Tecnociencia 2012, Vol. 14, N° 1.

PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DE LA LÍNEA KHALIMSKY

Eric Antonio Acevedo
Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología
Departamento de Matemática.
E-mail: eric.acevedo@utp.ac.pa

RESUMEN

En los años 1977 y 1986, Khalimsky, y más recientemente Kovalevsky (1988), propusieron que una imagen digital está asociada a un espacio topológico. Desde entonces, las nociones de topología general son usadas en el procesamiento de imágenes digitales. En este contexto, una de las topologías más utilizada es la topología de Khalimsky. El objetivo de este trabajo es categorizar el espacio topológico de Khalimsky tomando como punto de partida las propiedades de los espacios de Alexandroff.

PALABRAS CLAVES

Espacios de Alexandroff, Conjuntos Parcialmente Ordenados, Espacios de Kolgomoroff o Espacios T_O, Topología de Khalimsky.

ABSTRACT

In the years 1977 and 1986, Khalimsky, and more recently Kovalevsky (1988), have shown that the digital images are associated to topological notions. Since then, the notions of general topology had been used in the processing of digital images. In this context, one of the more useful topologies is the Khalimsky's topology. The aim of this work is to categorize the Khalimsky's topological space taking as a starting point the properties of the spaces of Alexandroff.

KEYWORDS

Alexandroff Space, Ordered Parcial Sets, Kolgomoroff Space or T_0 −Space, Khalimsky Topology.

INTRODUCCIÓN

En los espacios topológicos en las que los abiertos son estables por intersecciones arbitrarias, son de especial interés en la Topología General y la Topología Digital. Paul Alexandroff (1937) realizó estudios acerca de tales espacios. Más adelante Efim Khalimsky (1987; 1990) publicó sobre estos espacios y además desarrollo una topología sobre ellos, que hoy en día es la base de la Topología Digital para el procesamiento de imágenes en computadora (Kovalevsky, 2006). Erik Melin ha escrito varios artículos con respecto a esta topología (Melin, 2003a, 2003b, 2008, 2004) y las propiedades que ella posee con respecto a otros espacios topológicos.

1. ESPACIOS DE ALEXANDROFF

Definición 1 Un espacio topológico es de Alexandroff si la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Una característica importante de estos espacios es que tienen una base de elementos mínimos o vecindad mínima.

Definición 2 Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$.
Definimos $V(x) = \cap \{U \in \tau : x \in U\}$

Observemos que para todo x elemento de un espacio topológico (X, τ); $V(x) \neq \phi$.

Pues, al ser x un elemento de τ tenemos que $x \in V(x)$.

Claramente, cuando (X, τ) es un espacio de Alexandroff, $V(x)$ es un elemento de τ. El reciproco de esta afirmación también es verdadero, cuando $V(x) \in \tau$ para toda $x \in X$, a continuación damos la prueba.

Proposición 1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces $V(x) \in \tau$, para toda $x \in X$ si y solo si (X, τ) es de Alexandroff.

Demostración: Si (X, τ) es de Alexandroff es inmediato que $V(x) \in \tau$, para toda $x \in X$. Ahora, supongamos que $V(x) \in \tau$ para toda $x \in X$ y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de τ. Hay que demostrar que $\cap_{i\in I} U_i \in \tau$.

Es suficiente con verificar que para todo $U \in \cap_{i\in I} U_i$ existe una vecindad de U que es un subconjunto de $\cap_{i\in I} U_i$. Sea $x_0 \in \bigcap_{i\in I} U_i$, entonces, $x_0 \in U_j$ para toda $j \in I$, pero, por hipótesis $V(x_0) \in \tau$, por lo que $V(x_0) \subset U_j$ para toda $j \in I$. Por lo tanto $x_o \in V(x_0) \subset \cap_{i\in I} U_i$. Concluimos que (X, τ) es de Alexandroff.

