Tecnociencia 2011, Vol. 13, N° 1.

OPERADORES PROYECCIÓN EN ESPACIOS DE HILBERT

Daniel Vásquez
Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática.
email:dvasquez65 @ yahoo.com

RESUMEN
El propósito de este trabajo es el desarrollo de la teoría de los operadores proyecciones en espacios con producto interno, el cual es un concepto de suma importancia en el estudio del Análisis Funcional. Se define el operador proyección en espacios normados y espacios con producto interno, se estudian sus propiedades topológicas, así como aquellas propiedades referentes a operaciones con proyecciones ortogonales.

PALABRAS CLAVES
Ortogonalidad, suma directa, Operador proyección, proyección ortogonal, Espacio de Hilbert.

ABSTRACT
The purpose of this work is the development of the theory of the projections operators in inner product spaces, which is a concept of extreme importance in the study of the Functional Analysis. The projection operator in normed spaces and inner product spaces are defined, their topological properties are studied, as well as those properties referring to operations with orthogonal projections.

KEYWORDS
Orthogonality, direct sum, projections operators, orthogonal projections, Hilbert space.

INTRODUCCIÓN

Las funciones lineales juegan un papel preponderante en el estudio del álgebra lineal. En los espacios normados, las funciones lineales más interesantes son las funciones lineales continuas u operadores lineales acotados. El objetivo de este trabajo es el estudio de un tipo particular de operadores lineales acotados, llamados operadores proyecciones los cuales son de gran importancia pues están relacionados con el comportamiento algebraico de los espacios y particularmente con la suma directa y el problema de la mejor aproximación.

1. Operadores proyecciones

Definición 1.1: Sean X un espacio vectorial con producto interno, $x,y \in X$. Decimos que x y y son ortogonales si

$$\langle x , y \rangle = 0$$

Denotamos por $A^{\perp}$ al conjunto

$$A^{\perp} = \{x \in X \,/\, \langle x , y \rangle = 0\}$$

llamado el anulador de A.

Definición 1.2: Un espacio vectorial X es la suma directa de dos subespacios Y, Z de X, escrito

$$H = Y \oplus Z$$

si cada $x \in X$ tiene una única representación

$$x = y + z \qquad y \in Y,\ z \in Z.$$

Teorema 1.1 Sea Y cualquier subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces

$$H = Y \oplus Y^{\perp}$$

Observación: El espacio $Y^{\perp}$ se llama el complemento ortogonal de Y

Definición 1.3: Un operador lineal $P: X \to X$ de un espacio vectorial en sí mismo es un **operador proyección** (algebraico) sobre X si P es idempotente, o sea que

$$P^2 = P \circ P = P.$$

En el siguiente teorema relacionamos los aperadores proyecciones con la suma directa de un espacio vectorial.

Teorema 1.2: Sea X un espacio vectorial

a) Dado un operador proyección $P: X \to X$ entonces

$$X = Im(P) \oplus N(P)$$

donde $N(P)=\{x \in X: P(x)=0\}$ es el núcleo de P y $Im(P)=\{P(x): x \in X\}$ es la imagen de P.

b) Si $X = M \oplus N$, donde M y N son subespacios de X, entonces la función

$$P: X \to X$$
$$P(x) = m$$

donde $x = m+n$, $m \in M$, $n \in N$, es un operador proyección. Además $N(P)=N$, $Im(P)=M$.

Demostración:

a) Sea $x \in X$, entonces

b)

$$x = x + (P(x) - P(x)) = P(x) + (x-P(x)).$$

Note que

$$P(x - P(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$$

luego $P(x) \in Im(P)$, $x-P(x) \in N(P)$. Por lo tanto

$$X = Im(P) + N(P).$$

Sea $x \in Im(P) \cap N(P)$, entonces existe un $y \in X$ tal que $x=P(y)$, $x \in N(P)$.

Por lo tanto

$$0 = P(x) = P(P(y)) = P(y) = x.$$

Así pues,

$$\mathrm{Im}(P) \cap N(P) = \{0\}$$

y

$$X = \mathrm{Im}(P) \oplus N(P)$$

b) Sean x, y$\in$X, $\alpha\in$R. Entonces existen m_1, $m_2\in M$, n_1, $n_2\in N$ tales que

$$x = m_1 + n_1, \quad y = m_2 + n_2$$

luego

$$x + y = (m_1+m_2) + (n_1+n_2), \quad m_1+m_2\in M,\ n_1+n_2\in N$$

y

$$\alpha x = \alpha m_1 + \alpha n_1, \quad \alpha m_1\in M,\ \alpha n_1\in N.$$

Por lo tanto,

$$P(x+y) = m_1 + m_2 = P(x) + P(y)$$

y

$$P(\alpha x) = \alpha m_1 = \alpha P(x).$$

Así pues P es un operador lineal.
Probemos que P es un operador idempotente. En efecto, es claro que para todo m$\in$M,

$$P(m)=m.$$

Sea $x=m+n\in X$ con $m\in M$, $n\in N$. Entonces

$$P^2(x) = P(P(x)) = P(m) = m = P(x)$$

Lo que implica que $P^2 = P$; o sea que P es un operador proyección. Finalmente note que Im(P) = M y N(P)=N ya que $X=M\oplus N$.

