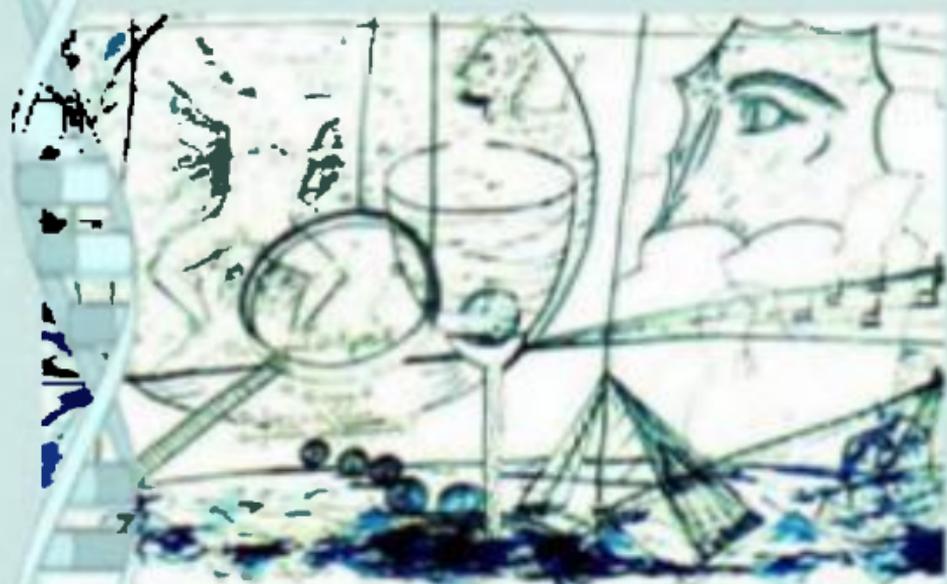


ISSN 1008-8092



**Biología-Química-Física  
Matemática-Estadística**

# TECNOCIENCIA



Revista de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnológicas  
Universidad de Panamá



## **INSECTOS PLAGAS Y PARASITOIDES ASOCIADOS AL CULTIVO DE GUANDÚ (*Cajanus cajan* (L.) MILLSP. FABACEAE) EN CHIRIQUÍ, REPÚBLICA DE PANAMÁ**

**Nubla Araúz<sup>1</sup>, Alonso Santos M.<sup>2</sup>, Roberto A. Cambra<sup>3</sup> y Juan A. Bernal Vega<sup>4</sup>**

<sup>1,4</sup>Universidad Autónoma de Chiriquí, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Escuela de Biología.

<sup>2,3</sup>Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología, Museo de Invertebrados G. B. Fairchild.

E-mail:<sup>1</sup>ncam\_11@hotmail.com,

<sup>2</sup>santosmurgasa@gmail.com,<sup>3</sup>miuprcambra@yahoo.com,<sup>4</sup>juanbern@gmail.com.

### **RESUMEN**

Este trabajo se realizó en una plantación de guandú ubicada en Macano, Boquerón, Chiriquí, República de Panamá, con el objetivo de identificar los insectos asociados al cultivo de guandú y a qué órganos de la planta afectan. Se realizaron 20 muestreos desde la fase de crecimiento vegetativo hasta la fase de producción, de marzo a diciembre de 2010. Con una red entomológica se recolectaron los insectos asociados o que ocasionaron algún daño al cultivo, en 50 plantas de guandú en cada muestreo. Se recolectaron 197 individuos asociados al cultivo de guandú, pertenecientes a 24 géneros (más siete no determinados), 21 familias y seis órdenes de la Clase Insecta. *Nodonota*, *Diphautaca* (Coleoptera: Chrysomelidae) y *Trigona* (Hymenoptera: Apidae) fueron los géneros más abundantes en el follaje. *Trigona* fue el más sobresaliente durante la etapa de floración y *Ectatomma* y *Crematogaster* (Hymenoptera: Formicidae) se encontraron en el tallo, probablemente asociados con algunos membrácidos. *Melanagromyza obtusa* (Diptera: Agromyzidae) y *Etiella zinckenella* (Lepidoptera: Pyralidae) se encontraron en las vainas del guandú, y *Bracon* (Hymenoptera: Braconidae) se crió de vainas infestadas con larvas y pupas de *M. obtusa*.

## **PALABRAS CLAVES**

*Bracon*, *Crematogaster*, *Diphaulaca*, *Ectatomma*, *Etiella zinckenella*, *Cajanus cajan*, *Melanagromyza obtusa*, *Nodonota*, *Trigona*.

## **ABSTRACT**

This work was carried out in a plantation located in Macano, Boqueron, Chiriqui, Republic of Panama, with the purpose of identifying the insects associated to pigeon pea crop and the organs they affect. From March to December 2010, 20 samples from the vegetative growth phase to the production phase were taken. By means of an entomological net, insects associated or that may caused some crop damage in pigeon pea plants were collected. 50 in each sampling. 197 individual associated with the pigeon pea belonging to 24 genera (plus seven undetermined), 21 families and six orders of the Class Insecta were collected. *Nodonota*, *Diphaulaca* (Coleoptera: Chrysomelidae) and *Trigona* (Hymenoptera: Apidae) were the most abundant in the foliage. *Trigona* was the outstanding during the flowering stage and *Ectatomma* and *Crematogaster* (Hymenoptera: Formicidae) were found in the stem, probably associated with some membracids. *Melanagromyza obtusa* (Diptera: Agromyzidae) and *Etiella zinckenella* (Lepidoptera: Pyralidae) were found in the pigeon pea pods and *Bracon* (Hymenoptera: Braconidae) raised pods infested with larvae and pupae of *M. obtusa*.

## **KEYWORDS**

*Bracon*, *Crematogaster*, *Diphaulaca*, *Ectatomma*, *Etiella zinckenella*, *Cajanus cajan*, *Melanagromyza obtusa*, *Nodonota*, *Trigona*.

## **INTRODUCCIÓN**

El guandú o frijol de palo (*Cajanus cajan* (L.) Millsp., Fabaceae) como comúnmente se le conoce en Panamá, es un arbusto, de 3-5 metros de altura. Posee ramas con muchos tricomas, hojas lanceoladas, verdes en el haz y pálidas por el envés, flores amarillas y fruto en vainas que encierran semillas redondeadas, pequeñas y algo duras (Stevens *et al.*, 2001). Morton (1976) ha reunido mucha información sobre esta especie, la cual clasifica como la quinta en importancia entre las leguminosas comestibles del mundo. Esta planta es la más importante en el sur de Asia, especialmente por ser originaria de la India (Stevens *et al.*, 2001), donde se produce más del 90 % del cultivo mundial, estimada en cerca de dos millones de toneladas (Kay, 1979).

En Panamá se cultivan aproximadamente 4169 hectáreas de guandú, de las cuales se obtiene una cosecha de 42054 quintales anuales (Contraloría General de la República, 2001). En Herrera se siembran unas 403 hectáreas de guandú: 199 hectáreas se ubican en Ocú con una producción de 6407 quintales anuales, región con la mayor producción de guandú en el país. (Contraloría General de la República, 2001). En Chiriquí, el distrito de Boquerón es el principal productor de guandú y el segundo en el país. Ahí se cultivan 157 hectáreas de guandú que producen 2574 quintales al año. Las comunidades de Boquerón donde más se cultiva *C. cajan* son: Bocalatún, Meseta y Macano. Según el Instituto de Mercadeo Agropecuario, el rendimiento promedio de guandú es de 28 quintales por hectárea, con un ingreso neto de B/. 168.00, aproximadamente. En el último año el rendimiento no ha sido óptimo, ya que ha disminuido entre 12 y 15 quintales por hectárea. Esto se debe, en gran parte, a los insectos plagas que atacan este cultivo, principalmente durante las etapas de floración y producción.

Entre las plagas que causan grandes pérdidas en la producción del guandú se encuentran: *Heliothis* (Lepidoptera: Noctuidae), que ataca gravemente vainas y semillas en desarrollo (Purseglove, 1977), *Lycaena boetica* (Linnaeus, 1766) (Lepidoptera: Lycaenidae), barrenador de la vaina, *Diabrotica* y *Cerotoma* (Coleoptera: Chrysomelidae), que perforan hojas, flores, brotes tiernos y vainas. *Bemisia tabaco* (Gennadius, 1889) (Hemiptera: Aleyrodidae) que se alimenta del follaje (Binder, 1997). Algunos insectos que producen caída de la flor del guandú se encuentran *Bolbonota*, *Vanduzea* y *Membracis* (Hemiptera: Membracidae) (King & Saunders, 1984). Por ello, el objetivo de esta investigación es determinar los principales insectos asociados al cultivo de guandú y relacionarlas con cada uno de los órganos de la planta que afectan durante las etapas del ciclo del guandú en una parcela ubicada en Macano, Boquerón, Chiriquí.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Sitio de estudio

El estudio se desarrolló en el corregimiento de Macano, distrito de Boquerón, ubicado a 08°34'28.9" N, 82°34'08.6" O, con una extensión de 24.25 km<sup>2</sup>, aproximadamente a 430 m.s.n.m. La

temperatura durante los meses de muestreo se ubicó entre los 18.0 °C y 21.9 °C y la precipitación osciló entre 3500 a 5000 mm anuales.