Si (X, τ) es de Alexandroff, llamaremos a $V(x)$ la vecindad mínima de x o la estrella de x, y la denotaremos como $St(x)$.

Observación: Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff, $x \in X$ y V es una vecindad de x entonces $St(x) \subseteq V$.

Proposición 2. Sea (X, τ) un espacio de Alexandroff. Entonces: $\beta = \{St(x);\ x \in X\} \cup \{\phi\}$ es una base de τ.

Demostración: Por ser (X, τ) de Alexandroff, $\beta \subset \tau$.
Para demostrar que β es una base de τ es suficiente con asegurar que para cada $x \in X$ y cada vecindad U de x, existe un $V \in \beta$ tal que $x \in V \subset U$.

Sean $x \in X$ y U una vecindad de x, sabemos que $St(x) \subset U$. Por lo tanto β es base de τ.

Sea Z el conjunto de los números enteros y consideremos la familia β de subconjuntos de Z dado por

$$\beta = \{\{2n,\ 2n+1,\ 2n+2\} : n \in Z\}$$

o el equivalente, generado por la base

$$\sigma = \{ \{2n, \ 2n+1, \ 2n+2\} : n \in Z \} \cup \{ 2n+1 : n \in Z \} \cup \{\phi\}$$

Entonces β es sub-base de una única topología sobre Z. A esta topología la llamamos la **Topología de Khalimsky** sobre Z y la denotamos τ_k.

Observación: Los abiertos de τ_k son uniones de conjuntos de la forma $\{n-2, \ n-1, \ n\}$ con n par y $\{n\}$ con n impar.

Proposición 3. $(Z, \ \tau_k)$es un espacio de Alexandroff.

Demostración: Comprobaremos que para cada $n \in Z$; $V(n) \in \tau_k$. Sea $A = \{n-2, n-1, n\}$ y $B = \{n, n+1, n+2\}$ dos abiertos de τ_k. Si n es par, tenemos que $A \cap B = \{n\}$ es abierto.

Sea $m \in Z, m \neq n$, si $m < n$, el abierto B no contiene a *m,* si $m > n$, el abierto A no contiene a *m,* , por tanto $V(n) = \{n\} \in \tau_k$.

Si n es impar tenemos que $n+1$ es par y $C = \{n-1, n, n+1\}$ es abierto y contiene a n, donde $C = V(n) \in \tau_k$ (Por la observación anterior).

Sea V una vecindad de n, entonces existe un abierto O de τ_k tal que $n \in O \subseteq V(n)$.

Por lo tanto $(Z, \ \tau_k)$ es de Alexandroff.

Observación:
De la demostración anterior, tenemos que:

$$St(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{si } n \text{ es par} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Recordemos que en un espacio de Alexandroff habíamos convenido en llamar a $V(x)$ estrella y denotarlas como $St(x)$. Luego la base que define al espacio $(\mathrm{Z},\ \tau_k)$ de acuerdo a la Proposición 2 quedaría de la siguiente manera:

$$\beta = \{ St(n) : n \in \mathrm{Z} \}$$

Según el resultado anterior, $(\mathrm{Z},\ \tau_k)$ es un espacio de Alexandroff pero, claramente, tiene un número infinito de elementos; este espacio lo llamaremos Espacio Topológico de Khalimsky.

1.1 Espacios Topológicos Inducidos por Órdenes Parciales

En esta sección, dado un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$; construiremos una topología en X tomando como base los conjuntos de la forma:

$$U(x) = \{y \in X; x \leq y\} \text{ con } x \in X \quad (1)$$

Teorema 1. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces $(X, \leq)$ es un espacio topológico, donde $\tau_{\leq}$ es la topología generada por la base.

$$\beta = \{U(x) : x \in X\} \cup \{\phi\} \text{; donde } U(x) = \{y \in X : x \leq y\}$$

Demostración: Primero probaremos que $\bigcup_{x\in X} U(x) = X$. Sea $x_0 \in X$ entonces, como $\leq$ es reflexiva $x_0 \in U(x_0)$. Luego $X \subset \cup \beta$. Por lo tanto $\bigcup_{x\in X} U(x) = X$. Sea $x_1 x_2 \in X$ y verifiquemos que existe $U(x) \subseteq U(x_1) \cap U(x_2)$ como $y \in U(x)$ entonces si $x_1 \leq x$ tenemos que $x_1 \leq y$ por lo tanto $y \in U(x_1)$. De igual forma se prueba que $y \in U(x_2)$. Por lo tanto, $\tau_{\leq}$ es la única topología de la que β es base.

