Tecnociencia 2012, Vol. 14, N° 1.

CONTINUIDAD Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Daniel Vásquez
Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática.
E-mail:dvasquez65@yahoo.com

RESUMEN
El propósito de este trabajo es presentar un ejemplo de una función continua en una parte densa de R y discontinua en una parte enumerable cuyo grafo es totalmente discontinuo. Se demuestra que no se debe tratar el grafo de una función como un objeto concreto para estudiar la continuidad.

PALABRAS CLAVES
Continuidad, conjunto totalmente discontinuo, densidad, enumerabilidad.

ABSTRACT
The aim of this work is to give an example of a continuous function on a dense part of R, discontinuous on an enumerable part which its graph is totally discontinuous. It is demonstrated that we should not use the graph of a function as a concrete object to study continuity.

KEYWORDS
Continuity, totally discontinuous set, density, enumerability.

INTRODUCCIÓN
La idea de continuidad constituye uno de los conceptos capitales de la topología y el análisis. En las primeras etapas del desarrollo del

cálculo las relaciones entre variables eran casi siempre continuas. La continuidad quedaba reflejada en su gráfica; era una curva que podía ser trazada sin levantar el lápiz de la hoja.

Con el desarrollo del concepto de función durante el siglo XIX en las obras de Fourier, Cauchy, Bolzano y otros científicos se inicia la consideración de la continuidad como una propiedad que puede o no tener una función. El descubrimiento de funciones que en ningún punto tienen derivada y que representan fenómenos de difusión mostró de manera contundente que el análisis de la continuidad separada de otras propiedades íntimamente relacionadas como la derivada no eran un mero afán de realizar abstracciones, sino que eran necesidades reales planteadas al desarrollo del análisis a través de sus vinculaciones con las ciencias físicas; era una nueva etapa en el estudio matemático del movimiento, que requería de un instrumento más desarrollado, conceptualmente más claro.

Surge de estas y otras situaciones que no hemos mencionado aquí la necesidad real de profundizar en los conceptos de lo continuo y lo discontinuo.

Aunque el grafo es muy buen retrato del comportamiento de una función, la continuidad y la discontinuidad están determinadas por la naturaleza de la correspondencia entre las variables independientes y dependientes, es decir, la continuidad y la discontinuidad son atributos del nexo funcional entre las variables que estamos sometiendo a estudio. Para profundizar en el análisis de estos atributos debemos ver como están reflejados en la función y no solo en su grafo.

1. Preliminares

Definición 1: Sea (E,d) un espacio métrico y $X \subseteq E$. X es conexo si no es la unión de dos conjuntos no vacíos separados.

Definición 2: Sea (E,d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in A$. El mayor subconjunto conexo de A que contiene a x se llama la componente conexa de x en A.

Proposición 1: Una parte A de un espacio métrico es totalmente discontinua cuando toda componente conexa en A se reduce a un punto.

Para presentar el ejemplo que muestra una función continua en una parte densa de R y discontinua en una parte enumerable hagamos ciertas convenciones.

Dado un número real $x \neq 0$ hay dos posibilidades:
(1) x es un número decimal finito.
(2) x es un número decimal infinito.

En el caso (1) adoptaremos la siguiente escritura:
Si
$$x = d_0, d_1 d_2 ... d_n \; con \; d_0 \in Z, 0 \leq d_i \leq 9 \; para \, 1 \leq i \leq n-1 \; y \, 1 \leq d_n \leq 9$$

escribimos
$$x = d_0, d_1 d_2 ... d_{n-1}(d_n - 1)999... \quad si \quad x \neq 0 \; y \; x \notin Z^-.$$

Si $x \in Z^-$ *o sea* $x = d_0$ *con* $d_0 \in Z^-$ escribiremos

$$x = (d_0 + 1),999...$$

En el caso (2) mantendremos su escritura.

En conclusión, todo número real tiene una escritura infinita en forma decimal, o sea, si $x \in R, x \neq 0$
$$x = d_0, d_1 d_2 ...$$

donde $d_0 \in Z \; y \; 0 \leq d_i \leq 9$ para todo i y para todo n∈N, existe $n_k \geq n$ tal que $d_{n_k} \neq 0$

En el caso x=0 escribimos
$$x=0.000\ldots$$

Ahora, dados dos números reales x,y∈R

$$x = d_0, d_1 d_2 ...$$
$$y = s_0, s_1 s_2 ...$$

(a) $0 \leq x < y \quad si\ y\ solo\ si \quad \begin{cases} d_0 < s_0 \quad ó \\ \exists n > 0\ tal\ que \\ d_0 = s_0,\ d_1 = s_1, ..., d_{n-1} = s_{n-1}\ y\ d_n < s_n \end{cases}$

