Tecnociencia 2011, Vol. 13, N° 2.

METRIZACIONES Y ALGUNAS PROPIEDADES DE LA TOPOLOGÍA DE FÜRSTENBERG

Jaime J. Gutiérrez G. y Eric A. Acevedo S.
Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática.
e-mail: jgutierrez @ matematicas.net, eric.acevedo@ utp.ac.pa

RESUMEN

Fürstenberg, (Acevedo, 2002) definió una particular topología τ sobre el anillo de los números enteros Z que le permitió dar una hermosa prueba de la infinitud de los números primos. Fürstenberg también señaló que el espacio topológico (Z,τ) es metrizable. Nuestro objetivo es examinar las metrizaciones conocidas del espacio de Fürstenberg y establecer algunos resultados al respecto.

PALABRAS CLAVES

Topología de Fürstenberg, Métrica, Teorema de Metrización de Urysohn.

ABSTRACT

Fürstenberg (Acevedo, 2002) defined a particular topology τ on the ring of integer numbers to give a beautiful proof of the infinitude of the prime numbers. Fürstenberg too indicated that the topological space (Z τ) is metrizable. The aim of this work is to examine the known metrizations of the Fürstenberg's space and establish some results about it.

KEYWORDS

Fürstenberg's topology, metric, Urysohn's metrization theorem.

INTRODUCCIÓN

La primera y más conocida prueba de la infinitud de los números primos es debida a Euclides. Algunos autores identifican este resultado con la denominación: El Teorema de Euclides. Se han presentado algunas demostraciones alternativas que refuerzan la creencia sobre la armonía y la unidad de la Matemática. Una discusión detallada sobre algunas de estas demostraciones se encuentra en (Ribenboim, 1996).

En su famoso artículo "*On the infinitude of primes*" (Furstenberg, 1955), Fürstenberg presenta una prueba topológica del Teorema de Euclides, la simplicidad de la demostración es inspiradora, sin embargo resulta importante discutir su profundidad. En este artículo estudiamos la Topología de Fürstenberg a través de las metrizaciones conocidas.

Denominaciones y notaciones.

Denotamos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, por $\mathbb{Z}$ al conjunto de los números enteros, por $\boldsymbol{P}$ al conjunto de los primos y por $\mathbb{Q}^+$ al conjunto de los números racionales no negativos. Para indicar, que en $\mathbb{Z}$, *d* es un divisor de *n* escribiremos $\boldsymbol{d|n}$, en caso contrario $\boldsymbol{d \nmid n}$. En un espacio métrico $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$ denotaremos por $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$ y llamaremos la bola centrada en $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$ y radio *r* al conjunto $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}: \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < \boldsymbol{r}\}$.

La Topología de Fürstenberg.

Para cada $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, definimos:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\mathbb{Z} + \boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{an} + \boldsymbol{b}: \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}\}$$

La familia de subconjuntos $\boldsymbol{\beta} = \{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})/(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}\}$ es base de una única topología $\boldsymbol{\tau}$ sobre $\mathbb{Z}$, que llamamos la topología de Fürstenberg. El espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ tiene las siguientes propiedades.

- Todo abierto no vacío de $(\mathbb{Z},\tau)$ es infinito, pues todo los abiertos de la base $\boldsymbol{\beta}$ son infinitos.
- $(\mathbb{Z}, \tau)$ es disconexo. En efecto, $\mathbb{Z}$ se puede expresar como unión finita de abiertos disjuntos de la siguiente forma: Para $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\epsilon} \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{1}} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i})$$

- De la propiedad anterior, se obtiene que $(\mathbb{Z}, \tau)$ es totalmente disconexo. (Lovas & Mező, 2010).
- Para $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\epsilon} \mathbb{N}^*$ y $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{b} < \boldsymbol{a} : \boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ es cerrado en $(\mathbb{Z},\tau)$, pues,

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbb{Z} - \bigcup_{\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{i} < \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{b},} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i})$$

