Tecnociencia 2011, Vol. 13, N° 1.

SOLUCIONES RACIONALES DE LA ECUACIÓN $X^Y = Y^X$

Jorge E. Hernández, Edith C. de Hernández
Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario De Veraguas, Departamento de Matemática.

RESUMEN

En el presente trabajo estudiamos la ecuación diofantina $m^n = n^m$ con $m \neq n$, probando que las únicas soluciones enteras de esta ecuación son (2, 4) y (4, 2). Posteriormente determinamos la forma de todas las soluciones racionales de la ecuación $x^y = y^x$ con $x \neq y$, y probamos que estas soluciones son únicas. También presentamos los intervalos donde se encuentran las soluciones racionales positivos de la ecuación $x^y = y^x$.

PALABRAS CLAVES

Ecuación diofantina, soluciones racionales.

ABSTRACT

In this paper we study the diophantine equation $m^n = n^m$ with $m \neq n$, proving that the only integer solutions of this equation are (2, 4) and (4, 2). Then we determine the shape of all the rational solutions of the equation $x^y = y^x$ with $x \neq y$, and prove that these solutions are unique. We also present the intervals where are the positive rational solutions of the equation $x^y = y^x$

KEYWORDS

Diophantine equation, rational solutions

INTRODUCCIÓN

Para los que sustentan que el orden de los términos no afecta el resultado, es tentado afirmar que

$$x^y = y^x$$

Sin embargo, con el simple ejemplo $x = 2$, $y = 3$ se prueba que

$$x^y \neq y^x$$

Pero para las personas de mentes inquietas e interesados en investigar los alcances de la matemática, el problema no termina ahí. La pregunta que nos haríamos ahora es la siguiente,

¿Para que valores positivos de x, y se tiene que

$$x^y = y^x\ ?$$

Obviamente, si $x = y$, entonces $x^y = y^x$. Así que existen infinitas soluciones a esta pregunta.

Pero que ocurre si agregamos la restricción $x \neq y$. Aún en este caso existe una solución entera positiva sencilla, a saber

$$x = 2, \quad y = 4$$

¿Existirán otras soluciones enteras positivas de la ecuación $x^y = y^x$. ¿Qué podemos decir a cerca de las soluciones racionales positivas de esta ecuación? ¿Dónde se encuentran estas soluciones racionales y que forma tienen; además, cómo se comportan? Estas son preguntas que cualquier profesional de la matemática debe hacerse e incorporarla, de alguna manera, en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Aparentemente, la primera referencia que tenemos a esta pregunta se encuentra en una carta de D. Bernoulli a C. Goldbach, fechada el 29 de junio de 1728 (Hurtwitz, 1961; Knoebel, 1981; Slobin, 1931). Bernoulli afirma sin demostrar que la ecuación $x^y = y^x$, $x \neq y$ tiene una solución entera positiva, pero infinitas soluciones racionales.

La primera persona en escribir en detalles acerca de la ecuación

$$x^y = y^x, \quad x \neq y$$

fue Euler (Cho & Park, 2001; Langer, 1996). Euler usó la sustitución $y = xt$ y resolvió la ecuación sobre $\mathbf{R}^+$ y $\mathbf{Z}^+$, y presentó las soluciones racionales

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

El objetivo de este trabajo es encontrar todas las soluciones enteras positivas de la ecuación

$$(1) \qquad x^y = y^x, \quad x \neq y$$

además utilizar la sustitución indica por Euler (Cho & Park, 2001; Sved, 1990) para determinar la forma de las soluciones racionales de la ecuación (1) y probar la unicidad de estas soluciones racionales.

1. SOLUCIONES ENTERAS POSITIVAS

Supongamos que (x, y) es una solución entera positiva de la ecuación (1), entonces

$$x^y = y^x$$

Como la ecuación (1) es simétrica en x, y (o sea que si (x, y) es solución de la ecuación (1) entonces (y, x) es también solución de la ecuación (1)) , sin perdida de generalidad podemos suponer que $x < y$.