Teorema 1.3: Sea X un espacio vectorial y P: X$\to$X un operador lineal. P es un operador proyección sí y solo si I-P es un operador proyección, donde I: X$\to$X es el operador identidad sobre X.

Demostración:
Como

$$(I - P)^2 = (I - P)\,(I - P) = I - 2P + P^2$$

se tiene que $(I - P)^2 = I - P$ sí y solo si $P^2 = P$. Así pues I - P es un operador proyección sí y solo si P es un operador proyección.

Observación: Si $P: X \to X$ es un operador proyección entonces

$$\mathrm{Im}(I - P) = N(P) \quad \text{y} \quad N(I - P) = \mathrm{Im}(P)$$

Definición 1.4: Sea X un espacio normado y $P: X \to X$ un operador lineal. P es un **operador proyección** (topológico) sobre X si P es un operador idempotente continuo; o sea que P es un operador proyección continuo.

Teorema 1.4: Sea X un espacio normado y $P: X \to X$ un operador proyección topológico. Entonces $X = \mathrm{Im}(P) \oplus N(P)$ y N(P), Im(P) son subespacios cerrados de X.

Demostración:
Por el Teorema 1.1(a) se tiene que

$$X = \mathrm{Im}(P) \oplus N(P).$$

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de N(P) tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X,$$

entonces $P(x_n)=0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, como P es continuo

$$P(x) = \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Así pues $x \in N(P)$ y N(P) es un subespacio cerrado de X.

Por otro lado, como por el Teorema 1.2, $I - P$ es un operador proyección continuo, se tiene que $\mathrm{Im}(P) = N(I - P)$ es un subespacio cerrado de X.

Teorema 1.5: Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach y M, N subespacios cerrados de X tales que $X = M \oplus N$. Entonces el operador lineal $P: X \to X$ definido por

$$P(x) = m$$

donde x = m+n, $m\in M$, $n\in N$, es un operador proyección topológico.

Demostración:
En la parte (b) del Teorema 1.1 se probó que P es un operador proyección algebraico. Sólo nos resta probar que P es un operador lineal acotado. En efecto, definamos la función

$$\|\ \|_1 : X \to R$$
$$\|x\|_1 = \|m\| + \|n\|$$

donde x=m+n, $m\in M$, $n\in N$. Es claro que $\|\ \|_1$ es una norma sobre X. Probemos que $(X,\|\ \|_1)$ es un espacio de Banach. En efecto, sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(X,\|\ \|_1)$, entonces existen dos sucesiones $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que

$$x_k = m_k+n_k, \quad m_k\in M,\ n_k\in N.$$

Como

$$\|m_k - m_t\| \le \|x_k - x_t\|_1, \ \ \|n_k - n_t\| \le \|x_k - x_t\|_1$$

se tiene que $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en M y $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en N. Como M y N son subespacios cerrados del espacio de Banach $(X,\|\ \|)$ se tiene que $(M,\|\ \|)$ y $(N,\|\ \|)$ son espacios de Banach. Por lo tanto existen $m\in M$ y $n\in N$ tales que

$$\|m_k - m\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\ , \quad \|n_k - n\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De lo anterior se tiene que

$$\|x_k - (m+n)\|_1 = \|m_k - m\|_1 + \|n_k - n\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por consiguiente, la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente en $(X,\|\ \|_1)$ y $(X,\|\ \|_1)$ es un espacio de Banach.

Por otro lado, si x =m+n, $m\in M$, $n\in N$, entonces

$$\|P(x)\| = \|m\| \leq \|m\| + \|n\| = \|x\|_1 .$$

Por lo tanto, P: $(X,\| \|)\to(X,\| \|_1)$ es un operador lineal acotado.

Note que

$$\|x\| = \|m+n\| \leq \|m\| + \|n\| = \|x\|_1$$

para todo $x=m+n\in X$, $m\in M$, $n\in N$. Así pues $(X,\| \|)$ y $(X,\| \|_1)$ son completos y

$$\|x\| \leq \|x\|_1 \text{ para todo } x\in X.$$

Luego, por el Teorema de la Función Abierta, se tiene que las normas $\| \|$ y $\| \|_1$ son equivalentes.

De lo anterior se tiene que existe una constante $\alpha>0$, tal que si $x=m+n\in X$, $m\in M$, $n\in N$ entonces

$$\|P(x)\| = \|m\| \leq \|m\| + \|n\| = \|x\|_1 \leq \alpha\|x\|$$

lo que implica que la función

$$\text{P: } P:(X,\| \|)\to(X,\| \|)$$

es un operador lineal acotado. Por lo tanto, P es un operador proyección topológico.