- Los abierto de la base $\boldsymbol{\beta}$ también son cerrados, pues se pueden expresar de la forma $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, con $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\epsilon} \mathbb{N}^*$ y $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$.
- El espacio $(\mathbb{Z},\tau)$ es de Hausdorff (ó T_2). En efecto, si a y b son enteros distintos y k un entero positivo que no divide a $a - b$ entonces $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b})$ y $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{a}) \cap \boldsymbol{S}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}) = \emptyset$.
- El espacio $(\mathbb{Z},\tau)$ es cero dimensional, pues posee una base formada por conjuntos que son tanto abiertos como cerrados.

La infinitud de los números primos.

Sobre las propiedades del espacio (Z, τ), Fürstenberg dio la siguiente demostración de la infinitud de los números primos.

Como todo entero n con $|\boldsymbol{n}| > \boldsymbol{1}$, posee, por lo menos, un divisor primo; podemos asegurar que el conjunto $\{\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{1}\}$ es cerrado en (Z,τ), ya que su complemento es abierto.

$$\mathrm{Z}\mathbf{Z} - \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\} = \bigcup_{\boldsymbol{p} \epsilon\, \boldsymbol{P}} \boldsymbol{S}(\mathbf{p}, \mathbf{0})$$

Si el conjunto de los números primos fuese finito, $\mathrm{Z}\mathbf{Z} - \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$ sería una unión finita de cerrados y por lo tanto cerrado. Esto implicaría que el conjunto $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$ es abierto y por lo tanto infinito, lo que es absurdo.

Metrizabilidad del Espacio de Fürstenberg

Fürstenberg también aseveró que el espacio (Z,τ) es metrizable. Este resultado se puede establecer como una aplicación del Teorema de Metrización de Urysohn. (Acevedo, 2002).

Recordemos las siguientes definiciones:

Un espacio topológico es regular, o T_3, si dados un cerrado F de la topología y un punto x que no pertenece a F, existen un abierto U que contiene a x y un abierto V que contiene a F tales que $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{V} = \emptyset$.

Un espacio topológico es segundo contable, si admite una base contable.

El Teorema de Metrización de Urysohn establece condiciones suficientes para que un espacio topológico sea metrizable.

Teorema 1. (Urysohn). Todo espacio topológico regular y segundo contable es metrizable.

Demostración: Ver (Acevedo, 2002).

Para establecer la metrizabilidad de (Z,τ) basta notar que es segundo contable, pues evidentemente $\boldsymbol{\beta}$ es una base contable de la topología de Fürstenberg y es regular porque $\boldsymbol{\beta}$ es una base formada de conjuntos que son tanto abiertos como cerrados.

Como consecuencia del Teorema de Urysohn obtenemos que:

Teorema 2. El espacio (Z,τ) es metrizable.

La prueba de Urysohn descansa sobre el hecho de que un espacio topológico con las propiedades enunciadas en el teorema se puede identificar con un subespacio del cubo de Hilbert. Demostrar que un espacio topológico es metrizable y determinar explícitamente una métrica que induzca la topología son dos tareas distintas. En nuestro caso, el problema natural es definir una métrica sobre Z cuya topología inducida sea precisamente la topología de Fürstenberg.

Los autores de este artículo hemos encontrado en la literatura sólo dos métricas que en efecto inducen sobre Z la topología de Fürstenberg. En (Lovas & Mező, 2010), consideran, en primera instancia, la aplicación $\|\ \|_{\mathbf{1}}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^{+}$ definida por $\|0\|_1 = 0$ y para $\boldsymbol{n} \neq \mathbf{0}$, $\|n\|_1 = 1/k$, donde k es el único entero positivo tal que $1, 2, \ldots, k$ son divisores de n y $k+1$ no divide a n. La aplicación $\|\ \|_1$ tiene las siguientes propiedades:

Teorema 2. Para todo $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$:

a) $\|\boldsymbol{n}\|_{\mathbf{1}} = \|-\boldsymbol{n}\|_{\mathbf{1}}$.