### **Método de muestreo**

Se utilizó una parcela, previamente establecida, de 30 columnas y 10 filas con un total de 300 plantas. Se realizaron un total de 20 muestreos, dos muestreos mensuales durante 10 meses, desde la emergencia de la plántula hasta finalizar la etapa de producción. Se seleccionaron al azar 50 plantas a las cuales se les revisó el tallo, las hojas, las flores y las vainas, con el fin de identificar los daños provocados y se recolectaron con una red entomológica los insectos plagas asociados al cultivo, para su posterior identificación en el laboratorio. Durante la fase de producción se recolectaron vainas y se pusieron en el Museo de Peces de Agua Dulce e Invertebrados (MUPADI) de la Universidad Autónoma de Chiriquí, hasta la emergencia de los adultos plagas y/o los parasitoides. Los insectos plaga y parasitoides recolectados y criados se preservaron en alcohol al 70 % en frascos plásticos con tapas de roscas, previamente rotulado. Las identificaciones se realizaron en el MUPADI y el Museo de Invertebrados G.B. Fairchild de la Universidad de Panamá (MIUP), con las claves publicadas por King & Saunders (1984), Quicke (1997), Triplehorn & Johnson (2005), Godoy *et al.* (2006), Hanson & Gauld (2006) y Brown *et al.* (2010). Las muestras identificadas reposan en el MUPADI.

## **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

### **Diversidad de insectos asociados al cultivo de guandú**

Se recolectaron y criaron un total 197 individuos asociados al cultivo de guandú en Macano, Boquerón, Chiriquí, identificados en 24 géneros (más siete géneros no determinados), 21 familias y seis órdenes de la Clase Insecta (Cuadro 1). El orden Coleoptera (33,3 %) presentó la mayor diversidad de familias, seguido por Diptera (23,8 %), Hemiptera (19 %, suborden Heteroptera: 9,5 %, suborden Auchenorrhyncha: 9,5 %), Hymenoptera (14,3%), Lepidoptera (4,8 %) y Orthoptera (4,8 %). La mayor diversidad de géneros se encontró en las familias Chrysomelidae (Coleoptera) y Formicidae (Hymenoptera), con cuatro géneros cada una, y en las familias Membracidae y Cicadellidae

(Auchenorrhyncha), con dos géneros cada una. En las familias restantes se encontró sólo un género en cada una. En estudios realizados en cultivos anuales alimenticios en América Central se han documentado como plagas del guandú, principalmente de vainas y tallos, los órdenes Lepidoptera, con las familias Pyralidae y Noctuidae, y Auchenorrhyncha, con la familia Membracidae (King & Saunders, 1984).

Los órdenes Coleoptera, Diptera e Hymenoptera fueron los más abundantes durante esta investigación (Cuadro 1). En el orden Coleoptera, la familia con mayor número de individuos fue Chrysomelidae, con los géneros *Nodonota* (15.2 %), *Diphaulaca* (7.1 %), *Diabrotica*, y *Colaspis*. Este grupo se caracteriza por ser, en su gran mayoría, herbívoros, tanto en sus fases larvianas como en estado adulto (Fig. 1). En este caso, los adultos son los principales causantes de daños al follaje del guandú, por hacer perforaciones en forma semicircular en casi toda la lámina foliar (Fig. 2). Unas 12 especies de *Diabrotica* y dos de *Diphaulaca* han sido documentadas por King & Saunders (1984), como plagas de varios cultivos anuales alimenticios en América Central. *Diabrotica balteata* (LeConte, 1865) causa ligeros daños por alimentación en las hojas del guandú en el Caribe (Schmutterer, 1990).



Fig. 1. *Colaspis* adulto.



Fig. 2. Daño causado por *Diphaulaca* (Chrysomelidae).

En el orden Diptera, *Melanagromyza obtusa* (Malloch) (Agromyzidae) es una plaga de importancia económica en el guandú. Se le conoce como la mosca asiática del guandú, barrenador de la vaina o mosca de la vaina. Este insecto es el principal causante de la pérdida de vainas y frutos durante la época de producción. El daño lo hace la larva al

alimentarse de los granos tiernos en la vaina. Luego las larvas jóvenes minan el grano y la larva madura emerge cuando el grano está desarrollado. Este daño deja inservible el grano, tanto para el consumo como para semilla, y en este caso los granos dañados, suelen ser invadidos por hongos (Cedano, 2006). La infestación de los granos por este insecto, ha alcanzado entre 15 % y 80% de daños en los granos de guandú, por ausencia de un control natural efectivo en República Dominicana (Segura *et al.*, 2005).

En el orden Hymenoptera, Formicidae sobresalen los géneros *Ectatomma*, asociado a las hojas, tallo y flores del guandú, y *Crematogaster* asociado al tallo. La presencia en los cultivos de un gran número de hormigas puede deberse a asociaciones mutualistas, entre hormigas y membrácidos. En este estudio, aunque se recolectaron pocos membrácidos adultos, si se observó una gran cantidad de inmaduros, cuidados por las hormigas. Éstas cuidan a los membrácidos de otros insectos parasitoides o depredadores y en cambio reciben sustancias azucaradas como recompensa (Godoy *et al.*, 2006). El género *Spissistilus* (Membracidae), por el contrario, atrae a las hormigas que cortan y descortezan el tallo (King & Saunders, 1984).

En este estudio, el género *Trigona* (Hymenoptera: Apidae, Meliponini) se encontró asociado a las hojas, flores y vainas del guandú. Éste género ataca las hojas, principalmente los brotes y durante la época de floración, corta los capullos de las flores, lo que causa una baja producción de frutos. Se ha documentado especies de este género de abejas sin aguijón causando daños ocasionalmente en cítricos, macadamia (*Macadamia* sp., Proteaceae), los árboles de mango (*Mangifera indica*, Anacardiaceae), las palmas (Arecaceae) y plantas de *Passiflorasp.* (Passifloraceae) (Wille, 1965, Camacho, 1966, Haueisen Freire & Gara, 1970, Boiça *et al.*, 2004, citados por Hanson & Gauld, 2006).

El género *Bracon* (Hymenoptera: Braconidae) (Fig. 4) se crio a partir de vainas de guandú infestadas con *Melanagromyza obtusa* (Malloch, 1914) en el laboratorio. Parasitoides del género *Bracon* han sido criados en guandú en República Dominicana sobre este mismo insecto hospedante (Segura *et al.*, 2005). *Bracon* se conoce como parasitoide de una amplia diversidad de larvas de lepidópteros, coleópteros y

dípteros (Quicke, 1997) que atacan las vainas del guandú, considerándose como una buena alternativa para el control biológico. Del orden Hemiptera, suborden Auchenorrhyncha, se identificaron los géneros *Enchenopa* y *Spissistilus* (Membracidae). Además, se encontraron los géneros *Macimola* y *Agrosoma* (Cicadellidae). Estos géneros son plagas importante, ya que sus inmaduros y adultos se alimentan absorbiendo la savia de las hojas, yemas, y a veces de los frutos. En asociación con otras plagas pueden causar daños severos al cultivo (King & Saunders, 1984).

*Etiella zinckenella* (Treitschke, 1832) (Lepidoptera: Pyralidae) es una polilla de importancia económica en el cultivo de guandú identificada en este estudio (Fig. 5). Sus larvas provocan pérdidas durante la etapa de producción de éste y de otros cultivos agrícolas. Esta plaga es considerada en segundo lugar de importancia en el cultivo de guandú, debido a que puede reducir los rendimientos de manera significativa. La oviposición de los adultos ocurre desde que se forman los capullos florales y continúa hasta la cosecha. El período de mayor oviposición es cuando se inicia la formación de vainas y el daño causado por las larvas aumenta gradualmente hacia el final de la etapa de llenado de vaina (Cedano, 2006).

Las larvas jóvenes se alimentan dentro de las semillas y las más viejas obtienen su alimento libremente dentro de las vainas. Varias vainas pueden ser atacadas por la misma larva. Se pierden grandes cantidades de semillas causados por ataques severos, especialmente en el guandú (Schmutterer, 1990).

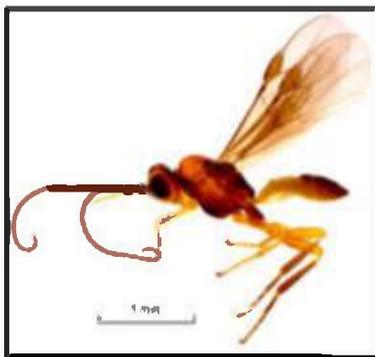


Fig. 3. *Bracon* (Braconidae) parasitoide encontrado en la vaina del guandú infestada con *M. obtusa* (Agromyzidae).



Fig. 4. Daño causado por *Etiella zinckenella* (Pyralidae).

Cuadro 1. Diversidad de insectos y órganos de la planta\* a los que se encontraron asociados en el cultivo de guandú en Macano, Boquerón, Chiriquí.

