.

Ejemplo 21. Supongamos que están dados el conjunto de  $k$  puntos  $S = \{1, 2, p + 2 + p^2 + 2, \dots, p^{k-2} + 2\}$

Entonces como

$ord(a - b) = \min\{ord(a), ord(b)\}$  para  $ord(a) \neq ord(b)$ , no es difícil verificar todos los posibles valores de los lados entre puntos de  $S$ .

Para  $s \in S$ , tenemos

$$|1 - s| = 1, s \neq 1$$

$$|p + 2 - s| = \frac{1}{p}, s \neq 1, p + 2$$

$$|p^2 + 2 - s| = \frac{1}{p^2}, s \neq 1, p + 2, p^2 + 2$$

$\vdots$

$$|p^{k-2} + 2 - 2| = \frac{1}{p^{k-2}}.$$

Así, no existen polígonos regulares  $p$ -ádicos con  $\mathbf{1}$  como uno de sus vértices pues ningún par de vértices distintos de  $\mathbf{1}$  tienen un lado de igual longitud a los lados que contienen a  $\mathbf{1}$  como vértice.

Podemos argumentar similarmente para todos los otros vértices. Por lo tanto no existen polígonos regulares  $p$ -ádicos formados por subconjuntos de  $S$ . Esto es ilustrado para  $p = 2$  y  $k = 5$ , en la siguiente figura.

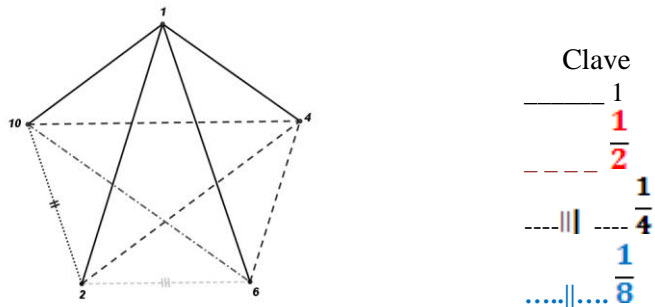


Fig. 4.

### CONCLUSIONES

Para sintetizar algunos de los resultados sobresalientes de este trabajo, presentamos a continuación nuestras conclusiones:

En la considerando de algunas propiedades métricas de  $\mathbf{Q}_p$  notamos que estas contratan con nuestra intuición de la distancia, en particular:

- (1) En  $\mathbf{Q}_p$  todos los triángulos son isósceles.
- (2) No existen triángulos equiláteros bajo la métrica 2-ádica.
- (3) No existen triángulos rectángulos en  $\mathbf{Q}_p$
- (4) En  $\mathbf{Q}_2$  existen polígonos regular de  $n$  lados si y sólo si  $n$  es par.

### REFERENCIAS

Baker, A. 1986. Breve Introducción a la Teoría de Números. Alianza Ed., Madrid.

- Batista, J. R. 1984. Field Extensions and Galois Theory. Addison – Wesley P.C. California.
- Borevich, Z.I. 1967. Number Theory. Academic Press, New York, Shafarevich, I.R.
- Cohn, H. 1962. Advanced Number Theory Dover. Springer, New York.
- Cohn, H. 1978. A Classical Invitation to Algebraic Numbers and Class Fields. Springer, New York,
- Edwards, H. M. 1977. Fermat's Last Theorem. Springer, New York.
- Gouvea, F. 2003. p-adic Numbers: an Introduction. 3<sup>rd</sup> Edition. Springer: New York.
- Hua, L. K. 1982. Introduction to Number Theory. Springer, Berlin.
- Hungerford, T.W. 1974. Algebra. Springer, New York.
- J. W. S. 1986. Cassels Local Fields. Cambridge University Press.
- Lay, Steven R. 2001. Analysis with an Introduction to proof. 3<sup>rd</sup> Edition. Prentice Hall: Upper Saddle River, New Jersey.
- N. Koblitz. 1980. p-adic Analysis: A Short Course on Recent Work. Cambridge University press.
- Neal Koblitz, p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions. Second Edition. Springer-Verlag. New York Berlin Heidelberg – Tokyo.
- Rudin, W. 1976. Principles of Mathematical Analysis, 3<sup>rd</sup> Edition. McGraw-Hill: New York.
- W. Schikhof. 1984. Ultrametric Calculus. Cambridge University Press.

*Recibido mayo de 2009, aceptado diciembre de 2009.*