b) $\|\boldsymbol{n}\|_{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$ si y sólo si $n = 0$.

c) $\|\boldsymbol{n}\|_{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$ si y sólo si n es impar.

d) $\|\boldsymbol{n}!\|_{\mathbf{1}} \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$

e) Si $\|\boldsymbol{n}\|_{\mathbf{1}} < \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}$ entonces $\boldsymbol{m}|\boldsymbol{n}$.

f) $\|\boldsymbol{nm}\|_{\mathbf{1}} \leq \mathbf{min}\{\|\boldsymbol{n}\|_{\mathbf{1}}, \|\boldsymbol{m}\|_{\mathbf{1}}\}$.

g) $\boldsymbol{n}$ es par si y sólo si $\|\boldsymbol{n}\|_{\mathbf{1}} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Un resultado fácil de probar, pero muy importante, es el siguiente teorema.

Teorema 3. Dados n, m enteros se tiene:

$$\|\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}\| \leq \boldsymbol{max}\{\|\boldsymbol{n}\|, \|\boldsymbol{m}\|\} .$$

Prueba. Lo propuesto es evidente si $n = 0$ ó $m = 0$. Sean r y s enteros positivos tales que $\|\boldsymbol{n}\| = \mathbf{1}/\boldsymbol{r}$ y $\|\boldsymbol{m}\| = \mathbf{1}/\boldsymbol{s}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{s}$, por lo tanto $\boldsymbol{max}\{\|\boldsymbol{n}\|, \|\boldsymbol{m}\|\} = \|\boldsymbol{n}\|$. Tenemos que $1, 2 \ldots r$ son divisores de n y m por lo tanto $\|\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}\| \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}} = \|\boldsymbol{n}\| = \boldsymbol{max}\{\|\boldsymbol{n}\|, \|\boldsymbol{m}\|\}$.

A partir de la aplicación $\|\quad\|_{\mathbf{1}}$, se define

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d_1}&: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^{+} \\ &(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) \to \boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) = \|\boldsymbol{n} - \boldsymbol{m}\| \end{aligned}$$

Teorema 4. $(\mathbb{Z}, \boldsymbol{d_1})$ es un espacio métrico y $\boldsymbol{d_1}$ es invariante por traslación.

Prueba. Es inmediato que para $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$ se tiene $\boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) = \boldsymbol{0}$ si y sólo si $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}$ y que $\boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) = \boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$. La desigualdad triangular se establece aplicando el Teorema 2, si $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$\boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}) = \|\boldsymbol{k} - \boldsymbol{n}\|_{\boldsymbol{1}} = \|(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{k})\|_{\boldsymbol{1}} \leq \mathbf{max}\{\|\boldsymbol{k} - \boldsymbol{m}\|_{\boldsymbol{1}}, \|\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}\|_{\boldsymbol{1}}\}$$

Por lo tanto: $\boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}) \leq \boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}) + \boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$. Además,

$$\boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}) = \|(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{m}) - (\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m})\|_{\boldsymbol{1}} = \|\boldsymbol{k} - \boldsymbol{n}\|_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n})$$

En realidad, hemos demostrado que $(\mathbb{Z}, \boldsymbol{d_1})$ es un espacio ultramétrico.

A continuación un resultado central de estas notas.
Teorema 5. Con la función distancia $\boldsymbol{d_1}$, $(\mathbb{Z}, \boldsymbol{d_1})$ es un espacio métrico y la topología inducida por $\boldsymbol{d_1}$ es $\boldsymbol{\tau}$, la topología de Fürstenberg.