De acuerdo con el resultado anterior, $U(x)$ es un conjunto abierto, para cualquier $x \in X$. Más aún, no existe ningún abierto no totalmente contenido en $U(x)$.

Observación: En cualquier espacio topológico (X, τ) toda vecindad $U(x) \subset U$.

Colorario 1. Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $\tau_{\leq}$ es la topología dada por $\leq$ sobre X, $(X, \tau_{\leq})$ es de Alexandroff.

Demostración: Sea $\bigcap_{i \in I} U_i = \phi$ entonces, trivialmente $\bigcap_{i \in I} U_i \in \tau_{\leq}$. Supongamos $\bigcap_{i \in I} U_i \neq \phi$, entonces $\{U_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos de $\tau_{\leq}$. Supongamos que $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ para toda $i \in I$, entonces $x \in U(x) \subseteq \bigcap_{i \in I} U_i$, hemos probado así que $\bigcap_{i \in I} U_i$ es vecindad de todos sus puntos; por lo tanto es abierto. Con esto $(X, \tau_{\leq})$ es de Alexandroff.

Tenemos que para estos espacios $U(x) = St(x)$. Por lo que de ahora en adelante utilizaremos la notación $St(x)$ cuando trabajemos con este tipo de espacio. Por definición de $St(x)$, este es el abierto mínimo que contiene a x y podemos describirla en término de la relación de orden en (1). Esto también es posible para describir al mínimo conjunto cerrado que contiene a un elemento x, es decir, podemos caracterizar a la cerradura de cualquier elemento a partir de la relación de orden.

Escrito de otra forma tenemos que:

Sea $x \in X$, entonces $\{U_i\}$ con $i \in \mathrm{I}$ es la familia de abiertos de τ que contiene a x. Sabemos que $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} U_i$ es abierta y contiene a $U(x)$, por lo tanto $U(x) = St(x)$.

Ser de Alexandroff, no es la única propiedad que estos espacios tienen. Recordemos que un espacio topológico (X, τ) es T_0 o de Kolgomoroff, si para todo $x, y \in X$ existe U vecindad de x tal que $y \notin U$, o, existe V vecindad de y tal que $x \notin V$.

Colorario 2. Si $(X, \leq)$es un conjunto parcialmente ordenado y $\tau_{\leq}$ una topología sobre X entonces $(X, \tau_{\leq})$ es T_0.

Demostración: Sean $x, y \in X, x \neq y$. Si x, y son comparables podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \leq y$. Es decir, $y \in St(x)$; si $x \in St(y)$, tendríamos que $y \leq x$, lo que implicaría que $x = y$, pues $\leq$ es antisimétrica y esto contradice nuestras suposiciones. Por lo que $x \notin St(y)$. Si x, y no son comparables entonces $St(y)$ es una vecindad de y que no contiene a x, lo mismo ocurre con $St(x)$, es una vecindad de x que no contiene a y. Por lo tanto, $(X, \tau_{\leq})$ es T_0.

Como ejemplo de los resultados obtenidos en esta sección construiremos un espacio topológico que resultará ser homeomorfo al Espacio de Khalimsky a partir de un conjunto parcialmente ordenado.