Orden	Familia	Género	H	T	Fl	Fr	Total (%)	
Coleoptera	Chrysomelidae	<i>Diabrotica</i>	1				1 (0.5)	
		<i>Nodonota</i>	30				30 (15.2)	
		<i>Diphaulaca</i>	14				14 (7.1)	
		<i>Colaspis</i>	1				1 (0.5)	
	Curculionidae	<i>Exophthalmus</i>	2				2 (1.0)	
	Elateridae	No determinado	1				1 (0.5)	
	Lampyridae	<i>Photinus</i>	1				1 (0.5)	
	Phalacridae	No determinado				6	6 (3.0)	
	Staphylinidae	Morfoespecie 1			1			1 (0.5)
		Morfoespecie 2		1				1 (0.5)
		Morfoespecie 3		1				1 (0.5)
	Tenebrionidae	<i>Strongylinus</i>	1				1 (0.5)	
	Diptera	Agromyzidae	<i>Melanagromyza</i>				27	27 (13.7)
Bibionidae		<i>Plecia</i>	1				1 (0.5)	
Dolichopodidae		<i>Condylostylus</i>	1				1 (0.5)	
Micropezidae		<i>Poecilolytus</i>	1				1 (0.5)	
Stratiomyidae		<i>Oplachantha</i>	1				1 (0.5)	
Hemiptera	Miridae	<i>Neurocolpus</i>	1				1 (0.5)	
Heteroptera	Pentatomidae	No determinado	1				1 (0.5)	
Hemiptera	Cicadellidae	<i>Agrosoma</i>	1				1 (0.5)	
Auchenorrhyncha		<i>Macunola</i>	2				2 (1.0)	
	Membracidae	<i>Enchenopa</i>	1	3	2		6 (3.0)	
Hymenoptera	Spissistilidae	<i>Spissistilus</i>		1	1		2 (1.0)	
		<i>Trigona</i>	12		7	2	21 (10.7)	
	Braconidae	<i>Bracon</i>				18	18 (9.1)	
	Fornicidae	<i>Crematogaster</i>			11		11 (5.6)	
		<i>Dorymyrmex</i>			3		3 (1.5)	
		<i>Ectatomma</i>	7	19	4		30 (15.2)	
	<i>Paratrechina</i>			2		2 (1.0)		
Lepidoptera	Pyralidae	<i>Etiella zinckenella</i>				7	7 (3.6)	
Orthoptera	Acrididae	No determinado	1				1 (0.5)	
<b>Total</b>	<b>21 familias</b>	<b>24 géneros,</b>	<b>83</b>	<b>40</b>	<b>14</b>	<b>60</b>	<b>197</b>	
		<b>7 no determinados</b>	<b>(42.1)</b>	<b>(20.3)</b>	<b>(7.1)</b>	<b>(30.5)</b>	<b>(100)</b>	

\*Órganos de la planta: H= hoja, T= tallo, Fl= flor y Fr= fruto.

Del orden Hemiptera, suborden Heteroptera, se identificaron dos individuos: un Pentatomidae inmaduro y un espécimen de *Neurocolpus mexicanus* Distant (Miridae). Este chinche mirido chupa la savia de las yemas de las flores provocando la abscisión de las mismas (King & Saunders, 1984). Es importante mencionar que especímenes de *Nezara viridula* (L.) (Pentatomidae) no fueron recolectados en el cultivo de guandú estudiado. Esta especie ha sido documentada como plaga del guandú en el Caribe, además de varios otros cultivos (Schmutterer, 1990). El daño lo ocasiona al picar a través de las paredes de las vainas para alimentarse de las semillas, lo que puede contribuir a que las mismas no sean aptas para el consumo humano. Las vainas fuertemente atacadas pueden llegar a secarse (Schmutterer, 1990). En el orden Orthoptera, se recolectó un individuo inmaduro de la familia Acrididae alimentándose de las hojas tiernas de la planta. Esta familia de saltamontes ha sido identificada como plaga causante de daños en el cultivo de guandú en América Central (King & Saunders, 1984).

#### **Órgano de la planta de guandú al que se encontraron asociados los insectos**

De los 31 géneros de insectos asociados al cultivo de guandú que se documentan en este estudio, el 87.1% se encontró asociado a un solo órgano de la planta, el 3.2 % a dos órganos de la planta y el 9.7% a tres órganos de la planta (Cuadro 1). De los 197 individuos recolectados, se pudo determinar que el 42.1% estuvieron asociados principalmente a las hojas de la planta, pues éstas constituyen el alimento de la mayoría de estos insectos. El segundo órgano con mayor número de individuos asociados fue el fruto (30.5%), seguido del tallo (20.3%) y por último la flor (7.1%) (Fig. 5).

Los insectos que se recolectaron a lo largo de las tres etapas del ciclo de vida del guandú, son los pertenecientes a los géneros *Diphaulaca* (Chrysomelidae), *Enchenopa* (Membracidae), *Trigona* (Apidae) y *Ectatomma* (Formicidae) (Fig. 6).

Durante la etapa de crecimiento vegetativo, los géneros *Nodonota* (Coleoptera: Chrysomelidae), *Diphaulaca* (Chrysomelidae) y *Trigona* (Apidae) fueron los más abundantes. Cedano (2006), indica que durante la etapa de crecimiento vegetativo (crecimiento de hojas y tallos) el cultivo de guandú se ve afectado principalmente por crisomélidos, ya que los adultos son consumidores principalmente de hojas, y posteriormente, por membrácidos por ser succionadores de savia.

En la fase de floración, los insectos que se identificaron por afectar directamente la producción de flores son los géneros *Trigona* que consume las flores, *Enchenopa* (Membracidae) succiona la savia de los brotes florales y *Ectatomma* (Formicidae) que corta las flores. Cedano (2006), ha identificado como causas de la caída de las flores del guandú a altas poblaciones de trips (Thysanoptera), no a los demás géneros encontrados durante esta fase, ya que estaban asociadas a otros órganos como las hojas y tallos, pero no a las flores.

La fase de producción de frutos resulta ser la más importante en el cultivo de cualquier producto agrícola. Se identificaron los géneros *M. obtusa*, *Bracon* (Braconidae) y *E. zinckenella* (Pyralidae), asociados a las vainas del guandú durante esta fase del cultivo. Comparando estos resultados con el listado de barrenadores de la vaina propuesto por Reed *et al.* (1989), es evidente que la producción del guandú a nivel mundial tiene como principales insectos plagas a los especímenes de *M. obtusa* y *E. zinckenella*. Al igual que en las etapas anteriores, los otros géneros identificados durante la fase de producción, están asociados a otros órganos de la planta, pero no a las vainas ni frutos.

La mayoría de los géneros identificados en este estudio no han sido registrados en la literatura como insectos que causen daño suficiente al guandú para merecer medidas de control (King & Saunders, 1984, Schmutterer, 1990). Sin embargo, podría considerarse que, además de *M. obtusa* y *E. zinckenella*, el género *Trigona* causa ciertos daños al cultivo de guandú, por estar presente a lo largo del ciclo de vida de la planta, “mordiéndolo” las hojas, brotes, flores y vainas en desarrollo. Por otro lado, estas abejas son importantes polinizadores y su situación como plaga es probablemente de pérdida menor, por lo que no sería necesario la búsqueda de un control para estas abejas.

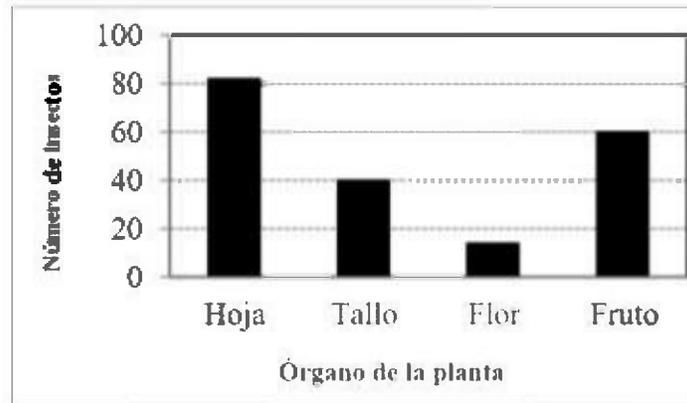


Fig. 5. Cantidad de insectos asociados a varios órganos de la planta de guandú.

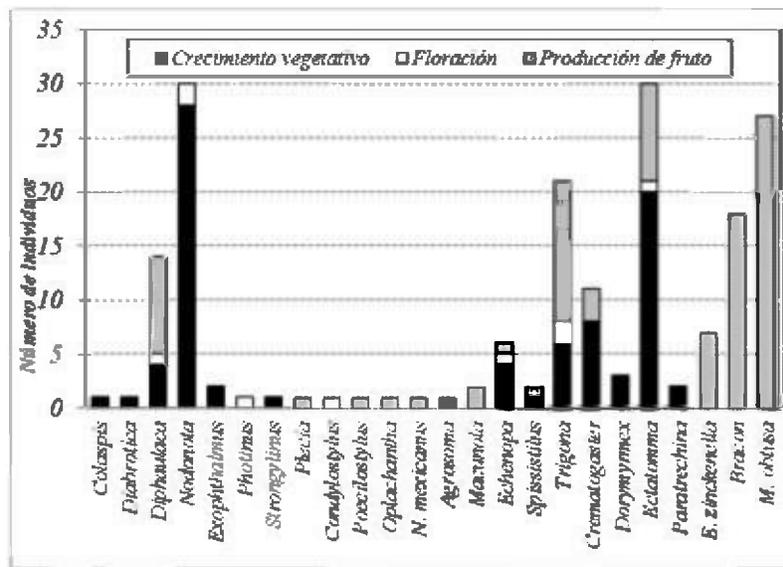


Fig. 6. Géneros de insectos recolectados en tres etapas fenológicas del cultivo de guandú en Macano, Boquerón, Chiriquí.