Prueba. Supongamos que *A* es un abierto, no vacío, en $(\mathbb{Z}, \boldsymbol{d_1})$ y sea $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$. Entonces existe $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) \subseteq \boldsymbol{A}$. Consideremos $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$ con $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{m}} < \boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m}!$. Tenemos que $\|\boldsymbol{b}\|_{\boldsymbol{1}} = \|\boldsymbol{m}!\|_{\boldsymbol{1}} \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{m}}$ y $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ es un abierto de $\boldsymbol{\tau}$ incluido en *A*, pues si $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$: $\boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bn}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bn} - \boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{1}} = \|\boldsymbol{bn}\|_{\boldsymbol{1}} \leq \|\boldsymbol{b}\|_{\boldsymbol{1}} = \|\boldsymbol{m}!\|_{\boldsymbol{1}} \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{m}} < \boldsymbol{r}$. Por lo $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \subseteq \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) \subseteq \boldsymbol{A}$ y hemos probado que *A* es un abierto de $\boldsymbol{\tau}$.

Por otro lado, sea *A* un abierto de $\boldsymbol{\tau}$. Sean $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{N}$ tal que $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \subseteq \boldsymbol{A}$. Tomamos $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{b}}$ y consideremos $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$. Afirmamos que $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) \subseteq \boldsymbol{A}$. En efecto, si $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$ se tiene que $\boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{m} - \boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{1}} < \boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{b}}$. Por lo tanto *b* es un divisor de *m* – *a* y podemos escribir $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bn}$ para algún $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) \subseteq \boldsymbol{S}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \subseteq \boldsymbol{A}$ y que *A* es abierto en $(\mathbb{Z}, \boldsymbol{d_1})$.

El código, en Mathematica, presentado a continuación nos permite calcular valores de la función $\| \quad \|$ y por lo tanto de $\boldsymbol{d_1}$.

```
g[n_] := (c = Divisors[n];
d = Length[c]; h = Table[-i + c[[i]], {i, 1, d}];
For[i = 1, i < d, If[h[[i]] > 0, Break[]]; i++]; 1/(i - 1))
```

La segunda de las metrizaciones conocidas fue propuesta por J. Ferry en Science Forum Index. En este caso se considera la aplicación

$$\| \quad \|_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^+$$
$$\boldsymbol{n} \to \|\boldsymbol{n}\|_2 = \sum_{\substack{d \nmid n \\ d \geq 1}} \boldsymbol{2^{-d}}$$

Nótese que $\|\boldsymbol{0}\|_2 = \boldsymbol{0}$ y que para $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$ se tiene

$$\|\boldsymbol{n}\|_2 = \boldsymbol{1} - \sum_{\substack{d \mid n \\ d \geq 1}} \boldsymbol{2^{-d}}$$

Presentamos las propiedades básicas de la aplicación $\| \quad \|_2$ en el siguiente teorema.

Teorema 6. Para todo $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$:

a) $\|\boldsymbol{n}\|_2 = \|-\boldsymbol{n}\|_2$.

b) $\|\boldsymbol{n}\|_2 = \boldsymbol{0}$ si y sólo si *n* = 0.

c) $\|\boldsymbol{n}\|_2 \leq \frac{1}{2}$

d) $\|\boldsymbol{nm}\|_2 \leq \min\{\|\boldsymbol{n}\|_2, \|\boldsymbol{m}\|_2\}$.

e) $\|\boldsymbol{n}\|_2 \leq \frac{1}{4}$ si y sólo si *n* es par.

f) $\|\boldsymbol{n}!\|_2 < \boldsymbol{2^{-n}}$.

g) Si $\|\boldsymbol{n}\|_2 < \boldsymbol{2^{-m}}$, entonces $\boldsymbol{m} | \boldsymbol{n}$.

La distancia $\boldsymbol{d_2}$ se define para todo $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$ por $\boldsymbol{d_2(n.m)} = \|\boldsymbol{n} - \boldsymbol{m}\|_2$.

En efecto, tenemos:

Teorema 7. $(\mathbb{Z}, \boldsymbol{d_2})$ es un espacio métrico y $\boldsymbol{d_2}$ es invariante por traslación.