Observación: Dado un espacio normado X y un subespacio cerrado M de X, si existe un subespacio cerrado N de X tal que $X=M\oplus N$ entonces se dice que M es complementado en X y que N es un complemento topológico de M en X. Como habíamos. En términos de operadores proyecciones los Teoremas 1.3 y 1.4 nos dicen que un subespacio cerrado M de un espacio de Banach X es complementado en X sí y solo si existe un operador proyección topológico P: $X\to X$ tal que Im(P)=M.

Definición 1.5: Sea X un espacio con producto interno y P: $X \to X$ un operador proyección algebraico. P es una **proyección ortogonal** si

$$N(P) \perp Im(P).$$

El siguiente resultado caracteriza las proyecciones ortogonales.

Teorema 1.6: Sea X un espacio con producto interno y P: $X \to X$ un operador proyección. P es una proyección ortogonal sí y solo si

$$\langle x , P(y) \rangle = \langle P(x) , y \rangle$$

para todo x, $y \in X$ (o sea que P es autoadjunto).

Demostración:
Supongamos primeramente que P: $X \to X$ es una proyección ortogonal, entonces por el Teorema 2.1 (a) y la Definición 1.3 se tiene que

$$X = Im(P) \oplus N(P) \quad , \quad Im(P) \perp N(P).$$

Sea x, $y \in X$, entonces existen $m_1, m_2 \in Im(P)$, $n_1, n_2 \in N(P)$ tales que

$$x = m_1 + n_1, \ \ y = m_2 + n_2, \ \ P(x) = m_1, \ \ P(y) = m_2$$

luego

$$\langle x , P(y) \rangle = \langle m_1 + n_1 , m_2 \rangle = \langle m_1 , m_2 \rangle$$
$$\langle P(x) , y \rangle = \langle m_1 , m_2 + n_2 \rangle = \langle m_1 , m_2 \rangle .$$

Por lo tanto $\langle x , P(y) \rangle = \langle P(x) , y \rangle$ para todo x, $y \in X$.

Recíprocamente, supongamos que

$$\langle x , P(y) \rangle = \langle P(x) , y \rangle$$

para todo x, $y \in X$. Sea $x \in Im(P)$, $y \in N(P)$, entonces

$$P(x) = x \ \ y \ \ P(y) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\langle x, y\rangle = \langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle = \langle x, 0\rangle = 0.$$

Así pues Im(P)⊥N(P) y P es una proyección ortogonal.

Teorema 1.7: Sea X un espacio con producto interno y P: X→X una proyección ortogonal. Entonces P es un operador lineal acotado; es decir, P es un operador proyección topológico. Además, si P≠0 entonces $\|P\| = 1$.

Demostración:
Como P es una proyección ortogonal,

$$X = \mathrm{Im}(P) \oplus N(P), \quad \mathrm{Im}(P) \perp N(P).$$

Sea $x \in X$, entonces existen $m \in \mathrm{Im}(P)$, $n \in N(P)$ tales que

$$x = m + n, \quad P(x) = m, \quad \langle m, n\rangle = 0.$$

Luego, por el Teorema de Pitágoras

$$\|x\|^2 = \|P(x) + n\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|n\|^2$$

por tanto

$$\|P(x)\| \le \|x\|$$

para todo $x \in X$. Así pues, P es un operador lineal acotado y $\|P\| \le 1$.

Por otro lado, como para todo $x \in \mathrm{Im}(P)$,

$$\|P(x)\| = \|x\|$$

se tiene que $\|P\| = 1$, si P≠0.

Corolario 1.1: Sea X un espacio con producto interno y P: X→X una proyección ortogonal. Entonces Im(P) y N(P) son subespacios cerrados de X.

Teorema 1.8: Sea H un espacio de Hilbert y $P: H \rightarrow H$ una proyección ortogonal. Entonces

$$N(P) = (Im(P))^{\perp}, \;\; Im(P) = (N(P))^{\perp}.$$

Demostración:

Como P es una proyección ortogonal, por el Teorema 1.1 (a)

$$H=Im(P)\oplus N(P), \;\; Im(P)\perp N(P).$$

Por lo tanto,

$$N(P) \subset Im(P)^{\perp}.$$

Sea $x \in Im(P)^{\perp}$, entonces existen $m \in Im(P)$, $n \in N(P)$ tales que

$$x=m+n$$

luego,

$$m=x-n \in Im(P)^{\perp}$$

por lo tanto,

$$m \in Im(P) \cap Im(P)^{\perp} = \{0\}$$

de donde

$$m=0 \;\; y \;\; x=n \in N(P).$$

Así pues,

$$Im(P)^{\perp} \subset N(P)$$

y

$$N(P)=Im(P)^{\perp}.$$

Finalmente, como por el Corolario 1.1, Im(P) y N(P) son subespacios cerrados de H y H es completo, se tiene que

$$N(P)^{\perp} = (Im(P))^{\perp\perp} = Im(P).$$

2. Operadores proyecciones en espacios de Hilbert

Como un espacio de Hilbert H puede ser representado como la suma directa de un subespacio cerrado Y de H y su complemento ortogonal $Y^{\perp}$; esto es

$$H=Y \oplus Y^{\perp}$$

se tiene que para cada $x\in H$ existe un único $y\in Y$ tal que

$$x=y+z \quad (z\in Y^{\perp}). \qquad (1)$$

De esta manera, la ecuación (1) define una función

$$\begin{aligned} P_Y:\ & H\rightarrow Y\subset H \\ & x\rightarrow y=P_Y(x) \end{aligned}$$

donde

$$\|x-P_Y(x)\| = \inf\ \{\|x-y\| : y\in Y\} = d(x, Y)$$

P_Y es llamada la proyección ortogonal o proyección de H sobre Y.