Obviamente, de la ecuación (1) se tiene que si p es un número primo, entonces

$$p \text{ divide a } x, \text{ sí y sólo sí, } p \text{ divide a } y$$

o sea que x, y tienen los mismos divisores primos. Así, podemos escribir

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \\ y &= p_1^{\beta_1}\, p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} \end{aligned}$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son los distintos números primos que dividen a x; y por lo tanto a y. Luego, como (x, y) es una solución de la ecuación (1) se tiene que

$$\left(p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}\right)^y = \left(p_1^{\beta_1}\, p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}\right)^x$$

o sea

$$p_1^{\alpha_1 y}\, p_2^{\alpha_2 y} \cdots p_k^{\alpha_k y} = p_1^{\beta_1 x}\, p_2^{\beta_2 x} \cdots p_k^{\beta_k x}$$

Por ser $p_1, p_2, \ldots, p_k$ números primos y por la unicidad de la representación de un número entero positivo como potencia de números primos, se tiene que

$$\alpha_1 y = \beta_1 x, \qquad \alpha_2 y = \beta_2 x, \ \ldots, \ \alpha_k y = \beta_k x$$

Luego como $x < y$,

$$\alpha_1 < \beta_1, \qquad \alpha_2 < \beta_2, \ \ldots, \ \alpha_k < \beta_k$$

De (2) se tiene que x divide a y, esto es, existen un entero positivo k tal que $y = kx$. Así, la ecuación (1) se transforma en

$$(3) \qquad x^{kx} = (kx)^x \qquad k>1$$

por lo tanto

$$x^k = kx$$

ó

$$(4) \qquad x^{k-1} = k, \quad k>1$$

Como $k>1$, se tiene que $x^{k-1} > 1$. Por lo tanto $x > 1$, o sea, $x \geq 2$. Ahora bien si $k > 2$ y $x \geq 2$, entonces

$$x^{k-1} \geq 2^{k-1} > k$$

Así pues

$$x^{k-1} > k \qquad \text{para todo } k > 2$$

lo que contradice la ecuación (4).

Si $k = 2$, entonces de (4) se tiene que

$$2 = x^{2-1} = x$$

y por lo tanto,

$$y = kx = 2\,(2) = 4$$

De todo lo anterior se tiene que la única solución entera positiva de (1) es:

$$(x, y) = (2, 4) \qquad \text{con } x < y.$$

Obviamente, por simetría (4, 2) también es una solución de la ecuación (1).

2. SOLUCIONES RACIONALES POSITIVAS

Supondremos ahora que x, y son números reales positivos y denotaremos

$$t = \frac{y}{x}$$

por lo tanto,

$$y = tx, \qquad t > 0,\ t \neq 1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1) tenemos que

$$x^{tx} = (tx)^x$$

o sea

$$(x^t)^x = (xt)^x$$

y

$$x^t = tx$$

de donde

$$x = t^{\frac{1}{t-1}}$$

y por lo tanto,

$$y = tx = t^{1+\frac{1}{t-1}} = t^{\frac{t}{t-1}}$$

Así las soluciones de la ecuación (1) tienen la forma

$$(5) \qquad (x, y) = \left(t^{\frac{1}{t-1}},\ t^{\frac{t}{t-1}} \right)$$

Por otro lado, de la ecuación (1) se tiene que

$$x^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{y}}$$

Consideremos la función f: $(0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(u) = u^{\frac{1}{u}}.$$