Proposición 4. Sea $(X, \tau_{\leq})$ un espacio topológico, entonces $(X, \tau_{\leq})$ es homeomorfo a (Z, τ_k), el Espacio Topológico de Khalimsky**.**

Demostración: Sea $f:(X, \tau_{\leq}) \to (Z, \tau_k)$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2n & si \;\; x = (2n-1, 2n+1) \\ 2n+1 & si \;\; x = \{2n+1\} \end{cases}$$

Claramente f es inyectiva y sobreyectiva, luego f es invertible.

Veamos ahora que f y f^{-1} son continuas.

Como $\beta = \left\{\{2n, 2n+1, 2n+2\}: n \in Z\right\} \cup \{2n: n \in Z\} \cup \emptyset$ es una base en τ_k y
$\sigma = \{\{(2n\text{-}1, 2n+1), \{2n+1\}, (2n+1, 2n+3)\} \subset R; n \in Z\} \cup \{(2n-1, 2n+1) \subset \Re: n \in Z\} \cup \emptyset$ es una base de τ.

Demostraremos que la imagen inversa de β bajo f es un abierto de τ_k

Sea $U \in \beta$

Si $U = \{2n\}$ para algún $n \in Z$ entonces$f^{-1} = (U) = \{(2n-1, 2n+1)\} \in \sigma \subset \tau$

Si $U = \{2n, 2n+1, 2n+2\}$ tenemos que:

$$f^{-1} = \{(2n-1, 2n+1)\} \cup \{2n+1\} \cup \{(2n+1, 2n+3)\} \in \sigma \subset \tau$$

Por lo tanto f es continua. Para demostrar la continuidad de f^{-1} utilizamos los mismos razonamientos. Por lo tanto concluimos que f es un homeomorfismo.

Una de las consecuencias inmediatas de esta proposición es el siguiente corolario.

Corolario 3. El Espacio de Khalimsky es T_0

1.2 Conjuntos Parcialmente Ordenados a partir de un Espacio Topológico

En la siguiente sección observaremos que dada una topología sobre un espacio, podemos generar una relación de orden $\leq$, para dotar al conjunto de un orden parcial.

Dado un espacio topológico X, A subconjunto de X denotamos por A barra la clausura de A en X.

Teorema 2. Sea (X,τ) un espacio topológico T_0 y $\leq$ una relación definida por $x \leq y$ si $x \in \overline{\{y\}}$. Entonces $(X,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Demostración: En primer lugar demostraremos que $\leq$ es reflexiva.

Sea $x \leq x$ entonces $x \in U_x(U_x \subseteq U_x)$ por lo tanto $x \in \cap\, U_x$ y como los U_x son base de la topología de τ entonces $x \in (X,\tau)$. Entonces $\leq$ es reflexiva.

Ahora probaremos la antisimetría de $\leq$, sean $x, y \in X$ tales que $y \leq x$ y $x \leq y$.

Demostraremos que $x = y$.

Supongamos que $x \neq y$, entonces para toda vecindad U_x tenemos que $y \in U_x$ lo mismo ocurre para toda vecindad V_y, $x \in V$ esto contradice el hecho de que (X,τ)es T_0 por lo tanto $x = y$ y esto implica entonces que $\leq$ sea antisimétrica.

Finalmente, probaremos la transitividad.
Sea $z \in U_x \cap U_y$ entonces $z \leq x$ y $z \leq y$ por lo tanto se tiene que $z \in U_z \subseteq U_x \cap U_y$ (la pertenencia vale por la reflexividad de $\leq$ y la inclusión por la transitividad) donde

$U_x = \{y \in X/y \leq x\}$ y $U_y = \{x \in X/x \leq y\}$. Así $\leq$ es también transitiva Por lo tanto $(X,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

La topología definida a partir de un conjunto parcialmente ordenado y la relación de orden que se define a partir de un espacio topológico están estrechamente relacionadas.

1.3 Propiedades Topológicas de los Espacios de Alexandroff

Observaremos ahora las propiedades topológicas que cumplen los Espacios de Alexandroff.