Prueba. Es inmediato que para $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$ se tiene $\boldsymbol{d_2}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) = \boldsymbol{0}$ si y sólo si $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}$ y que $\boldsymbol{d_2}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) = \boldsymbol{d_2}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$. La invariancia por traslación de $\boldsymbol{d_2}$ es evidente. Nos falta por demostrar la desigualdad triangular. Para tal fin, mostraremos que si $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$ entonces $\|\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}\|_2 \leq \|\boldsymbol{n}\|_2 + \|\boldsymbol{m}\|_2$. La desigualdad es obvia si $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}$. Dado un entero *r* denotamos por D_r al conjunto de los divisores positivos de *r*. Hacemos:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{A_1} & = & \boldsymbol{D_n} & \cap & (\boldsymbol{D_m})^c & \cap & (\boldsymbol{D_{n+m}})^c \\
\boldsymbol{A_2} & = & (\boldsymbol{D_n})^c & \cap & \boldsymbol{D_m} & \cap & (\boldsymbol{D_{n+m}})^c \\
\boldsymbol{A_3} & = & (\boldsymbol{D_n})^c & \cap & (\boldsymbol{D_m})^c & \cap & \boldsymbol{D_{n+m}} \\
\boldsymbol{A_4} & = & (\boldsymbol{D_n})^c & \cap & (\boldsymbol{D_m})^c & \cap & (\boldsymbol{D_{n+m}})^c
\end{array}
$$

Entonces:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(\boldsymbol{D_n})^c & = & \boldsymbol{A_2} & \cup & \boldsymbol{A_3} & \cup & \boldsymbol{A_4} \\
(\boldsymbol{D_m})^c & = & \boldsymbol{A_1} & \cup & \boldsymbol{A_3} & \cup & \boldsymbol{A_2} \\
(\boldsymbol{D_{n+m}})^c & = & \boldsymbol{A_1} & \cup & \boldsymbol{A_2} & \cup & \boldsymbol{A_4}
\end{array}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}\|_2 &= \sum_{\boldsymbol{d} \in (\boldsymbol{D_{n+m}})^c} \boldsymbol{2^{-d}} \\
&\leq \sum_{\boldsymbol{d} \in (\boldsymbol{D_n})^c} \boldsymbol{2^{-d}} + \sum_{\boldsymbol{d} \in (\boldsymbol{D_m})^c} \boldsymbol{2^{-d}} = \|\boldsymbol{n}\|_2 + \|\boldsymbol{m}\|_2
\end{aligned}
$$

Nótese que $\boldsymbol{d_2}$, a diferencia de $\boldsymbol{d_1}$ no es una ultramétrica.

Por ejemplo

$$\|\mathbf{5}\|_{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{32}} > \mathbf{max}\{\|\mathbf{2}\|_{\mathbf{2}}, \|\mathbf{3}\|_{\mathbf{2}}\} = \mathbf{max}\left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\right\}.$$

A continuación un código en Mathematica para calcular valores de las funciones $\| \quad \|_{\mathbf{2}}$ y $\boldsymbol{d_2}$.

$$\boldsymbol{f}[\mathbf{n\_}] := (\boldsymbol{a} = \mathbf{Divisors}[\boldsymbol{n}]; \boldsymbol{b} = \mathbf{Length}[\boldsymbol{a}]; \mathbf{1} - \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{b}} \mathbf{2}^{-\boldsymbol{a}[[\boldsymbol{j}]]})$$

Teorema 8. Con la función distancia $\boldsymbol{d_2}$, $(\mathbb{Z}, \boldsymbol{d_2})$ es un espacio métrico y la topología inducida por $\boldsymbol{d_1}$ es $\boldsymbol{\tau}$, la topología de Fürstenberg.