## CONCLUSIONES

Los géneros con mayor número de individuos asociados al follaje de la planta de guandú en Macano, Boquerón fueron *Nodonota*, *Diphaulaca* (Coleoptera: Chrysomelidae) y *Trigona* (Hymenoptera: Apidae). Adicionalmente los insectos que se ubicaron principalmente en el tallo del guandú son los géneros *Ectatomma* y *Crematogaster* (Hymenoptera: Formicidae). El género *Trigona* (Hymenoptera: Apidae) se encontró asociado al follaje y resultó ser el más sobresaliente como consumidor de las flores del guandú. *M. obtusa* (Diptera: Agromyzidae) y *E. zinckenella* (Lepidoptera: Pyralidae) fueron los géneros identificados en las vainas de guandú. *Bracon* (Hymenoptera: Braconidae) fue un parasitoide criado y posiblemente asociado a *Melanagromyza obtusa* (Diptera: Agromyzidae).

## AGRADECIMIENTOS

A Evelyn Caballero por permitirnos hacer los muestreos en su finca, a Edgar Aparicio por el apoyo para realizar las giras de campo, a Cheslavo Korytkowski, Programa Centroamericano de Maestría en Entomología de la Universidad de Panamá, por la identificación de los especímenes de *Melanagromyza obtusa*, a Eyvar Rodríguez, Zuleika Serracín y Géminis Vargas por la colaboración en las fotografías y a la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT), por proveer parte de los fondos económicos a través del Sistema Nacional de Investigadores (SNI).

## REFERENCIAS

- Binder, V. 1997. Manual de Leguminosas de Nicaragua. Tomo 1. PASOLAC.
- Brown, B.V., A. Borkent, J.M. Cumming, D.M. Wood, N.E. Woodley, & M.A. Zumbado. 2010. Manual of Central American Diptera. Vols. 1 y 2. NRC Research Press, Ottawa, Ontario, Canada, 1442 p.
- Cedano, J. 2006. Guía Técnica Cultivo del Guandul. Santo Domingo. República Dominicana. CEDAF, 2006. 84p. Consultado el 17 de mayo

del 2011. Disponible en [www.cedaf.org.do/CENTRODOC/EBOOK/GGUANDUL.PDF](http://www.cedaf.org.do/CENTRODOC/EBOOK/GGUANDUL.PDF).

Contraloría General de la República. Instituto Nacional de Estadística y Censo. VI Censo Nacional Agropecuario del 22 al 29 de abril del 2001 Volumen I.

Godoy, C., X. Miranda & K. Nishida. 2006. Membrácidos de la América Tropical. Editorial INBio, Costa Rica. 352 p.

Hanson, P. & I.D. Gauld. 2006. Hymenoptera de la Región Neotropical. Memories of the American Entomological Institute. Florida, USA. Volume 77: 1-994.

Kay, D.E. 1979. Crops and Product Digest No. 3. Food Legumes. Trop. Products Inst., London. 435 p.

King, A.B.S. & J.L. Saunders. 1984. Las plagas invertebradas de cultivos anuales alimenticios en América Central. 2ed. Editorial Turrialba. Costa Rica: CATIE.

Morton, J.F. 1976. The Pigeon pea (*Cajanus cajan* Millsp) a highprotein, tropical bushlegume. Hort-Science 2(1): 11-19.

Purseglove, J.W. 1968. Tropical Crops. Dycotyledons. Wiley, New York. Vol 2. 719 p.

Quicke, D.L.J. 1997. Subfamily Braconinae. En: Manual of the new world genera of the family Braconidae (Hymenoptera). Wharton, R.A. Marsh, P.H. & M.J. Sharkey (Eds.). Special publication of The International Society of Hymenopterists Number 1: 439. 149-174 p.

Reed, W., S.S. Lateef, S. Sithanatham & C.S. Pawar. 1989. Pigeonpea and chickpea insect identification hand book. Information Bulletin No. 26., Patancheru, A.P. 502 324, India: Instituto Internacional de Investigación de Cultivos para las Zonas Tropicales Semiáridas.

Schmutterer, H. 1990. Plagas de plantas cultivadas en el Caribe, con consideración particular en la República Dominicana. Deutsche Gesellschaft fuer Technische Zusammenarbeit (GTZ) GmbH. 640 p.

Segura, Y., J. Cedano, G. Godoy de Lutz & C. Serra. 2005. Estudio para un manejo integrado de la mosca asiática del Guandul [Melanagromyza obtusa (Malloch), Diptera: Agromyzidae] plaga que afecta la calidad del grano del Guandul (Cajanus cajan L. Millsp.) en la República Dominicana. Instituto Dominicano de Investigaciones Agropecuarias y forestales. República Dominicana. Consultado el día 17 de mayo del 2011. Disponible en [www.cedaf.org.do/eventos/ISTH2005/memoria/Miércoles/PDF/17.pdf](http://www.cedaf.org.do/eventos/ISTH2005/memoria/Miércoles/PDF/17.pdf)

Stevens, W.D., C.U. Ulloa, A. Pool & O.M. Montiel (Eds.). 2001. Flora de Nicaragua. Missouri Botanical Garden Press. St. Louis, Missouri. Vol. 85, tomos I, II y III.

Triplehorn, C.A. & N.F. Johnson. 2005. Borror and DeLong's Introduction to the Study of Insects. 7ma. edición. Thompson Brooks/Cole, USA, 864 p.

Wille, A. 1965. Las abejas atarrá de la región mesoamericana del género y subgénero *Trigona* (Apidae-Meliponini). Rev. Biol. Trop. 13 (2): 271-291.

*Recibido mayo de 2012, aceptado febrero de 2013.*



## **ROLE OF NITRIC OXIDE IN THE IMMUNOSUPPRESSIVE EFFECT OF *TRYPANOSOMA LEWISI* ON MULTIPLICATION OF *TOXOPLASMA GONDII* IN WHITE RATS**

**Nivia Judith Rios-Carrera<sup>1</sup>, Olga Marta Guerrero<sup>1</sup>, Misael Chinchilla Carmona<sup>2</sup> & Clas Une<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica; Facultad de Microbiología, Centro de Investigaciones en Enfermedades Tropicales (CIET). [toxogondii@gmail.com](mailto:toxogondii@gmail.com), [abriceno@racsa.co.cr](mailto:abriceno@racsa.co.cr)

<sup>2</sup>Universidad de Ciencias Médicas (UCIMED), San Jose, Costa Rica; Departamento de Investigación y Cátedra de Parasitología. [chinchillacm@ucimed.com](mailto:chinchillacm@ucimed.com)

<sup>3</sup>Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica; Instituto de Investigaciones en Salud (INISA). [allan.une@ucr.ac.cr](mailto:allan.une@ucr.ac.cr)

### **ABSTRACT**

The role of nitric oxide in the immunosuppressive effect of *Trypanosoma lewisi* on the response to *Toxoplasma gondii* in WISTAR rats was evaluated. Two groups of rats were infected with *T. gondii* tachyzoites. One of these groups had been infected with *T. lewisi* four days earlier. A third group was infected with *T. lewisi* only. The concentration of nitrates, as a reflection of nitric oxide production, was measured in serum during 10 days after infection with *T. gondii*. The results show that rats infected with *T. lewisi* only, do not at any time display altered levels of serum nitrate. *T. lewisi* infection does, however, partially inhibit the increase of serum nitrate levels caused by *T. gondii* 2 days after infection, a time point at which *T. gondii* multiplication in *T. lewisi* infected rats is exacerbated.

### **KEYWORDS**

Nitric oxide, interferon- $\gamma$ , immunosuppression, *Toxoplasma gondii*, *Trypanosoma lewisi*.

## RESUMEN

El papel del óxido nítrico sobre la inmunosupresión de *Trypanosoma lewisi* en la respuesta contra *Toxoplasma gondii* fue evaluada. Se infectaron dos grupos de ratas con taquizoitos de *T. gondii*. Uno de estos fue infectado con *T. lewisi* cuatro días antes de la infección con *T. gondii*. Un tercer grupo fue infectado con *T. lewisi* solamente. La concentración de nitratos fue medida como reflejo de la producción de óxido nítrico durante 10 días después de la infección con *T. gondii*. Los resultados muestran que ratas infectadas solo con *T. lewisi* a través de los días de muestreo no presentan alteración en los niveles de nitratos en suero. Sin embargo, los sueros de ratas previamente infectadas con *T. lewisi* y posteriormente infectadas con *T. gondii*, muestran una inhibición parcial en el incremento de los niveles de nitratos en suero 2 días después de la infección por *T. gondii*. Esta inhibición, coincide con una exacerbación en la multiplicación del parásito.