Teorema 3. Sea X un espacio de Alexandroff, y β una base de X, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) β es una base mínimal.
ii) Si β' es una subfamilia de β tal que $\bigcup_{\beta \in \beta'} \beta \in \beta \Rightarrow \bigcup_{\beta \in \beta'} \beta \in \beta'$

Demostración:
$\Leftarrow$ Sea β' una base de X tal que $\beta' \subseteq \beta$ y sea $A \in \beta$ entonces $A = \bigcup_{\beta_i \in \beta'} \beta_i \in \beta$ (Por hipótesis) $\Rightarrow A \in \beta'$. Así $\beta \subseteq \beta'$. Luego β es mínimal.

$\Rightarrow$ Supongamos que $\beta \subsetneq \beta'$ es base de X. Sea $\beta \in \beta \setminus \beta'$, entonces $B = \bigcup_{B_i \in I} B_{i \in \beta} \Rightarrow B \in \beta'$ y esto es absurdo.

Así toda base de X es incomparable con β o contiene a β. Luego β es mínimal.

Teorema 4. Sea X un espacio de Alexandroff X es T_0 sí y solamente si $V(x) = V(y)$, esto implica que $x = y$.

Demostración:
Sean $x, y \in X. Si\ x \neq y$ entonces podemos suponer que existe O abierto tal que $x \in O$, $y \notin O$ luego $V(x) \subseteq O, V(y) \nsubseteq O$ $\Rightarrow$ $V(x) \neq V(y)$.

Sean $x, y \in X, x \neq y \Rightarrow V(x) \neq V(y)$ Supongamos que no es T_o y sean $x, y \in X$ tal que todo abierto que contiene a x contiene a y y viceversa, entonces $V(x)$ es abierto y contiene a y por la tanto $V(y) \subseteq V(x)$ de esta forma se tiene que $V(x) \subseteq V(y)$ y así $V(x) = V(y)$. Por la tanto no es $T_o \Rightarrow \exists\ x, y \in X; x \neq y: V(x) = V(y)$.

Teorema 5. Sean X y Y espacios de Alexandroff; U y V sus respectivas bases mínimas.

Entonces:

1. Si X es un sub-espacio de Y, entonces

$$U = \{V_i \cap X : V_i \in V\}$$

2. $X \times Y$ es un espacio de Alexandroff y su base mínima está dada por $U \times V = \{U_i \times V_i : \quad U_i \in U, \quad V_i \in V\}$

Teorema 6. Sea X un espacio de Alexandroff – T_0. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es conexo por arco
2. X es conexo
3. X es conexo por cadena
4. Para todo $a, b \in X$, existe $a_0, \ldots a_{n+1} \in X$ tal que $a_0 = a, \quad a_{n+1} = b$ y $V(a_i) \cap V(a_j) \neq \varnothing$ si $|i - j| \leq 1$.
5. Para todo $a, b \in X$, existe $a_0, \ldots a_{n+1} \in X$ tal que $a_0 = a, \quad a_{n+1} = b$ y $\overline{V(a_i)} \cap \overline{V(a_j)} \neq \varnothing$ si $|i - j| \leq 1$.
6. Para todo $a, b \in X$, existe $a_0, \ldots a_{k+1} \in X$ tal que $a_0 = a, \quad a_{k+1} = b$ y $\overline{\{a_i\}} \cap \overline{\{a_j\}} \neq \varnothing$ si $|i - j| \leq 1$.

Teorema 7. Sea X un espacio Alexandroff - T_0 entonces:

1. X es localmente conexo por arco
2. X es primer contable
3. X es paracompacto si y solo si, toda $V(x)$ contiene solamente un número finito de $V(y)$ si X es paracompacto entonces X es localmente finito (Su inversa no es cierta).
4. X es segundo contable si y solo si, el es contable
5. X es separable si y solo si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_n\}}$.
6. X es Lindelöff si y solo si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V(x_n)$.