De igual manera,

$$\begin{aligned} P_{Y^{\perp}}:\ & H\rightarrow Y^{\perp}\subset H \\ & x\rightarrow y= P_{Y^{\perp}}(x) \end{aligned}$$

es una proyección ortogonal de H sobre $Y^{\perp}$, cuyas propiedades son completamente similares a las propiedades de la proyección P_Y.

Note que en (1) podemos escribir

$$x = y+z = P_Y(x) + P_{Y^{\perp}}(x).$$

Luego

$$P_{Y^{\perp}} = I - P_Y$$

donde $I: X\rightarrow X$ es la función identidad de X.

Si $x\in Y$, entonces $P_Y(x)=x$, ya que x es la mejor aproximación a sí mismo por elementos de Y. Por consiguiente,

$$P_Y\big/_Y = I_Y$$

donde $I_Y: Y\rightarrow Y$ es la función identidad de Y.

Por otro lado,

$$x\in Y^{\perp} \Leftrightarrow x = P_{Y^{\perp}}(x) \Leftrightarrow P_Y(x) = 0$$

así

$$Y^{\perp} = \{x\in H: x \perp y\} = \{x\in H: P_Y(x)=0\} = N(P_Y) = Im(P_{Y^{\perp}})$$

y

$$Y = \{x\in H: P(x)=x\} = Im(P_Y) = N(P_{Y^{\perp}})$$

A continuación resumimos las propiedades de los operadores proyecciones P_Y y $P_{Y^{\perp}}$

Propiedades: Sea Y en subespacio cerrado del espacio de Hilbert H. Entonces:

a) Para todo $x\in H$,

$$x = P_Y(x) + P_{Y^{\perp}}(x)$$

donde

$$\|x - P_Y(x)\| = \inf\ \{\|x - y\| : y \in Y\} = d(x, Y)$$

$$\|x - P_{Y^{\perp}}(x)\| = \inf\ \{\|x - z\| : z \in Y^{\perp}\} = d(x, Y^{\perp}).$$

Así pues,

$$I = P_Y + P_{Y^{\perp}}$$

donde $I: X\to X$ es la función identidad de X.

b) Para todo $x\in H$,

$$\| x \|^2 = \| P_Y(x) \|^2 + \| P_{Y^{\perp}}(x) \|^2$$

c) Para todo $x\in H$,

$$\| P_Y(x)\| \le \|x\|$$

y

$$\|P_Y(x)\| = \|x\| \text{ sí y solo si } x\in Y$$

d) P_Y y $P_{Y^{\perp}}$ son operadores lineales acotados y $\|P_Y\| = 1$ si $Y\neq\{0\}$

e) P_Y y $P_{Y^{\perp}}$ son proyecciones ortogonales

f) P_Y es autoadjunto; es decir, $\langle P_Y(x), y\rangle = \langle x, P_Y(y)\rangle$ para todo $x, y\in H$.

g) Para todo $x \in H$. $\langle P_Y(x), x\rangle = \|P_Y(x)\|^2$

h) P_Y es no negativa; es decir,

$$\langle P_Y(x), x\rangle \geq 0$$

para todo $x \in H$.

En el siguiente teorema determinaremos la proyección ortogonal asociada a subespacios de dimensión finita de un espacio de Hilbert.

Teorema 2.1: Sea H un espacio de Hilbert, Y un subespacio de dimensión finita de H y $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base para Y. Entonces para cada $x \in H$,

$$P_Y(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i$$

donde los escalares α_i son la única solución del sistema de ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, x_j\rangle = \langle x, x_j\rangle, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

En particular, si $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base ortonormal para Y, entonces

$$P_Y(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i$$

para todo $x \in X$.