Prueba. Supongamos que *A* es un abierto, no vacío, en $(\mathbb{Z}, \boldsymbol{d_2})$ y sea $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$. Entonces existe $\boldsymbol{r} > \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) \subseteq \boldsymbol{A}$. Tomemos $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$ con

$$\sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{m}+\mathbf{1}}^{\infty} \mathbf{2}^{-\boldsymbol{i}} < \boldsymbol{r} \quad \mathbf{y} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{m}!$$

Resulta que $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ es un abierto de $\boldsymbol{\tau}$ incluido en *A*, pues si $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{d_2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bn}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bn} - \boldsymbol{a}\|_{\mathbf{2}} = \|\boldsymbol{bn}\|_{\mathbf{2}} \leq \|\boldsymbol{b}\|_{\mathbf{2}} = \|\boldsymbol{m}!\|_{\mathbf{2}}.$$

Además, si $\boldsymbol{d} \nmid \boldsymbol{m}!$ se tiene que $\boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{b} + \mathbf{1}$, por lo tanto

$$\|\boldsymbol{m}!\|_{\mathbf{2}} = \sum_{\substack{\boldsymbol{d} \nmid \boldsymbol{m}! \\ \boldsymbol{d} \geq \mathbf{1}}} \mathbf{2}^{-\boldsymbol{d}} < \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{b}+\mathbf{1}}^{\infty} \mathbf{2}^{-\boldsymbol{i}} < \boldsymbol{r}$$

Esto prueba que $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \subseteq \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) \subseteq \boldsymbol{A}$ y que *A* es un abierto de $\boldsymbol{\tau}$.

Por otro lado, sea *A* un abierto de $\boldsymbol{\tau}$. Sean $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{N}$ tal que $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \subseteq \boldsymbol{A}$. Tomamos $\boldsymbol{r} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{b}}}$ y consideremos $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$. Afirmamos que $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) \subseteq \boldsymbol{A}$. En efecto, si $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$ se tiene que $\boldsymbol{d_2}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{m} - \boldsymbol{a}\|_{\mathbf{2}} < \boldsymbol{r} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{b}}}$. Por lo tanto *b* es un divisor de *m* – *a* y podemos escribir $\boldsymbol{m = a + bn}$ para algún $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{B(a, r)} \subseteq \boldsymbol{S(b, a)} \subseteq \boldsymbol{A}$ y que *A* es abierto en $(\mathbb{Z}, \boldsymbol{d_2})$.

Corolario 1. Las métricas $\boldsymbol{d_1}$ y $\boldsymbol{d_2}$ son topológicamente equivalentes.

Recordemos que dos métricas *d* y *D* sobre un conjunto *X* son métricamente equivalentes si existen constantes positivas $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ tales que para todo $\boldsymbol{x, y} \in \boldsymbol{X}$ se tiene que $\boldsymbol{\alpha d(x, y)} \leq \boldsymbol{D(x, y)} \leq \boldsymbol{\beta d(x, y)}$. Es conocido que distancias métricamente equivalentes son topológicamente equivalentes, pero en general la equivalencia topológica no implica la equivalencia métrica. De forma natural nos hemos preguntado sobre la equivalencia métrica de las distancias $\boldsymbol{d_1}$ y $\boldsymbol{d_2}$ aquí estudiadas. Algunos "evidencias numéricas" nos inclinan a pensar que las distancias $\boldsymbol{d_1}$ y $\boldsymbol{d_2}$ no son métricamente equivalentes. Al respecto, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 9. Para todo $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$\|\boldsymbol{n}\|_{\boldsymbol{2}} \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \|\boldsymbol{n}\|_{\boldsymbol{1}}.$$

Prueba. Sea $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$. La desigualdad propuesta se cumple evidentemente para $\boldsymbol{n = 0}$. Supongamos que $\boldsymbol{n \neq 0}$ y que $\|\boldsymbol{n}\|_{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{k}}$. Entonces *1, 2, ..., k* son divisores de *n* y Por lo tanto

$$\|\boldsymbol{n}\|_{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{1} - \sum_{\substack{d|n \\ d \geq 1}} \boldsymbol{2^{-d}} \leq \boldsymbol{1} - \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{2^{-j}} = \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{k}} \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2k}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \|\boldsymbol{n}\|_{\boldsymbol{1}}$$