7. Existen espacios Lindelöff T_0 – Alexandroff que no son separable y espacio separable T_0 – Alexandroff que no son Lindelöff.
8. Si X es finito, entonces X es compacto.
9. Si X es localmente finito, entonces es localmente compacto.
10. X es contable si y solo si X es localmente contable y Lindelöff.
11. Si X es localmente finito, X es compacto si y solo si X es finito.

Teorema 8. Sea X un Espacio de Alexandroff entonces:

1. X es regular si y solamente si $V(x)$ es cerrado para todo $x \in X$ (donde X es 0 – dimensional)
2. Si X es regular y compacto, entonces X es localmente compacto.
3. Si X es regular y separable, entonces X es perfectamente normal.
4. X es pseudo- metrizable si y solamente si $V(x)$ es cerrado y finito para todo $x \in X$.

2. TOPOLOGÍA DE KHALIMSKY

Como hemos visto desde 1937 se realizaron estudios acerca de ciertos espacios topológicos que presentan algunas características muy importantes que en el año 1977 Efim Khalimsky utilizó para desarrollar una topología sobre el plano digital Z^2 tomando como base el producto de dos Líneas de Khalimsky. Vemos que esta topología lo que hace es aproximar al conjunto Z con la recta real.

Definición 3. El conjunto Z con la topología τ_k definida en la Proposición 2 recibe el nombre de Línea de Khalimsky**.**

Observamos entonces que la **Línea de Khalimsky** es un espacio de vecindad mínima y además es conexo.

Otra forma de definir la Topología de Khalimsky es la siguiente:

Recordemos que un número real x se puede expresar de la forma:

$x = [x] + \{x\}$, donde $[x]$ es la parte entera de x, es decir el mayor entero menor que x y $\{x\}$ es la parte decimal de x.

Por definición $[x] \in Z; y\ 0 \leq \{x\} < 1$.

Consideremos ***R*** con la topología usual y las funciones $g : R \to Z$ y $f : R \to Z$ definidas de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} [x] & si\ [x]\ es\ par \\ \{x\} + 1 & si\ [x]\ es\ impar \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} [x] & si \quad \{x\} < \dfrac{1}{2} \\ g(x) & si \quad \{x\} = \dfrac{1}{2} \\ [x] + 1 & si \quad \{x\} > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donde f no es más que la conocida función de redondeo. La topología de Khalimsky sobre Z es la topología más fina sobre Z tal que $f : R \to Z$ es continua.

Definición 3. Sea $f : M \to N$ una aplicación entre dos espacios métricos, se dice que f satisface la condición de Lipschitz si existe una constante $k > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$ para todo $x, y \in M$. En tal caso, k es llamada la constante de Lipschitz de la función.

Además observamos que toda función Lipschitz es uniformemente continua y por lo tanto continua. Aquellas funciones de Lipschitz donde $k = 1$ reciben el nombre de funciones cortas.

Proposición 5. Sea X un espacio topológico y $f : X \to Z$ una aplicación continua y $x_o \in X$. Si $f(x_o)$ es impar entonces f es constante en $V(x_o)$ y $|f(x) - f(x_o)| \leq 1$para todo $x \in \{\ \bar{x}\ \}$. Si $f(x_o)$

es par, entonces f es una constante en $\{\bar{x}\}$ y $|f(x)-f(x_o)| \leq 1$ para todo $x \in V(x_o)$.

Demostración: Sea $y_o = f(x_o)$ impar. Entonces $\{y_o\}$ es un abierto, donde $f^{-1}(\{y_o\})$ es abierto dado que $V(x_o) \subset f^{-1}(\{y_o\})$, donde $f(V(x_o)) = \{y_o\}$ . .Más aún, si el conjunto $A = \{y_o, y_o \pm 1\}$ es cerrado, entonces el conjunto $f^{-1}(A)$ es un cerrado y esto implica que $f(x) \in A$ para todo $x \in \{\bar{x}\}$.

Teorema 9. Una función $f : Z \to Z$ es continua si y solo si
1. f es Lipschitz 1
2. Para todo x par, $f(x)$ x implica que $f(x \pm 1) = f(x)$.