Demostración:

Como Y es de dimensión finita, entonces Y es un subespacio cerrado de H. Luego

$$H = Y \oplus Y^{\perp}.$$

Sea $x \in H$. Como $P_Y(x) \in Y$, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$P_Y(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; x_i .$$

Ahora bien, como $z = x - P_Y(x) \in Y^{\perp}$, se tiene que

$$\left\langle x - P_Y(x), x_j \right\rangle = 0 \quad \text{para } j=1, 2, \ldots, n$$

de donde

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i , x_j \right\rangle = \left\langle x, x_j \right\rangle \quad j=1, 2, \ldots, n$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\langle x_i , x_j \right\rangle = \left\langle x, x_j \right\rangle, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Denotemos

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_2, x_1 \rangle & . & . & . & \langle x_n, x_1 \rangle \\ \\ \langle x_1, x_n \rangle & \langle x_2, x_n \rangle & . & . & . & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}$$

($G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es llamada **la matriz de Gram** de los vectores x_1, $x_2, \ldots, x_n$). Como

$$0 \leq \det\left(G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right) \leq \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cdots \|x_n\|^2$$

manteniendo la igualdad en la izquierda (respectivamente a la derecha) si $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un conjunto linealmente independiente (respectivamente ortogonal), se tiene que el sistema de ecuación

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^t = \left(\langle x_1, x_1 \rangle \quad \langle x_2, x_1 \rangle \quad . \quad . \quad . \quad \langle x_n, x_1 \rangle \right)^t$$

tiene una única solución.

En particular, si $\{x_1, x_2,\ldots,x_n\}$ es una base ortonormal de Y, entonces

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

de donde

$$(\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n) = \left(\langle x, x_1\rangle, \langle x, x_2\rangle, \quad . \quad . \quad ., \langle x, x_n\rangle\right).$$

Así pues

$$\alpha_j = \langle x, x_j\rangle \qquad j=1, 2, \ldots,n$$

y

$$P_Y(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i \ .$$

El siguiente resultado es una extensión del teorema anterior.

Teorema 2.1: Sea H un espacio de Hilbert, Y un subespacio cerrado de H y M un subconjunto ortonormal total de Y. Entonces para todo $x \in H$

$$P_Y(x) = \sum_{e \in M} \langle x, e\rangle e = \sum_{e \in M_x} \langle x, e\rangle e$$

3. Propiedades del operador proyección en espacios de Hilbert

Los operadores proyecciones tienen propiedades relativamente simples y claras como acabamos de ver. A continuación estudiaremos otras propiedades referentes a operaciones con proyecciones. El siguiente teorema nos da condiciones para que el producto de dos proyecciones ortogonales sea una proyección ortogonal.

Teorema 3.1: Sea H un espacio de Hilbert y P_1: $H \rightarrow H$, P_2: $H \rightarrow H$ operadores proyección. Entonces:

a) $P=P_1P_2$ es una proyección ortogonal en H sí y solo si las proyecciones ortogonales P_1 y P_2 conmutan, esto es, $P_1P_2= P_2P_1$. En este caso P proyecta H sobre $Y=Y_1 \cap Y_2$, donde $Y_1=Im(P_1)$, $Y_2=Im(P_2)$; es decir,

$$P_1P_2 = P_{Y_1 \cap Y_2}$$

b) Dos subespacios cerrados Y y V de H son ortogonales sí y solo si las correspondientes proyecciones satisfacen $P_Y P_V=0$, $P_V P_Y=0$

Demostración.

a) Supongamos que P_1 y P_2 conmutan. Probemos que $P= P_1P_2$ es autoadjunto e idempotente. En efecto, como P_1 y P_2 conmutan se tiene que

$$P^2=(P_1P_2)(P_1P_2) = P_1^2P_2^2 = P_1P_2 = P$$

Por lo tanto P es idempotente; o sea que P es un operador proyección. Por otro lado, por el Teorema 1.5, para todo $x, y\in H$

$$\begin{aligned}\langle P(x), y\rangle &= \langle (P_1P_2)(x), y\rangle \\ &= \langle P_2(x), P_1(y)\rangle \\ &= \langle x, P_2P_1(y)\rangle \\ &= \langle x, (P_1P_2)(y)\rangle .\end{aligned}$$

Así pues P es un operador proyección autoadjunto. Luego por el Teorema 1.5 P es una proyección ortogonal.

Recíprocamente, supongamos que $P= P_1P_2: H\to H$ es una proyección ortogonal, luego por el Teorema 1.5

$$P^* = P$$

donde P^* es la adjunta de P. Por lo tanto,

$$P_1P_2=P=P^*=(P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1$$

ya que P_1 y P_2 son autoadjuntos. Así pues, P_1 y P_2 conmutan.