## PALABRAS CLAVES

Óxido nítrico, interferon-gamma, inmunosupresión, *Toxoplasma gondii*, *Trypanosoma lewisi*.

## INTRODUCTION

Immunosuppression has been thoroughly investigated during infection with various species of trypanosomes, including *Trypanosoma cruzi* (Kretzli *et al.*, 1977, Szein & Kierszenbaum, 1993, Kierszenbaum *et al.*, 1999) *T. brucei* (Darji *et al.*, 1992), *T. congolense* (Uzonna *et al.*, 1998) in humans and *T. musculi* (Albright & Albright, 1991) and *T. lewisi* in rodents (St. Charles *et al.*, 1981, Ndarathi, 1991, 1992).

Different mechanisms underlying the phenomenon have been suggested such as parasite-induced alterations of lymphocyte function, polarization towards a T helper (Th) 2 type response, macrophage suppression, and down-regulation of interleukin-2 (IL-2) (Albright & Albright, 1991, Darji *et al.*, 1992) and interferon- $\gamma$  (IFN- $\gamma$ ) production (Chinchilla *et al.*, 2005), all of which are reflected in a decrease in the activity of inflammatory cytokines involved in the control of intracellular parasite infections.

*Trypanosoma lewisi* is a blood borne protozoan parasite that infects rats. The animals generally remain free of disease due to appearance of 3 antibodies in the infected animals. One is a reproduction-inhibiting antibody known as ablastin and the other antibodies are trypanocidal and gradually kill the adult trypanosomes between 1 and 4 months

after infection. The immunity resulting from the infection continues throughout the life of the rat (Ndarathi, 1991, 1992). Previous studies from this laboratory have shown that between day 4 and 5 after infection with *T. lewisi*, rats otherwise resistant, become susceptible to infection with *Toxoplasma gondii* (Chinchilla *et al.*, 2005, Guerrero *et al.*, 1997). Further investigation of this model demonstrated increased multiplication of *T. gondii* in peritoneal macrophages isolated from rats infected with *T. lewisi* as compared to macrophages from control animals (Catarinella *et al.*, 1999, Chinchilla *et al.*, 2004). This was later associated with a concomitant decrease of serum concentrations of IFN- $\gamma$ , a key mediator of resistance to *T. gondii* (Chinchilla *et al.*, 2005). An important effector mechanism in the defense against the parasite is the generation of reactive nitrogen intermediates (RNI), including nitric oxide (NO) (James, 1995, Scharton-Kersten *et al.*, 1997, Filisetti & Candolfi, 2004). During infection with *T. gondii*, NO is produced as a result of activation of inducible NO synthase (iNOS), which is induced by IFN- $\gamma$  (Luder *et al.*, 2003, Pepper & Hunter, 2007, Silva *et al.*, 2009). The major cell populations involved in the production of early IFN- $\gamma$  are natural killer (NK) cells (Une *et al.*, 2000, Korbel *et al.*, 2004), NK T cells (Nakano *et al.*, 2002) and, in some cases, macrophages (Stafford *et al.*, 2002).

This study was performed to determine the role of NO in the immunosuppressive effect caused by *T. lewisi* on the multiplication of *T. gondii* in the white rat.

## **MATERIALS AND METHODS**

**Experimental animals:** Male Wistar Hannover rats (HsdBrflan: WIST) weighing 250 - 300g and bred at facilities of the Biological Assay Laboratory (LEBi), University of Costa Rica were used for the experimental parasite infections.

**Parasites:** Tachyzoites of the *T. gondii* RH strain (5174 genotype 1, American Type Culture Collection) were obtained from peritoneal exudates of previously infected mice, washed with sterile saline solution at 0.85%, counted in a Neubauer chamber and adjusted to a concentration of  $10^7$ /ml. Trypomastigotes of the *T. lewisi* TL2 strain (isolated in Costa Rica in 1977 from a grey rat *Rattus norvegicus* and

maintained by weekly passages in Sprague-Dawley rats were isolated from blood, counted in a Neubauer chamber and adjusted to a concentration of  $10^6$ /ml.

**Inoculation of the animals:** A total of ten experiments (nine rats for experiments) were performed in order to evaluate the three different experimental infection protocols (see Table 1): **I.** Inoculation of  $10^6$  *T. lewisi* trypomastigotes at day 0. **II.** Inoculation of  $10^7$  *T. gondii* tachyzoites at day 4. **III.** Inoculation of  $10^6$  *T. lewisi* trypomastigotes at day 0 followed by inoculation of *T. gondii* tachyzoites at day 4. All inoculations were intraperitoneal.

**Obtention of sera:** Blood was drawn from the tail of each animal into Microtainer gold tubes with serum separator (Becton Dickinson) at day 0, 5, 6, 7 and 14 of the experiment. The blood samples were centrifuged at 14000 rpm for 10 minutes, the sera was separated and stored in  $-20^{\circ}\text{C}$  until used.

**Determination of nitrate concentrations in serum:** Serum nitrate was reduced to nitrite by the enzyme Nitrate Reductase isolated from *Aspergillus niger* (Sigma, N7265) according to Gilliam *et al.* Briefly, after centrifugation at 14000 rpm for 10 min, 25  $\mu\text{l}$  of the sera was added in duplicates to a flat bottom 96 well plate and mixed with 40  $\mu\text{l}$  of phosphate buffer, 1  $\mu\text{l}$  of 12.5 mM NADPH, 30  $\mu\text{l}$  distilled water, and 4  $\mu\text{l}$  Nitrate Reductase (3.5 U/ml) and incubated for 10 min at room temperature (Gilliam & Sherman, 1993). The nitrite was subsequently quantified by the Griess reaction. Equal volumes (50  $\mu\text{l}$ ) of sulfanilamide (Sigma, N9125) dissolved in phosphoric acid and N-1-naphthyl-ethylenediamine (Sigma, N9125) were added to the wells. The optical density was determined in a microplate reader (Lab Systems) at 540 nm. The concentration was calculated from a standard curve based on readings of known concentrations of  $\text{NaNO}_3$  on the same plate (Green *et al.*, 1982, Sun *et al.*, 2003, Tsikas, 2005).

#### **Statistical analysis**

The results were analyzed by a Factorial ANOVA with repeat measures with one factor. The factor was the infection (I- *T. lewisi*, II- *T. gondii* and III- *T. lewisi-T. gondii*) and different levels were the days

of experiments (0, 5, 6, 7, and 14 days). The analysis was performed with a confidence coefficient of 0.05 ( $\alpha= 0.05$ ).

## RESULTS

Infection with *T. lewisi* (group I) alone did not affect serum nitrate levels at any time point after infection (Table 1). Baseline concentrations of 20-40  $\mu\text{M}$  were maintained throughout the 14 day duration of the experiment.

Both the animals infected with *T. gondii* only (group II) and those infected with *T. gondii* after previous inoculation with *T. lewisi* (group III) showed a significant increase in nitrate levels at days 5, 6 and 7 post-infection with *T. lewisi* as compared to control values at day 0 (Table 1). The highest concentrations were registered at day 6 after which there were a decline and values returned to control levels at day 14 post-infection. Also, at days 5-7, all animals infected with *T. gondii* displayed nitrate concentrations which were significantly higher than those of rats infected only with *T. lewisi* (Table 1). However, at day 6, the animals that were infected with *T. lewisi* before being inoculated with *T. gondii* had significantly less nitrate in the blood than those only infected with *T. gondii* (Table 1), indicating a possible mechanism for the immunosuppressive effect.

## DISCUSSION

The immune response mobilized against *T. lewisi* is characteristic of a response to extracellular pathogens and involves complement activation and Th2 type antibody formation (Ndarathi, 1991). As production of RNI is a hallmark of cellular immunity, it was to be expected that the concentrations of nitrate remain normal during the infection with *T. lewisi* (Chinchilla *et al.*, 2005).

The results demonstrate that infection with *T. lewisi* prior *T. gondii* results in a partial inhibition of the peak levels at day 6 of nitrate concentrations in serum induced by the latter parasite. Thus, rats infected with both parasites suffer from a dysfunction of the cellular immune response directed against *T. gondii*. This observation confirms previous work in this experimental model where an exacerbation of *T.*

*gondii* multiplication was provoked in various tissues of rats that had been infected with *T. lewisi* and where the surviving animals present recuperation with lymphocyte infiltration in those tissues 10 days after infection with *T. gondii* (day 14) (Catarinella *et al.*, 2001). The data obtained is in agreement with the observations by Chinchilla *et al.* 2004, showing that in rats infected with *T. lewisi* only, IFN- $\gamma$  can-not be detected in serum whereas the sera of animals infected with *T. gondii* contain significant amounts from 24 hours after infection (Chinchilla *et al.*, 2005).