Teorema 10. El espacio $(\mathbb{Z}, \boldsymbol{d_1})$ es totalmente acotado

Prueba. Sea $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ y *p* un primo impar tal que $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{p-1}} < \boldsymbol{\varepsilon}$. Para cada entero *r* con $\boldsymbol{0 \leq j < (p-1)!}$, consideramos $\boldsymbol{B_j = B(j, \varepsilon)}$. Aseguramos que

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{j=0}^{(p-1)!-1} \boldsymbol{B_j}$$

En efecto, sea $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene que

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}-\mathbf{1})! + \boldsymbol{j} \ \ \mathbf{con} \ \ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{j} < (\boldsymbol{p}-\mathbf{1})!$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{j}) = \|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{j}\|_{\mathbf{1}} = \|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}-\mathbf{1})!\|_{\mathbf{1}} \leq \|(\boldsymbol{p}-\mathbf{1})!\|_{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}-\mathbf{1}} < \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Esto prueba que $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{B_j}$ y con esto queda establecido el enunciado del teorema.

Nuestro siguiente objetivo es establecer la no compacidad del espacio de Fürstenberg. Para tal fin, necesitamos algunas nociones teórico-numéricas.

Dado un entero positivo $\boldsymbol{m}$, decimos que $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$ es un residuo cuadrático módulo $\boldsymbol{m}$ si la congruencia $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} \equiv \boldsymbol{n} \ (\mathbf{mod}\ \boldsymbol{m})$ admite solución. Nótese que si $\boldsymbol{m}|\boldsymbol{n}$ entonces $\boldsymbol{n}$ es un residuo cuadrático módulo $\boldsymbol{m}.$ Si $\boldsymbol{p}$ es un número primo y $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$, denotamos por $\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{p}}\right)$ al símbolo de Legendre de *n* con respecto a $\boldsymbol{p}$ y lo definimos

$$\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{p}}\right) = \begin{cases} \mathbf{1} \ \ \mathbf{si} \ \ \boldsymbol{p} \nmid \boldsymbol{n} \ \mathbf{y\ n\ es\ un\ residuo\ cuadrático\ módulo}\ \boldsymbol{p}. \\ \quad \mathbf{0\ si}\ \boldsymbol{p}|\boldsymbol{n} \\ -\mathbf{1} \ \ \mathbf{si} \ \ \boldsymbol{p} \nmid \boldsymbol{n} \ \mathbf{y\ n\ es\ un\ residuo\ cuadrático\ módulo}\ \boldsymbol{p}. \end{cases}$$

Aplicaremos las siguientes propiedades del símbolo de Legendre,

- $\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}\right) = \mathbf{1}$
- Si $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$, $\left(\frac{\boldsymbol{mn}}{\boldsymbol{p}}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{p}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{p}}\right)$
- Si $\boldsymbol{p} \nmid \boldsymbol{n},$ $\left(\frac{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{p}}\right) = \mathbf{1}.$
- Si $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$ son tales que $\boldsymbol{m} \equiv \boldsymbol{n} \ (\mathbf{mod}\ \boldsymbol{p})$ entonces $\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{p}}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{p}}\right).$

Ahora, enunciamos a manera de lema dos resultados de utilidad para nuestro fin.

Lema 1. Sea $\boldsymbol{m}$ un entero no nulo, entonces existe un primo impar *p* tal que $\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{p}}\right) = \mathbf{1}$.