Demostración: Sea $A = \{y-1, y, y+1\}$ donde y es un número par de cualquier elemento de una sub-base, mostraremos que $f^{-1}(A)$ es un abierto.

Si $x \in f^{-1}(A)$ es impar, entonces $\{x\}$ es una vecindad de x. Si x es par, tenemos entonces dos casos:

- Si $f(x)$ es impar, la condición (2) implica que $f(x+1) = f(x)$ así que $\{x-1, x, x+1\} \subset f^{-1}(A)$ es una vecindad de x
- Si $f(x)$ es par, entonces $f(x) = y$, la condición Lip-1 implica que $|f(x \pm 1) - y| \leq 1$ donde obtenemos otra vez que $\{x-1, x, x+1\} \subset f^{-1}(A)$ es una vecindad de x .

Por la tanto f es continua.

3. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DE LA LÍNEA DE KHALIMSKY

El objeto de esta sección es presentar las propiedades que posee la línea de Khalimsky o sea ver que propiedades topológicas tiene la línea de Khalimsky con respecto a otros espacios. Solamente demostraremos algunas de estas propiedades las demás se pueden encontrar en Acevedo (2009).

Teorema 10. El espacio (Z, τ_k) tiene las siguientes propiedades:

- Es T_o
- No es T_1.
- No es T_2.
- No es T_3.
- No es $T_{3\frac{1}{2}}$.
- No es T_4.
- No es T_5.
- No es de Uryshon.
- No es Semiregular.
- No es Regular.
- Es T_o pero no es T_3.
- No es completamente Regular.
- No es Normal.
- No es Completamente Normal.
- No es totalmente T_4.
- No es compacto.
- Si es $\sigma - Compacto.$
- Si es $Lindel\ddot{o}ff$.
- No es contable compacto.
- Si es secuencialmente compacto.
- No es débil contable compacto.
- Si es pseudo-compacto.
- Si es localmente compacto.
- Si es fuerte localmente compacto.
- Si es σ -localmente compacto.

- Es separable.
- Es primer contable.
- Es segundo contable.
- Es paracompacto y metacompacto.

Demostración: Tenemos que en este espacio la familia de vecindades mínimas es un refinamiento de todo cubrimiento de Z y es obvio que ésta es puntualmente finita y localmente finita. Por lo tanto es meta y paracompacto.

- Es conexo.

Demostración: Si. Tenemos que este espacio (Z,τ_k) es la imagen de la función redondeo de $\Re$ en Z dotado de la topología de Khalimsky.

- Es conexo por camino.}

Demostración: Si. Sea m un entero par entonces existe una función continua

$f:[0,1]\rightarrow Z$ *tal que* $f(0)=m$ *y* $f(1)=m+1$. En efecto si definimos $f(x)=m$ si $x\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ y $f(x)=m+1$ si $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$, f resulta continúa.

Sea $n\in Z$ si n es impar su vecindad mínima es $V(n)=\{n\}$.

Si n es distinto de $m+1$, $f^{-1}(V(n))$ es vacío, luego abierto, si $n=m+1$, $f^{-1}(V(n))=\left(\frac{1}{2},1\right]$ que también es abierto en $[0,1]$.

Si n es par y $n\neq m$, $f^{-1}(V(n))$ es vacío, luego abierto, si $m=n$, como la vecindad mínima de n es $V(n)=\{n-1,\ n,n+1\}=\{m-1,\ m,\ m+1\}$, resulta que $f^{-1}(V(n))=[0,1]$.

Hemos probado así que las vecindades mínimas tienen imágenes inversas abiertas por f, y esto equivale a decir que f es continua.
Esto prueba que dos enteros consecutivos siempre se pueden unir por un camino en Z, y por lo tanto Z es conexo por caminos.