Como

$$f'(u) = u^{\frac{1}{u}} \left[\frac{1 - \ln u}{u^2} \right]$$

Se tiene que

$$f'(u) = 0 \quad \text{sí y sólo sí,} \quad u = e.$$

Además

$$f'(u) > 0 \qquad \text{si } u \in (0, e)$$

y

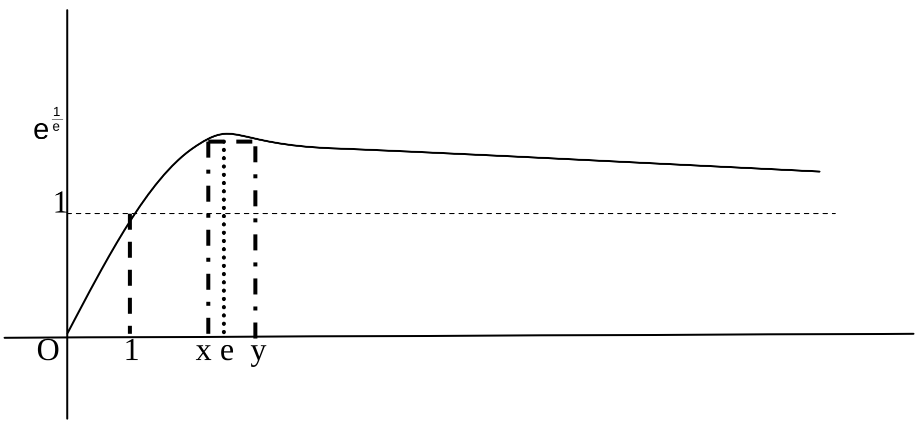
$$f'(u) < 0 \qquad \text{si } u \in (e, \infty)$$

por lo tanto,

f es estrictamente creciente en el intervalo $(0, e)$
f es estrictamente decreciente en el intervalo (e, ∞)
f alcanza su valor máximo en $u = e$.

$$\lim_{u \to \infty} f(u) = \lim_{u \to \infty} u^{\frac{1}{u}} = 1.$$

Gráfica de $f(u) = u^{\frac{1}{u}}$



Por los cálculos anteriores y de la gráfica se puede observar que para x en el intervalo (1, e) existe exactamente una única y en el intervalo (e, ∞) tal que (x, y) es solución de la ecuación (1). Note además que f es creciente en el intervalo (0, 1) y

$0 < f(u) < 1$	sí $0 < u < 1$
$1 < f(u) < e^{\frac{1}{e}}$	si $1 < u < e$
$1 < f(u) < e^{\frac{1}{e}}$	si $e < u < \infty$

Por lo tanto no existe solución (x, y) de la ecuación (1) tal que $0 < x < 1$ ó $0 < y < 1$.

Si en (5) tomamos $t = 1 + \frac{1}{n}$, obtenemos el siguiente conjunto de soluciones racionales

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

(6)

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

que son, exactamente, las soluciones racionales de la ecuación (1) dadas por Euler.

Observemos que cuando n tiende a ∞, t tiende a uno. Además, la sucesión $\{x_n\}$ es creciente, la sucesión $\{y_n\}$ es de decreciente y

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Es oportuno preguntarnos ahora si existen soluciones racionales de la ecuación (1) diferentes de las soluciones (x_n, y_n). Para responder a esta pregunta necesitaremos el siguiente resultado el cual se basa en el Teorema Fundamental de la Aritmética

Propiedad: Sean a, b, m, n números enteros tales que

$$(a, b) = (m, n) = 1, \qquad b \neq 0, \quad n \neq 0$$

El número

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{a}{b}}$$

es racional sí y sólo sí m, n son potencias $|b|$-ésimas de enteros.

Supongamos que x, y son soluciones racionales positivas de (1), entonces $x \neq y$. Por simetría podemos suponer que $x < y$. Luego $t = \frac{y}{x}$ es un número racional y $t > 1$. Sean p, q números enteros positivos tales que

$$t = \frac{p}{q}, \qquad (p, q) = 1, \qquad q < p.$$

Entonces existe un número entero positivo d tal que

$$t = \frac{p}{q} = \frac{q+d}{q}$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{t-1} = \frac{1}{\frac{q+d}{q}-1} = \frac{q}{d}$$

$$\frac{t}{t-1} = \frac{\frac{q+d}{q}}{\frac{q+d}{q}-1} = \frac{q+d}{d} = \frac{q}{d}+1$$

Luego por la representación (5) tenemos que

$$x = t^{\frac{1}{t-1}} = \left(\frac{q+d}{q}\right)^{\frac{q}{d}}$$

$$(7)$$

$$y = t^{\frac{t}{t-1}} = \left(\frac{q+d}{q}\right)^{\frac{q}{d}+1}$$

y (x, y) es una solución racional de la ecuación (1) .