Finalmente, como $P= P_1P_2 = P_2P_1$, para todo $x\in H$ se tiene que

$$P(x) = P_1(P(x)) = P_2(P(x))$$

por lo tanto,

$$P(x)\in Im(P_1) \text{ y } P(x)\in Im(P_2)$$

o sea que

$$P(x)\in Im(P_1) \cap Im(P_2) = Y.$$

Si $y\in Y$ entonces

$$y\in Im(P_1) \ , \ y\in Im(P_2)$$

por lo tanto,

$$P_1(y) = y \ , \ P_2(y) = y$$

y

$$P(y)=(P_1P_2)(y) = P_1(P_2(y)) = P_1(y) = y.$$

Así pues P proyecta H sobre $Y=Y_1\cap Y_2$; es decir,

$$Im(P) = Im(P_1) \cap Im(P_2)$$

b) Supongamos primeramente que $Y\perp V$, entonces

$$Y\cap V=\{0\} \ , \ V\subset Y^{\perp}, \ Y\subset V^{\perp}.$$

Además

$$Im(P_Y)=Y, \ N(P_Y)=Y^{\perp} , \ Im(P_V)=V, \ N(P_V)=V^{\perp}$$

por lo tanto,

$$V\subset N(P_Y) \ y \ Y\subset N(P_V).$$

Luego, para todo $x\in H$,

$$(P_YP_V)(x) = P_Y(P_V(x))=0, \ (P_VP_Y)(x) = P_V(P_Y(x))=0.$$

Recíprocamente, supongamos que $P_YP_V=0$. Sean $y\in Y$, $v\in V$, entonces,

$$\langle y, v\rangle = \langle P_Y(y), P_V(v)\rangle = \langle (P_VP_Y)(y), v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$$

por lo tanto, $Y\perp V$.

Definición 3.1: Sea X un espacio con producto interno y P, Q dos proyecciones ortogonales sobre X. P y Q son **ortogonales** sí y solo si $PQ=0$; o sea $(PQ)(x) = 0$ para todo $x\in X$.

Teorema 3.2: Sean P_1 y P_2 proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert H. Entonces:

a) La suma $P=P_1+P_2$ es una proyección ortogonal en H sí y solo si $Y_1=Im(P_1)$ y $Y_2=Im(P_2)$ son ortogonales, es decir, si P_1 y P_2 son ortogonales.

b) Si $P = P_1+P_2$ es una proyección ortogonal entonces P proyecta H sobre $Y_1 \oplus Y_2$, es decir,

$$P=P_{Y_1 \oplus Y_2}$$

El siguiente teorema generaliza el teorema anterior a n proyecciones ortogonales.

Teorema 3.3: Sean $P_1,P_2,...,P_n$ proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert H. Entonces

a) La suma $P_1+P_2+ \quad +P_n$ es una proyección ortogonal en H sí y solo si $Y_1=Im(P_1)$, $Y_2=Im(P_2)$, ..., $Y_n = Im(P_n)$ son ortogonales entre si; es decir, $Y_i \perp Y_j$ para $i \neq j$

b) Si $P=P_1+P_2+\ldots+P_n$ es una proyección ortogonal entonces, P proyecta H sobre $Y=Y_1 \oplus Y_2 \oplus_{\ldots} \oplus Y_n$, es decir,

$$P=P_{Y_1 \oplus Y_2 \oplus \ldots \oplus Y_n}$$

Demostración:
a) Si $Y_i=P_i(H)$, $i=1,2,...n$ son ortogonales en pares entonces, por el Teorema 3.2 $\quad P_jP_k = P_kP_j = 0$. Así

$$P_jP_k + P_kP_j = 0 \text{ con } j \neq k.$$

Demostremos por inducción que $P=P_1+P_2+...+P_n$ es una proyección ortogonal en H. En efecto, como vimos en el Teorema 2.11 $P= P_1+P_2$ es una proyección ortogonal en H. Supongamos que $P_1+P_2+...+P_{n-1}$ es una proyección ortogonal en H (hipótesis de inducción). Luego

$P^2 = (P_1+P_2+\ldots+P_{n-1}+P_n)^2$

$= [(P_1+P_2+\ldots+P_{n-1})+P_n]^2$
$=(P_1+P_2+\ldots+P_{n-1})^2+P_n^2+(P_1+P_2+\ldots+P_{n-1})P_n$
$\quad + P_n(P_1+P_2+\ldots+P_{n-1})$
$= P_1+P_2+\ldots+P_{n-1} + P_n$ pues $P_jP_k+P_kP_j=0$ con $j\neq k$
$= P.$

De esta forma $P= P_1+P_2+...+P_n$ es idempotente. Por otro lado, como $P_1,P_2,...,P_n$ son autoadjuntos también lo es su suma; es decir P es autoadjunto. Así por el Teorema 1.5 P es una proyección ortogonal.

Recíprocamente, si $P= P_1+P_2+...+P_n$ es una proyección ortogonal entonces

$$\|Px\|^2 = \langle P^2x , x\rangle = \langle Px , x\rangle \quad \text{y} \quad \|P_kx\|^2 = \langle P_kx , x\rangle .$$

De aquí, para todo x y para todo $1\leq j,k\leq m$; $j\neq k$

$$\begin{aligned}\|P_jx\|^2 + \|P_kx\|^2 &\leq \|P_1x\|^2 + \|P_2x\|^2 +\ldots+\|P_nx\|^2\\ &= \langle P_1x , x\rangle + \langle P_2x , x\rangle +...+\langle P_nx , x\rangle\\ &= \langle P_1x + P_2x +\ldots+ P_nx , x\rangle\\ &= \langle Px , x\rangle\\ &= \|Px\|^2\\ &\leq \|x\|^2.\end{aligned}$$