It is known that *T. gondii* stimulates the production of IL-12 (Scharton-Kersten *et al.*, 1996), which in turn triggers the synthesis and release of early IFN- $\gamma$  by various innate effectors cells such as NK cells, NKT cells and macrophages (Suzuki *et al.*, 1988, Scharton-Kersten *et al.*, 1997, Yap & Sher, 1999, Pepper & Hunter, 2007). IFN- $\gamma$  is recognized as the principal mediator of innate resistance during the acute phase of the infection. Many studies confirm that RNIs, including NO, represent an important microbicidal mechanism generated by the activation of effectors cells by IFN- $\gamma$  (Gazzinelli *et al.*, 1991, Hayasi *et al.*, 1996, Scharton-Kersten *et al.*, 1997, Sherstha *et al.*, 2006). There are several factors operating to counteract and balance the inflammatory response involving IFN- $\gamma$  and NO (Adams *et al.*, 1990, Holán *et al.*, 2001, Seabra *et al.*, 2002, Silva *et al.*, 2009), among those the production of transforming growth factor (TGF)- $\beta$  (Bermúdez *et al.*, 1993) and eicosanoids (Thardin *et al.*, 1993, Noverr *et al.*, 2003) which may be produced by macrophages infected with *T. gondii*. Moreover, both these immune mediators have been shown to inactivate macrophages that have been activated by IFN- $\gamma$ , thereby indirectly inhibiting the generation of NO (Bermúdez *et al.*, 1993, Thardin *et al.*, 1993, Noverr *et al.*, 2003). Another possible mechanism for inactivation of a Th1 pathway implicating IFN- $\gamma$  and NO is early IL-10, the production of which is activated by many pathogens as a way of evading cellular immune responses. IL-10 down-regulates IFN- $\gamma$  production by CD4<sup>+</sup> Th1 cells, CD8<sup>+</sup> T cells, and NK cells during infection with several parasites, including *T. gondii* (Gazzinelli *et al.*, 1992, Lu *et al.*, 2003), and is therefore a potent inhibitor of the microbicidal activities of macrophages. It was reported that this effect occurs simultaneously to the suppressive of NO production by the effectors cells.

The *T. lewisi*-mediated immunosuppression model in white rats has the advantages of being inexpensive and rapid in comparison with administration of corticosteroids or other synthetic immunosuppressive substances. It has the potential to evaluate different infections in immunocompromized hosts. In addition to infection with *T. gondii* the model has been used to investigate interaction with *Cryptococcus neoformans* in our laboratory (Gross *et al.*, 2006).

The model is now being further investigated in order to determine the role of reactive oxygen intermediates, IL-10, IL-12 and other cytokines in the impairment of cellular immunity caused by *T. lewisi*.

Table 1. Nitrate concentration ( $\mu\text{M}$ ) in rat serum.

Day of experiment	I ( <i>T. lewisi</i> )		II ( <i>T. gondii</i> )		III ( <i>T. lewisi-T.gondii</i> )	
	Mean [NaNO <sub>3</sub> ]	S.E.M	Mean [NaNO <sub>3</sub> ]	S.E.M	Mean [NaNO <sub>3</sub> ]	S.E.M
0	32	± 3.7	30	± 3.6	30	± 2.0
5	25	± 1.3 <sup>a</sup>	44	± 4.7	48	± 5.4 <sup>d</sup>
6	31	± 3.5 <sup>a</sup>	172	± 33.1 <sup>b</sup>	88	± 14.2 <sup>c</sup>
7	35	± 7.6 <sup>a</sup>	70	± 11.2	73	± 9.6 <sup>d</sup>
14	24	± 1.1	25	± 1.9	29	± 8.1

Data is expressed as mean ± SEM of 10 experiments.

<sup>a</sup> p<0.05 versus II and III

<sup>b</sup> p<0.05 versus I and III

<sup>c</sup> p<0.05 versus I and II

<sup>d</sup> p<0.05 versus I

## ACKNOWLEDGEMENTS

We are grateful to Mahmood Sasa, MSc., Faculty of Microbiology, University of Costa Rica for assistance with the statistical analysis and Angel Aguirre Library Technician of Smithsonian Tropical Research Institute Library, Panama, for logistical support with journals references. This study was supported by the German Service for Academic Exchange (DAAD), the Department of Parasitology, Faculty of Microbiology and the Institute of Health Research (INISA), University of Costa Rica. Supported partially by Departamento de Investigación, Universidad de Ciencias Médicas (UCIMED).

## REFERENCES

- Adams, L.B., J.B. Hibbs, R. Taintor & J.L. Krahenbuhl. 1990. Microbiostatic effect of murine- activated macrophages for *Toxoplasma gondii*: Role for synthesis of inorganic nitrogen oxides from L-arginine. *J Immunol* 144: 2725 -2729.
- Albright, J.W. & J.F. Albright. 1991. Rodent trypanosomes. Their conflict with the immune system of the host. *Parasitol Today* 7: 137-140.
- Bermúdez, L., G. Covaro & J. Remington. 1993. Infection of murine macrophages with *Toxoplasma gondii* is associated with release of transforming grown factor- $\beta$  and down regulation of expression of tumor necrosis factor receptors. *Infect Immun* 61: 4126-4130.
- Catarinella, U., F. Alvarado, M. Chinchilla & O.M. Guerrero. 2001. Incremento en la invasión tisular de *T. gondii* debido a infecciones con *T. lewisi* en la rata blanca. *Patología* 39: 170-176.
- Catarinella, G., M. Chinchilla & O.M. Guerrero, A. Castro. 1999. Infection of white rat peritoneal macrophages with *Toxoplasma gondii* (Coccidia: Sarcocystidae after *Trypanosoma lewisi* (Kinetoplastida: Trypanosomatidae) infection. *Rev. Biol. Trop.* 47: 483-488.
- Chinchilla, M., O.M. Guerrero & A. Castro. 2004. Effect of *Trypanosoma lewisi* infection on the *Toxoplasma gondii* multiplication in white rat peritoneal macrophages. *Parasitol. Latinoam* 59: 3-7.

Chinchilla, M., L. Reyes, O.M. Guerrero & A. Castro. 2005. Role of interferon- $\gamma$  on the immunosuppression during *Toxoplasma gondii* infection by *Trypanosoma lewisi*. *Parasitol Latinoam* 60: 54-56.

Darji, A., R. Lucas, S. Magez, E. Torrelle, J. Palacios, M. Sileghem, E. Bayiana Songa, R. Hamers & P. Baetselier. 1992. Mechanisms underlying trypanosome-elicited immunosuppression. *Ann Soc Belg Med Trop*. 72 Suppl 1: 27 – 38.

Filisetti, D. & E. Candolfi. 2004. Immune response to *Toxoplasma gondii*. *Ann Ist Super Sanita* 40: 71-80.

Gazzinelli, R.T., F.T. Hakim, S. Hieny, G.M. Shearer & A. Sher. 1991. Synergistic role of CD4<sup>+</sup> and CD8<sup>+</sup> T lymphocytes in IFN- $\gamma$  production and protective immunity induced by an attenuated *Toxoplasma gondii* vaccine. *J. Immunol*. 146:286-292.

Gazzinelli, R.T., I.P. Oswald, S.L. James & A. Sher. 1992. IL-10 inhibits parasite killing and nitrogen oxide production by IFN- $\gamma$ -activated macrophages. *J. Immunol*. 148: 1792-1796.

Gilliam, M.B., M.P. Sherman, J.M. Griscavage & L.J. Ignaro. 1993. A spectrophotometric assay for nitrate using NADPH oxidation by *Aspergillus* nitrate reductase. *Anal. Biochem*. 212:359-365.

Green, L.C., D.A. Wagner, J. Glogowski, P.L. Skipper, J.S. Wishnok & S.R. Tannenbaum. 1982. Analysis of nitrate, nitrite and [<sup>15</sup>N] in biological fluids. *Anal. Biochem*. 126: 131-138.

Gross, N.T., O.M. Guerrero, M. Chinchilla & C. Jarstrand-Hall. 2006. *Trypanosoma lewisi*-induced immunosuppression: The effects on alveolar macrophage activities against *Cryptococcus neoformans*. *Exp. Parasitol*. 113: 262-266.

Guerrero, O.M., M. Chinchilla & E. Abrahams. 1997. Increasing of *Toxoplasma gondii* (Coccidia; Sarcocystidae) infection by *Trypanosoma lewisi* (Kinetoplastida; Trypanosomatidae) in white rats. *Rev. Biol. Trop*. 45: 877-922.

Hayashi, S., C. Chan, R. Gazzinelli & F.G. Roberge. 1996. Contribution of nitric oxide to the host parasite equilibrium in toxoplasmosis. *J. Immunol.* 156: 1476-1481.

Holán, V., M. Krulová, A. Zajicová & J. Pindjacová. 2001. Nitric oxide as a regulatory and effector molecule in the immune system. *Mol. Immun.* 38: 989-995.

James, S.L. 1995. Role of nitric oxide in parasitic infections. *Microbiol. Rev.* 59: 533-547.

Kierszenbaum, F., J.L. De Diego, M. Fresno & M.B. Szein. 1999. Inhibitory effects on the *Trypanosoma cruzi* membrane glycoprotein AGC 10 on the expression of IL-2 receptor chains and secretion of cytokines by subpopulations of activated human T lymphocytes. *Eur. J. Immunol.* 29: 1684-1691.