(b) x < y < 0 si y solo si 0 < - y < -x

Definamos el siguiente conjunto:

$$K = \{x = d_0, d_1 d_2 ... \in R / \exists n_0 \geq 0\ con\ d_i = 9 \quad \forall i \geq n_0\}$$

Propiedades del conjunto K
(i) K es denso en R
(ii) K es enumerable

Demostración
(i) Sea $x = d_0, d_1 d_2 ...$ un número real. Consideremos la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} x_1 &= d_0, d_1 999\ldots \\ x_2 &= d_0, d_1 d_2 999\ldots \\ &\vdots \\ x_1 &= d_0, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots \end{aligned}$$

Es obvio que $\{x_n\}$ es una sucesión de elementos de K y

$$|x_n - x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Con lo cual queda demostrado que todo número real es límite de una sucesión de elementos de K, de donde K es denso en R.

2. Ejemplo
Consideremos la función

$$f : R \to R$$
$$x = d_0, d_1 d_2 \ldots \to f(x) = d_0, 0 d_1 0 d_2 \ldots$$

Propiedades de la función f:
(1) f es impar
(2) f es creciente

Demostración:
Sean $x = d_0, d_1 d_2 ...$ y $y = s_0, s_1 s_2 ...$ números reales tales que x < y.
a) si x = 0 entonces por definición f(0) = 0 y f(x) > 0. Por consiguiente f(x) < f(y)

b) Supongamos x > 0. Como x < y se tiene que

$$d_0 < s_0 \;\; ó \;\; \exists n > 0 \; tal \; que \;\; d_0 = s_0, \, d_1 = s_1, ..., d_{n-1} = s_{n-1} \;\; y \;\; d_n < s_n$$

y

$$f(x) = d_0{,}0 d_1 0 d_2 \ldots \quad , \quad f(y) = s_0{,}0 s_1 0 s_2 \ldots$$

Por lo tanto

$$0 < f(x) < f(y)$$

c) Si $x < 0 \leq y$ es obvio que $f(x) < 0 \leq f(y)$.
d) Si x < y < 0 entonces 0 > -y > -x lo que implica (por ser f impar) que

$$f(-x) = - f(x) \text{ y } f(-y) = -f(y).$$

Por lo tanto f(x) < f(y).

En conclusión, f es estrictamente creciente.
(3) f es continua en x, para todo $x \in R-K$

Demostración:
Sea $x = d_0, d_1 d_2 \ldots \in R - K$. Como f es estrictamente creciente para probar que f es continua en x solo hay que probar que:

$$f(x) = \inf \{ f(y) / y > x \}$$

y

$$f(x) = \sup f \{ f(y) / y < x \}$$

Como f es impar podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \geq 0$

CASO 1. Supongamos que x > 0 y sea ε > 0.

(a) Como $x \notin K$, existe un número natural n suficientemente grande con las siguientes propiedades:

i) $10^{-n} < \varepsilon$

ii) $d_n \neq 9$

luego, existe

$$y = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{n-1} 999 \ldots > x$$

de donde se obtiene

$$0 < f(y) - f(x) < 0.\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1 = 10^{-n} < \varepsilon$$

Con lo cual se concluye

$$f(y) < f(x) + \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq \inf\{f(y) / y > x\} < f(x) + \varepsilon$$
$$\Rightarrow f(x) = \inf\{f(y) / y > x\}$$

(b) De la misma forma, como $x \notin K$, x > 0 existe un número natural n suficientemente grande con las siguientes propiedades:

i) $10^{-n} < \varepsilon$

ii) $d_n \neq 0 \ \left(o\ sea\ d_n \geq 1\right)$

luego existe

$$y = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{n-1} 00999 \ldots < x$$

de donde se obtiene

$$0 < f(x) - f(y) < 0.\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1 = 10^{-n} < \varepsilon$$

Con lo cual se concluye

$$f(x) < f(y) + \varepsilon \Rightarrow f(x) - \varepsilon < \sup\{f(y) / y < x\} \leq f(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = \sup\{f(y) / y < x\}$$

Por (a) y (b) f es continua en x.

CASO II:
(c) Supongamos que x = 0. Utilizando el mismo argumento de (a) obtenemos que:

$$f(0) = \inf\{f(y)/y > x\}$$

(d) En la parte (b) la única modificación que tenemos que hacer es en la definición de y. En este caso tome

$$y = -\,0.00\ldots01$$

por lo tanto

$$f(0) - f(y) < 10^{-n} < \varepsilon$$

y

$$f(0) = \sup\{f(y)/y < 0\}$$

así que f es continua en x = 0.