Para cada $x=P_jy$ tenemos que

$$P_jx=P_j^2y=P_jy$$

y además

$$\begin{aligned}\|P_jy\|^2 + \|P_kP_jy\|^2 &= \left\|P_j^2y\right\|^2 + \left\|P_kP_jy\right\|^2\\ &= \|P_jx\|^2 + \|P_kx\|^2\\ &\leq \|x\|^2 = \|P_jy\|^2.\end{aligned}$$

De esta forma

$$P_kP_jy = 0, \quad y\in H$$

esto es

$$P_kP_j = 0.$$

De igual forma se prueba que $P_jP_k=0$. Luego, por la parte (b) del Teorema 3.1 se tiene que

$$Y_j \perp Y_k, \quad j\neq k$$

b) Determinemos el subespacio cerrado $Y \subset H$ en el cual P proyecta H. Como $P=P_1+P_2+...+P_n$ para cada $x \in H$ tenemos:

$$y = Px = P_1x + P_2x + ... + P_nx.$$

Aquí $P_jx \in Y_j$, j=1,2,...n; por lo tanto $y \in Y_1 \oplus Y_2 \oplus ... \oplus Y_n$. Así que $Y \subset Y_1 \oplus Y_2 \oplus ... \oplus Y_n$.

Ahora mostraremos que $Y \supset Y_1 \oplus Y_2 \oplus ... \oplus Y_n$. En efecto, sea $v \in Y_1 \oplus Y_2 \oplus ... \oplus Y_n$. Entonces $v=y_1+y_2+...+y_n$, donde $y_i \in Y_i$, i=1,2,...n.

Aplicando P a v obtenemos:

$$\begin{aligned}
Pv &= P_1(y_1+y_2+...+y_n) + P_2(y_1+y_2+...+y_n) + ...+P_n(y_1+y_2+...+y_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n} P_i(y_1 + y_2 + ... + y_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n} P_i(y_1) + \sum_{i=1}^{n} P_i(y_2) + ... + \sum_{i=1}^{n} P_i(y_n)\\
&= P_1(y_1) + P_2(y_2)+...+P_n(y_n) \quad \text{pues } Y_i \perp Y_j \quad i \neq j\\
&= y_1 + y_2 + ... + y_n\\
&= v
\end{aligned}$$

por consiguiente $v \in Y$ y así $Y \supset Y_1 \oplus Y_2 \oplus ... \oplus Y_n$. De esta forma

$$Y = Y_1 \oplus Y_2 \oplus ... \oplus Y_n.$$

Corolario 3.1: Sean $P_1,P_2,...,P_n$ proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert H. Si $P=P_1+P_2+\ \ +P_n$ es una proyección ortogonal, entonces

$$\|P_1(x)\|^2 + \|P_2(x)\|^2 + ... + \|P_n(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

para todo $x \in H$.

Observación: El opuesto de un operador proyección no es un operador proyección. En efecto si P(x) es un operador proyección entonces el operador $Q(x) = -P(x)$ no es una proyección ortogonal puesto que $Q^2(x)=P^2(x)=P(x) \neq Q(x)$. Así Q no es idempotente, si $P \neq 0$.

El siguiente teorema se refiere a la relación de orden parcial en el conjunto de todas las proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert, definida por:

$$P_1 \leq P_2 \text{ sí y solo si } \| P_1(x) \|^2 = \langle P_1(x), x \rangle \leq \langle P_2(x), x \rangle = \| P_2(x) \|^2 .$$

Teorema 3.4: Sean P_1 y P_2 proyecciones ortogonales definidas en un espacio de Hilbert H, $Y_1=\mathrm{Im}(P_1)$ y $Y_2=\mathrm{Im}(P_2)$ los subespacios en los cuales H es proyectado por P_1 y P_2 y $N(P_1)$ y $N(P_2)$ los núcleos de estas proyecciones ortogonales, respectivamente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$
(2) $Y_1 \subset Y_2$
(3) $N(P_2) \subset N(P_1)$
(4) $\|P_1x\| \leq \|P_2x\|$ para todo $x \in H$
(5) $P_1 \leq P_2$

Como una aplicación del teorema anterior tenemos el siguiente resultado en el que se trata la diferencia de proyecciones.

Teorema 3.5: Sean P_1 y P_2 proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert H. Entonces:

(a) La diferencia $P = P_1 - P_2$ es una proyección ortogonal en H sí y solo si $Y_1 \subset Y_2$ donde $Y_1=\mathrm{Im}(P_1)$ y $Y_2=\mathrm{Im}(P_2)$

(b) Si $P = P_1 - P_2$ es una proyección ortogonal entonces, P proyecta H sobre Y donde Y es el complemento ortogonal de Y_1 en Y_2; es decir,

$$P = P_{Y_1^{\perp} \cap Y_2}$$

Corolario 3.2: Sean R y K subespacios cerrados del espacio de Hilbert H y sean P_R y P_K las correspondientes proyecciones ortogonales sobre H de estos subespacios. Entonces $P= P_R - P_K$ es una proyección ortogonal sobre H sí y solo si $P_R \leq P_K$.