- No es arco conexo.
- No es localmente conexo por camino.
- No es hiperconexo.
- No es ultraconexo.
- Es localmente conexo.
- No es localmente arco-conexo.
- Es biconexo.

Demostración: El conjunto de los enteros mayores o iguales a cero es conexo puesto que es la imagen de la función valor absoluto de $\Re$ en Z, es continua, Lips-1 y además par.

Si se prueba que el conjunto de los enteros negativos $Y = \{-1,-2,-3,....\}$ es conexo, podemos concluir que no es biconexo.

Basta probar que $X = \{1,2,3,.....\}$ es conexo, pues la aplicación $f(n) = -n$ también es Khalimsky continua.

Supongamos que X no es conexo y $X \subset A \cup B$, donde A, B son abiertos y $A \cap B = \phi$, esto quiere decir que todos los pares no pueden estar incluidos en A, porque sino también estarían incluidos los impares y B sería entonces vacío. Sea m el menor par no incluido en A, entonces m está en B.

Como B es abierto $\{m-1, m, m+1\} \subset B$. Esto implica que $m+2$ tampoco está en A, pues si $m+2 \subset A$, $\{m+1, m+2, m+3\}$ estaría incluido en A. Esto es absurdo, pues $m+1 \in B$. De esta forma se prueba que A no contiene ningún par mayor que m, es decir todos los pares mayores o iguales a m están en B.

Esto implica que todos los impares mayores o iguales a $m-1$ están en B. Es decir sea $C = \{m-1, m, m+1, ...\} \subset B$. De igual forma si n es el menor par no incluido en B, $D = \{n-1, n, n+1, ...\} \subset A$.

Así $C \cap D \subset A \cap B = \phi$ .Pero esto es absurdo porque $B \cap C \neq \phi$.
Luego X es conexo y por lo tanto Y es conexo.

Así $Z = \{X \cup \{0\} \cup Y\}$ con $\{X \cup \{0\}\}$, Y conexos no vacíos disjuntos.
Por la tanto Z no es biconexo.

- No es localmente biconexo.
- Todos sus puntos son de dispersión.
- No es totalmente disconexo por camino.
- No es totalmente disconexo.
- No es totalmente separado.
- No es extremadamente disconexo.
- No es Cero-dimensional.
- No es disperso.
- No es discreto.
- No es metrizable.
- Es de segunda categoría.
- No es topológicamente completo.
- Tiene una familia localmente finita.
- Es fuertemente conectado.
- Es Hemicompacto.

REFERENCIAS

Acevedo, E. 2009. “La Topología de Khalimsky” Tesis de Maestría en Matemática Pura. Universidad de Panamá.

Alexandroff, P. 1937. Diskrete Raume. Mat, Sb. 2: 501-519.

Khalimsky, E. 1987. Topological Structures in Computer Science. *Journal of Applied Math. and Simulation*. 1(1): 25-40.

Khalimsky, E., R. Kopperman & P. R. Meyer. 1990. Computer Graphics and Connected Topologies on Finite Ordered Sets. *Topology and its Application. 36(1), 1-17.*

Kovalevsky, V. 2006. “Axiomatic Digital Topology”. Página visitada en octubre de 2009. <arxiv.org/pdf/1010.0649>

Melin, E. 2003. Connectedness and Continuity in Digital Spaces with the Khalimsky Topology. Página visitada en octubre de 2009.
<http://uu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:306620>
<uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:306620/FULLTEXT01>

Melin, E. 2003. Digital Straight lines in the Khalimsky Plane. Página visitada en octubre de 2009.
<www.math.uu.se/~melin%20/diglines.pdf>

Melin, E. 2004. Extension of Continuous Functions in Digital Spaces with the Khalimsky Topology. Página visitada en octubre de 2009.
<www2.math.uu.se/~melin%20/khext.pdf>

Melin, E. 2008. Continuous Digitization in Khalimsky Spaces. *Journal of approximation Theory* 150: 96-116.

Recibido septiembre de 2010, aceptado junio de 2012.