Note que

$$(d, q) = (q, q + d) = (q, q + d) = (p, q) = 1$$

Por lo tanto

$$(d, q) = (q + d, q) = 1$$

y

$$\left(\frac{q+d}{q}\right)^{\frac{q}{d}} \quad \text{es racional}$$

Por la propiedad anterior se tiene que $q + d$ y q son potencias d-ésimas de enteros positivos.

Si $d = 1$, entonces tomando $q = n$ obtenemos de (7) que

$$x = \left(\frac{q+`d}{q}\right)^{\frac{q}{d}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$y = \left(\frac{q+d}{q}\right)^{\frac{d}{q}+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

que son las soluciones racionales de (1) dadas en (6).

Supongamos que $d > 1$. Como $q + d$ y q son potencias d-ésima de enteros positivos, existen enteros positivos a, b tales que $a < b$ y

$$q = a^d, \qquad q + d = b^d$$

Luego

$$b^d - a^d = d$$

Pero por otro lado

$$\begin{aligned} b^d - a^d &\geq (a+1)^d - a^d \\ &\geq a^d + da + 1 - a^d \\ &\geq 1 + da \\ &\geq 1 + d > d \end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Así $d = 1$ y las únicas soluciones racionales positivas de la ecuación (1) están dadas por (6); o sea,

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Finalmente, podemos observar que en las soluciones dadas en (6), se tiene que $x_n < y_n$, ya que n es un entero positivo. Si permitimos que n sea negativo; o sea,

$$n = -m, \quad \text{con } m \in \mathbf{N}$$

entonces

$$x_{-m} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^{m} = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m},$$

$$y_{-m} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m+1} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^{m-1} = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1}$$

Así $(x_{-m}, y_{-m}) = (y_{m-1}, x_{m-1})$ es una solución racional positiva de (1), la cual ya estaba dada en (6).

Con esto hemos dado respuesta a todas las preguntas sobre la solución de la ecuación (1). Sin embargo podemos hacernos muchas otras preguntas en esta dirección, como muestra presentamos las siguiente interrogante,

Pregunta: ¿Qué podemos decir de las solución racional positiva de la ecuación $x^y = y^{2x}$?

Note que esta ecuación no es simétrica. Sin embargo dejamos el siguiente resultado el cual debe ser probado.

Teorema: Si (x, y) es una solución racional positiva de la ecuación

$$x^y = y^{2x}$$

Entonces

a. $x = \left(2 + \frac{2}{n}\right)^{n}$, $y = \left(2 + \frac{2}{n}\right)^{n+1}$, para $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $n \neq -1$

ó

b. $(x, y) = (1, 1)$, $(2, 16)$ ó $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{128}, \left(\frac{4}{5}\right)^{125}\right)$

REFERENCIAS

Cho, Y. & K. Park. 2001. Inverse Functions of y = $x^{\frac{1}{x}}$, The American Mathematical Monthly 108, 963-67.

Hurwitz, S. 1961. On the rational solutions to $m^n = n^m$ with $m \neq n$, , The American Mathematical Monthly 74.

Knoebel, R. A. 1981. Exponentials reiterated, The American Mathematical Monthly 88235-52.

Langer, H. 1996. An elementary proof of the convergence of iterated exponentials, Elem. Math. 5175-77.

Slobin, H. L. 1931. The solutions of $x^y = y^x$, $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$, and their graphical representation, The American Mathematical Monthly 38) 444-47.

Sved, M. 1990. On the rational solutions to $m^n = n^m$, Math Magazine 63.

Recibido septiembre de 2010, aceptado octubre de 2011.