De los Teoremas 2.13 y 2.14 podemos derivar un resultado básico acerca de la convergencia de una sucesión monótona creciente de proyecciones ortogonales.

Teorema 3.6: Sea $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona creciente de proyecciones ortogonales definidas en un espacio de Hilbert H.

Entonces:

(a) $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge fuertemente a una proyección ortogonal; es decir, $P_n x \to Px$ para cada $x \in H$, y el operador límite es una proyección ortogonal definida en H.

(b) P proyecta H sobre $\mathrm{Im}(P) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(P_n)}$

(c) $N(P) = \bigcap_{n=1}^{\infty} N(P_n)$

Si la sucesión de proyecciones ortogonales $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el espacio de Hilbert no es monótona creciente todavía se puede probar que su límite es una proyección ortogonal, si se supone que la sucesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al operador lineal P en norma, lo que precisamos en el siguiente teorema.

Teorema 3.7: Sea $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de proyecciones ortogonales en el espacio de Hilbert H y supongamos que la sucesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al operador lineal acotado $P: H \to H$ en norma; o sea,

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n - P \| = 0 .$$

Entonces P es una proyección ortogonal en H.

Demostración.

Como para todo $x \in X$

$$\|(P_n - P)(x)\| \le \| P_n - P\| \|x\|$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = P(x) .$$

Ahora bien, como cada P_n es una proyección ortogonal, se tiene que

$$\langle P_n(x), y\rangle = \langle x, P_n(y)\rangle .$$

Aplicando límite cuando $n\to\infty$ obtenemos que

$$\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle , \quad x, y\in H.$$

Por consiguiente P es autoadjunto.

Por otro lado, para todo $x\in H$

$$P_n(x) = P_n^2(x)$$

luego, como P es un operador lineal acotado

$$\begin{aligned} P^2(x) &= P(P(x)) \\ &= P(\lim_{n\to\infty} P_n(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(P_n(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty} P_n(P_n(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty} P_n^2(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} P_n(x) \\ &= P(x) \end{aligned}$$

Así pues P es un operador proyección autoadjunto. Luego, por el Teorema 2.5 P es una proyección ortogonal.

Terminamos esta sección con un ejemplo, en el cual se ilustra el concepto de proyección ortogonal.

Ejemplo
Considere el espacio

$$X= C([-1,1], R)=\{f: [-1, 1]\to R/\ f \text{ es continua}\}$$

con el producto interno definido por

$$\langle f , g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt .$$

Calcular la proyección ortogonal $P_{\mathcal{P}_2}$ sobre el espacio

P_2 = { $p \in X$/ p es un polinomio de grado a lo sumo igual a 2} evaluada en el vector $q(x)=x^3 \in X$.

Solución:
Aplicado el proceso de Gramm-Schmidt a la sucesión

$$\{q_n\}_{n=0}^{\infty} = \{x^n\}_{n=0}^{\infty}$$

se obtiene la sucesión ortonormal $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, dada por

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,x,\ \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right),\ \sqrt{\frac{75}{8}}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right),\ \cdots$$

Luego,

$$\left\langle x^3, e_0\right\rangle = \left\langle x^3, \sqrt{\frac{1}{2}}\right\rangle = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1}{2}}\,x^3\,dx = 0$$

$$\left\langle x^3, e_1\right\rangle = \left\langle x^3, \sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right\rangle = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}\,x^4\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

y

$$\left\langle x^3, e_2\right\rangle = \left\langle x^3, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\right\rangle = \sqrt{\frac{45}{8}}\int_{-1}^{1}\left(x^5-\frac{1}{3}x^3\right)dx = 0.$$

Luego, resulta que

$$P_2 = [1, x, x^2] = [q_0, q_1, q_2]=[e_0, e_1, e_2]$$

Como $\{e_0, e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de P_2, resulta que la proyección ortogonal $P_{\mathcal{P}_2}$ evaluada en el vector $q(x)=x^3$ es

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{P}_2}(x^3) &= \left\langle x^3, e_0\right\rangle e_0 + \left\langle x^3, e_1\right\rangle e_1 + \left\langle x^3, e_2\right\rangle e_2 \\ &= \frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,x \\ &= \frac{3}{5}x. \end{aligned}$$

REFERENCIAS

G. Bachman & L. Narici. 1996. Functional Analysis, Academic University Press, Cambridge.

Berberian, S. K. 1998. Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer-Velarg.

Deutsch, F. 2001. Best Approximation in Inner Product Spaces, Springer-Velarg, New York,.

Kreyszig, E. 1978. Introductory to Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York.

Rakocevic. V. 2000. On the Norm of Idempotent Operators in Hilbert Space, Amer. Math Monthy. 107, pag 748-750.

Rudin, W. 1973. Functional Analysis, Mc Graw Hill, New York.

Sunder, V. S. 1998. Functional Analysis, Birkhauser, Cambridge.

Vidad, I. 1964. On Idempotent Operators in Hilbert Space, Publ. Inst. Math. 4, pag. 157-163.

Recibido septiembre de 2010, aceptado octubre de 2011.