Hemos probado así que f es continua en cada punto de R-K.

4) f es discontinua en cada punto de K.

CASO I:
Sea $x \in K$, x > 0. Luego

$$x = d_0, d_1 d_2 \ldots d_n 999\ldots$$

(a) Utilizando el mismo argumento empleado en (b) de la parte anterior obtenemos que para cada $x \in K$:

$$f(x) = \sup\{f(y)/y < x\}.$$

(b) Ahora

$$f(x) = d_0{,}0d_1 0d_2 \ldots 0d_n 0909\ldots$$

Demostremos que

$$\inf\{f(y)/y > x\} = d_0{,}0d_1 0d_2 \ldots 0d_n 99\ldots$$

En efecto, denotemos

$$p = d_0{,}0d_1 0d_2 \ldots 0d_n 99\ldots$$

Sea $s = s_0, s_1 s_2 \ldots \in R$ tal que s > x. Como

$$f(s) = s_0,0s_1 0s_2,\ldots,0s_n,0s_{n+1}\ldots$$

Es obvio que f(s) > p, por lo tanto

$$p \le \inf\{f(y)/y > x\} \qquad (\alpha).$$

Ahora, para cada m > n definamos el número

$$y_m = d_0,\underbrace{d_1 d_2 \ldots d_{n-1}(d_n+1)00\ldots0}_{m\ posiciones}99\ldots$$

Nota: si $d_n = 9$ tomamos

$$y_m = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{n-2}(d_{n-1}+1)d_n 00\ldots 099\ldots$$ y así sucesivamente.

Es obvio que

$$y_m > y_{m+1} > x \text{ para todo } m > n$$

Ahora:

$$f(y_m) = d_0,0d_1 0d_2\ldots 0(d_n+1)0\ldots0909\ldots$$

y

$$f(y_m) \xrightarrow[\substack{m\to\infty \\ m>n}]{} d_0,0d_1 0d_2\ldots 0(d_n+1)$$

pero

$$d_0,0d_1 0d_2\ldots 0(d_n+1) = d_0,0d_1 0d_2\ldots 0d_n 99\ldots = p$$

de donde

$$f(y_n) \downarrow p$$

con lo cual

$$\inf\{f(y_n)\} = p$$

Por otra parte, como

$$\{f(y_n)\} \subseteq \{f(y)/y > x\}$$

obtenemos

$$\inf\{f(y_n)\} \ge \inf\{f(y)/y > x\}$$

de donde

$$p \geq \inf\{f(y) / y > x\} \qquad (\beta)$$

por consiguiente, de (α) y (β) obtenemos

$$p = \inf\{f(y) / y > x\} \qquad y \qquad p \neq f(x).$$

de (a) y (b) obtenemos que

$$f(x) = \sup\{f(y) / y < x\} \quad y \quad f(x) < \inf\{f(y) / y > x\}$$

Por lo tanto, f es continua a izquierda de x pero discontinua a derecha, lo cual implica que f no es continua en $x \in K$, $x > 0$.

CASO II.
Sea $x \in K$, $x < 0$. Como f es impar obtenemos que f es continua a derecha de x y discontinua a izquierda. Así que f es discontinua en x. Luego concluimos que K es el conjunto de discontinuidades de f.

Teorema: sea f: R→R una función monótona. Entonces f es continua excepto en un conjunto enumerable (finito o infinito) de puntos.

Como nuestra función es estrictamente creciente y K es el conjunto de discontinuidades de f, entonces K es enumerable.

En resumen:

- F es continua en R-K y discontinua en K.
- K y R-K son densos en R.
- f tiene un grafo totalmente discontinuo.

REFERENCIAS

Apostol, T. 1960. Análisis Matemático. Editorial Reverté S.A. España.

Brehmer, S. 1980. Análisis Matemático I. Editorial Pueblo y educación. Cuba.

Bushaw, D. 1970. Fundamentos de Topología. Editorial Limusa-Willey S. A. México.

De Burgos, J. 2007. Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editorial McGraw-Hill. México.

Iribarren, I. 1973. Topología de Espacios Métricos. Editorial Limusa. México.

Jacques, S. 1980. Representation Graphique et continuite. Francia.

Hasser, N. & J. Sullivan. 1978. Análisis Real. Editorial Trillas. México.

Natanson, I. P. 1967. Theory of Functions of a Real Variable. Frederick Ungar Publishing CO. New York.

Rudin, W. 1980. Principios de Análisis Matemático. Editorial McGraw-Hill. México.

White, A. J. 1973. Introducción al Análisis Real. Ediciones de Promoción Cultural, S. A. España.

Recibido septiembre de 2010, aceptado mayo de 2012.