Prueba. Tomemos $\boldsymbol{n} = \mathbf{4}\boldsymbol{m} - \mathbf{1}$, se tiene que *n* es impar y $|\boldsymbol{n}| > \mathbf{1}$. Escogemos un primo impar *p* divisor de *n* y nos queda que $\boldsymbol{p} \nmid (\boldsymbol{n} + \mathbf{1})$ y

$$\mathbf{1} = \left(\frac{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}\right) = \left(\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{p}}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{p}}\right).$$

Lema 2. Sean $\boldsymbol{p_1},\ \boldsymbol{p_2}, \dots, \boldsymbol{p_k}$ primos impares distintos. Entonces existe $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{p_1}}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{p_2}}\right) = \dots = \left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{p_k}}\right) = -\mathbf{1}$$

Prueba. Para cada $\boldsymbol{p_i}$ escogemos $\boldsymbol{a_i} \in \mathbb{Z}$ tal que $\left(\frac{\boldsymbol{a_i}}{\boldsymbol{p_i}}\right) = -\mathbf{1}$. Consideramos el sistema de congruencias:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{a_1} \ (\mathbf{mod}\ \boldsymbol{p_1}) \\ \boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{a_2} \ (\mathbf{mod}\ \boldsymbol{p_2}) \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{a_k} \ (\mathbf{mod}\ \boldsymbol{p_k}) \end{cases}$$

Por el teorema chino de los restos, el sistema admite una solución $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$. Para $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{k}$ se tiene

$$\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{p_i}}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{a_i}}{\boldsymbol{p_i}}\right) = -\mathbf{1}.$$

Teorema 11. El espacio $(\mathbb{Z}, \boldsymbol{\tau})$ de Fürstenberg no es compacto.

Prueba. Sea $\boldsymbol{P}^*$ el conjunto de los primos impares, para $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}^*$ consideramos el abierto

$$\boldsymbol{A_p} = \bigcup_{\boldsymbol{0 \leq a < p}} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a^2})$$

$\boldsymbol{A_p}$ es el conjunto de los residuos cuadráticos módulo p. Por el lema 1, la familia $\{\boldsymbol{A_p}\}_{\boldsymbol{p \in P^*}}$ es un cubrimiento abierto de $\mathbb{Z}$ y por el lema 2 este cubrimiento no admite sub-cubrimientos finitos.

Como consecuencia de los dos teoremas anteriores, tenemos

Corolario 2. El espacio $(\mathbb{Z}, \boldsymbol{d_1})$ no es completo.

CONCLUSIONES

Luego del estudio de las conocidas metrizaciones del espacio de Fürstenberg hemos establecido que éstas son topológicamente equivalentes, sin embargo la equivalencia métrica no ha sido establecida ni refutada.

El hecho de que $\boldsymbol{d_1}$ sea una ultramétrica, a diferencia de $\boldsymbol{d_2}$, nos inclina a pensar que no es posible la equivalencia métrica de las distancias, pero esto no representa un paso significativo.

Hemos probado que el espacio de Fürstenberg es totalmente acotado, no compacto y no completo.

Toda vez que $\mathbb{Z}$ es un anillo topológico con respecto a la suma y multiplicación usual y la topología, sería interesante estudiar la completación correspondiente siguiendo las ideas dadas en (Baker, 2010).

REFERENCIAS

Acevedo, E. 2002. Metrización de Espacios Topológicos según el Teorema de Uryshon. Tesis para optar por el grado de Licenciado en Matemática. Universidad de Panamá.

Furstenberg, H. 1955. *On the infinitude of primes*, American Mathematical Monthly. Vol. 62(5), pp.353.

Ribenboim, P. 1996. *The New Book of Prime Number Records,* 3rd ed., Springer-Verlag, New York.

Lovas, R.L. & I. Mező. 2010. *On an exotic topology of the integers* http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1008/1008.0713v1.pdf

Science Forum Index, http://www.groupsrv.com/science/about483222.html.

Broughan**,** K. 2003. *Adic Topologies for the Rational Integers*, Canad. J. Math. Vol. 55 (4), pp. 711.723.

Broughan, K. & F. Luca. 2010. *On the Fürstenberg closure of a class of binary*. Journal of Number Theory. Vol. 130(5), pp. 696-706.

Baker, A. 2010. *An introduction to p-adic numbers and p-adic Analysis*. http://www.maths.gla.ac.uk/~ajb/dvi-ps/padicnotes.pdf.

Recibido septiembre de 2010, aceptado diciembre de 2011.