Korbel, D.S. O.C. Finney & E.M. Riley. 2004. Natural killer and innate immunity to protozoan pathogens. *Inter. J. Parasitol.* 34: 1517-1528.

Krettli, A.U. 1977. Exacerbation of experimental *Trypanosoma cruzi* infection in mice by concomitant malaria. *J Protozool* 24: 514-518.

Lu F., S. Huang & L.H. Kasoer. 2003. Interleukin-10 and pathogenesis of murine ocular toxoplasmosis. *Inf. Immun.* 71: 7159 -7163.

Lüder, C.G.K., M. Algner, C. Lang, N. Bleichner & U. Groß. 2003. Reduced expression of the inducible nitric oxide synthase after infection with *Toxoplasma gondii* facilitates parasite replication in activated murine macrophages. *Int. J. Parasitol.* 33: 833 -844.

Nakano, Y., H. Hisaeda, T. Sakai., H. Ishikawa, M. Zhang, Y. Maekawa, T. Zhang, M. Takashiina, M. Nishitani, R.A. Good & K. Himeno. 2002. Roles of NKT cells in resistance against infection with *Toxoplasma gondii* and in expression of heat shock protein 65 in the host macrophages. *Microb. Infect.* 4: 1 -11.

Ndarathi, C.M. 1991. Suppressor and protector factors derived from *Trypanosoma lewisi*. *Inter. J. Parasitol.* 21: 763-769.

Ndarathi, C.M. 1992. Cellular responses to culture-derived soluble exoantigens of *Trypanosoma lewisi*. *Parasitol. Res.* 78: 324 -328.

Noverr, M.C., J.R. Erb-Downward & G.B. Huffnagle. 2003. Production of eicosanoids and oxypilins by pathogenic eukaryotic microbes. *Clin. Microbiol. Rev* 16(3): 517-533.

Pepper, M. & C.A. Hunter. 2007. Innate immune recognition and regulation of protective immunity to *Toxoplasma gondii*, p.111-126. *In: Ajioka JW, Soldati D. (eds.). Toxoplasma: Molecular and cellular biology.* Norfolk: Horizon Bioscience.

Scharton-Kersten, T., E.Y. Denker, R. Gazzinelli & A. Sher. 1996. Role of IL-12 in induction of cell-mediated immunity to *Toxoplasma gondii*. *Res. Immunol.* 146: 539 -545.

Scharton-Kersten, T.M, G. Yap, J. Magram & A. Sher. 1997. Inducible nitric oxide is essential for host control of persistent but not acute infection with the intracellular shock protein pathogen *Toxoplasma gondii*. *J. Exp. Med.* 185: 1261 -1273.

Seabra, S.H., W. Souza & R. DaMatta. 2002. *Toxoplasma gondii* partially inhibits nitric oxide production of activated murine macrophages. *Exp. Parasitol.* 100: 62-70.

Shrestha, S., T. Tomita, L. Weiss & A. Orlofsky. 2006. Proliferation of *Toxoplasma gondii* in inflammatory macrophages in vivo is associated with diminished oxygen radical production in the host cell. *Int. J. Parasitol.* 36: 433 – 441.

Silva, N.M., J.C. Vieira, C.Martins Carneiro & W.L. Tafuri. 2009. *Toxoplasma gondii*: The role of IFN-gamma, TNFRp55 and iNOS in inflammatory changes during infection. *Exp Parasitol.* 123(1): 65 – 72.

St. Charles, M.H., D. Frank & C.E. Tanner. 1981. The depressed response of spleen cells from rats infected with *Trypanosoma lewisi* in

producing a secondary response in vitro to sheep erythrocytes and the ability of soluble products of trypanosomes to induce this depression. *J. Immunol.* 43: 441 - 445.

Stafford, J.L., N.F. Neumann & M. Belosevic. 2002. Macrophage-mediated innate host defense against protozoan parasites. *Crit. Rev. Microbiol.* 28: 187 – 248.

Sun, J., X. Zhang, M. Broderick & H. Fein. 2003. Measurement of nitric oxide production in biological systems by using Griess reaction assays. *Sensors* 3: 276-284.

Suzuki, Y., M. Orellana, R.D. Schreiber & J.S. Remington. 1988. Interferon- $\gamma$ : The major mediator of resistance against *Toxoplasma gondii*. *Science* 240: 516-518.

Sztejn, M.B. & F. Kierszenbaum. 1993. Mechanisms of development of immunosuppression during *Trypanosoma* infections. *Parasitol. Today.* 9: 424 -428.

Thardin, J.F., C. M'Rini, M. Beraud, J. Vandaele, M.F. Frisach, M.L. Bessieres, I.P. Seguela & B. Pipy. 1993. Eicosanoid production by mouse peritoneal macrophages during *Toxoplasma gondii* penetration: Role of parasite and host cell phospholipases. *Infect Immun.* 61: 1432-1441.

Tsikas, D. 2005. Methods of quantitative analysis of nitric oxide metabolites nitrite and nitrate in human biological fluids. *Free Radical Res.* 39: 797-815.

Une, C., J. Andersson, M.E. Eloranta, D. Sunnemark, R.A. Harris & A. Örn. 2000. Enhancement of NK cell cytotoxicity and induction of NK cell-derived interferon- $\gamma$  (IFN- $\gamma$ ) display different kinetics during experimental infection with *Trypanosoma cruzi*. *Clin. Exp. Immunol.* 121:499-505.

Uzonna, J.E., O.S. Kaushik, Y. Zhang, J.R. Gordon & H. Tabel. 1998. Experimental murine *Trypanosoma congolense* infection. II Role of splenic adherent CD<sub>3</sub><sup>+</sup> Thy 1.2<sup>+</sup> TCR- $\alpha\beta\gamma\delta$ - CD<sub>4</sub><sup>+</sup> and CD<sub>3</sub><sup>+</sup> Thy 1.2<sup>+</sup>

TCR- $\alpha\beta\gamma\delta$ -cells in the production of IL-4, IL-10 and IFN- $\gamma$  in trypanosome-elicited immunosuppression. *J. Immunol.* 161:6189-6197.

Yap, G.S. & A. Sher. 1999. Cell-mediated immunity to *Toxoplasma gondii*: initiation, regulation and effectors function. *J. Immunol.* 201: 240 -247.

*Recibido abril de 2012, aceptado enero de 2013.*



COMUNICACIÓN CORTA

**ABUNDANCIA ESTACIONAL DEL ZOOPLANCTON EN EL GOLFO DE MONTIJO, PACIFICO PANAMEÑO**

**Manuel Grimaldo O<sup>1</sup>, José Chang V<sup>2</sup>, Edgardo Muñoz T<sup>1</sup>, Aramis Averza C<sup>1</sup>.**

<sup>1</sup>Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Centro de Ciencias del Mar y Limnología.

<sup>2</sup>Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Centro Regional de Veraguas.

**RESUMEN**

La descripción de la variación estacional del zooplancton en los ecosistemas acuáticos es útil para definir los movimientos de la masa de agua, y para estimar la dinámica de los recursos pesqueros en áreas que, como el Golfo de Montijo, representa una de las principales zonas halieúticas del país. Se realizaron arrastres horizontales, superficiales con una red de plancton de 243  $\mu\text{m}$  de abertura por un periodo de 5 min. a velocidad de 2 nudos y equipada con un flujómetro. Las muestras mensuales obtenidas durante un ciclo anual a partir de mayo 2009 a abril 2010 mostró la dominancia de: copépodos calanoideos (75,4%), larvas de crustáceos decápodos (8,6%) y de cirripodos (4,5%), 7,0% quetognatos y huevecillos de peces (2,3%) principalmente. Los copépodos son los representantes holoplanctónicos más importantes en todos los estudios planctónicos y en conjunto con los otros organismos son parte de los productores secundarios acuáticos. El índice de productividad secundaria mensual se determinó considerando el número total de individuos y el volumen ( $\text{m}^3$ ) de agua filtrada por la red. Este demostró incremento progresivo desde junio (2009) hasta febrero del siguiente año (2010), precedido de una producción muy elevada en mayo 2009.

**PALABRAS CLAVES**

Zooplancton, Ictioplancton, Abundancia, Productividad, Golfo de Montijo.

## **ABSTRACT**

The description of seasonal variation of zooplankton in aquatic ecosystems is useful to define movements of the mass of water and to stimulate the dynamics of fisheries resources in areas such as Golfo de Montijo and which represents one of the main halieutics zone of the country. Superficial horizontal dragging was done using planktonic net of 243  $\mu\text{m}$  opening for five minutes at a speed of two knots equipped with a flow-meter. Samples were taken during an annual cycle from May (2009) to April (2010), and showed dominance of calanoids copepods (75.4%), larvae of crustaceans decapods (8.6%) and cirripedia (4.5%), chaetognatha and small eggs of fishes (2.3%). Copepods are the holoplanktonic representative most important in all planktonic studies and along with other organisms, formed part of aquatic secondary producers. The productive secondary index was determined taking in consideration the total of individuals and the volume ( $\text{m}^3$ ) of water filtered by the net. This showed progressive increase from June (2009) to February (2010), preceded by a high production in the May (2009).

## **KEYWORDS**

Zooplankton, Ichthyoplankton, Abundance, Productivity, Gulf of Montijo.

## **INTRODUCCIÓN**

Los organismos zooplanctónicos ubicados en el nivel secundario (II) de la cadena trófica, que en su mayoría se alimentan de fitoplancton o de materia en suspensión pueden llegar a caracterizar zonas marinas. Algunos de estos organismos son fitoplanctonófagos, carnívoros, omnívoros y otros, capaces de filtrar indiscriminadamente o de capturar en forma selectiva organismos de mayor tamaño (Riley, 1946). Asimismo, un gran número de ellos pueden estar dotados de sistemas para concentrar pequeñas células muy dispersas en el agua como el de los copépodos holoplanctónicos, siempre sobresalientes en este tipo de muestras, que utilizan estos mecanismos para sobrevivir e incrementar su densidad.

Se ha encontrado en la naturaleza que estas comunidades varían con las condiciones hidrográficas del mar y con la cantidad de fitoplancton disponible (Linquist, 1961). Suárez - Morales & Rivera-Arraiga (1998) consideran que las mareas son los principales mecanismos

transportadores de plancton en las zonas costeras. De igual forma, la acumulación de estos organismos puede deberse a la influencia de los vientos alisios del norte que soplan durante la estación seca incidiendo en el área donde se realizó el estudio.

Wangelin & Wolf (1996) en sus estudios de los Golfos de Nicoya y Dulce, reconoce que las abundancias estacionales de estos organismos zooplanctónicos durante el período de transición entre las temporadas seca - lluviosa, se incrementan con un cambio hacia los grupos más grandes. Siendo estos organismos particularmente útiles para definir los movimientos de masas de agua tanto a nivel oceánico como en zonas neríticas (Sund, 1964), también sirven para estimar la dinámica de los recursos pesqueros en zonas que, como la de nuestro estudio, representa una de las más importantes del país. Rodríguez & Torres (2011) en el área del estuario de Chame han encontrado que es muy rico en organismos zooplanctónicos como: copépodos, ostrácodos, larvas de crustáceos (zoeas, mysis), ctenóforos, poliquetos, apendiculares, quetognatos, cnidarios (medusas) e ictioplancton (larvas y huevos de peces). Para ellos, los grupos taxonómicos más frecuentes que aportan la mayor riqueza han sido los copépodos, quetognatos y el ictioplancton.

Se han conducido estudios relacionados con los patrones de distribución espacial de la biomasa del zooplancton realizado en el Golfo de Montijo (Seixas, 2004). Sin embargo, aún falta más información sobre la variabilidad espacial y temporal de éstos micro organismos en el Golfo. Es por ello que el presente artículo determina la abundancia estacional de los zooplanctontes en esta zona del pacífico central panameño.

## **METODOLOGÍA**

### **Área de Estudio**

Incluyó la parte externa de la desembocadura del estero del río Caté (Punta Manglar - Isla del Tuco) hasta el frente de playa Calabazal en el Golfo de Montijo (Pacífico de Panamá) entre los 7° 43' 17" N y 81° 12' 22" O. (Fig.1).

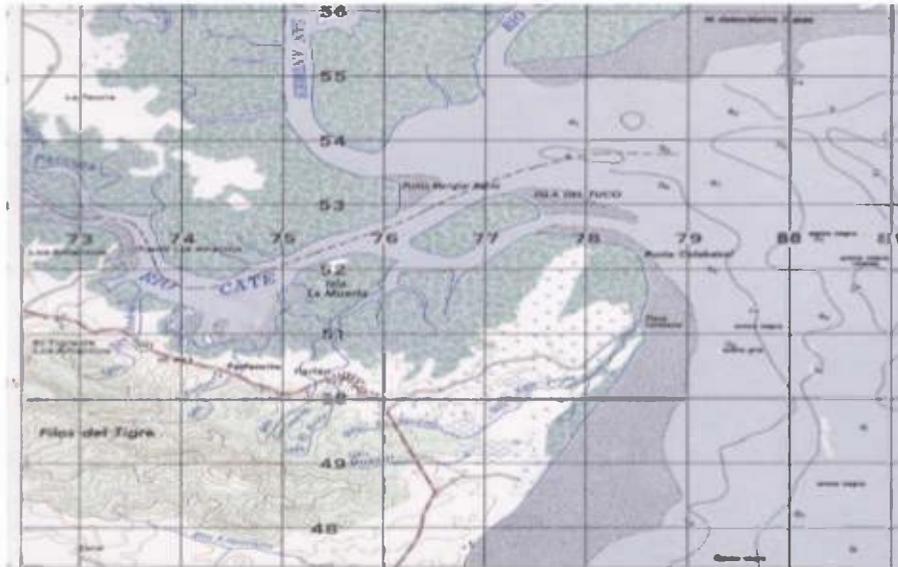


Fig. 1. Mapa del área de estudio dentro del Golfo de Montijo (IGNTM, 1:50.000).

### **De Campo**

Arrastres horizontales y superficiales por un periodo de 5 min. y velocidad aproximada de 2 nudos se realizaron con una red de plancton estándar de 0,30 m de diámetro de boca y abertura de malla de 243  $\mu$ m equipada con un flujómetro mecánico tipo torpedo modelo 2030R para estimar el volumen de agua filtrada, colocado de manera excéntrica en la embocadura conforme a las normas del fabricante y para evitar problemas de turbulencia (Tranter & Heron, 1967).

### **De Laboratorio**

Las muestras mensuales obtenidas durante un ciclo anual a partir de mayo 2009 a abril 2010 fueron primeramente preservadas en formaldehído al 4% neutralizado con Borato de Sodio (Gasca & Castellanos, 1993) y luego estandarizados sus volúmenes a 500 ml para homogenizarlas y obtener alícuotas representativas con la ayuda de un fraccionador Folsom y facilitar de esta manera la cuantificación

e identificación de los organismos. El índice de productividad secundaria mensual se determinó considerando el número total de individuos y el volumen ( $m^3$ ) de agua filtrada por la red (Lamotte & Bourliere, 1971). Para la identificación de los organismos zooplanctónicos se utilizó la referencia de Barnes (1977).

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### Aspecto General del Plancton

El análisis taxonómico de las muestras reveló dominancia de: copépodos (75,46%) sobre todo *Calanus sp.*, larvas de decápodos (mysis I, II y III) (8,64%), de cirripedos (4,55%), ostrácodos (0,74%), cladóceros (*Penilia sp.*) (0,44%) y anfípodos (0,05%), quetognatos (*Sagitta sp.*) (7,02%), ictioplancton en huevecillos (2,33%) y larvas (0,05%), anélidos poliquetos (0,29%) en fase larval, cordados apendiculares (*Oikopleura sp.*) (0,15%) y urocordados (0,01%), celenterados (en estadios de medusas 0,07% y algunos sifonóforos), además de moluscos sobre todo pterópodos (0,07%) (Fig.2).

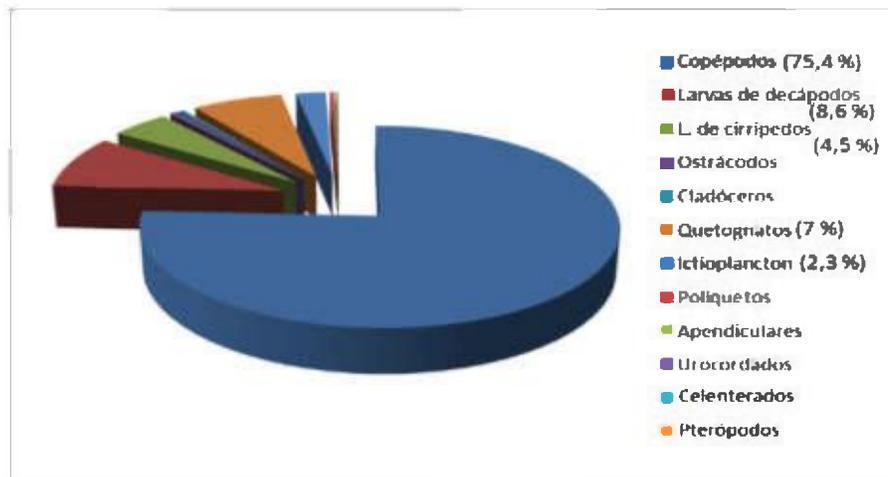


Fig. 2. Representatividad total (%) de los principales organismos zooplanctónicos.

El ámbito de variación anual de los más sobresalientes (copépodos) osciló entre los 49.5 % - 89.5 % (Fig.3). Esta determinación porcentual precedente (copépodos) concuerda con aquellas obtenidas por Guzmán & Obando (1988) y Escamilla et al. (2001), cuyos valores generalmente se encuentran entre los 60 y 70 %. Los copépodos por su dominancia y carácter holoplanctónico pueden ser utilizados como indicadores de la productividad secundaria. Ninguno de los otros grupos sobrepasó el 20% durante los meses que duró el estudio.

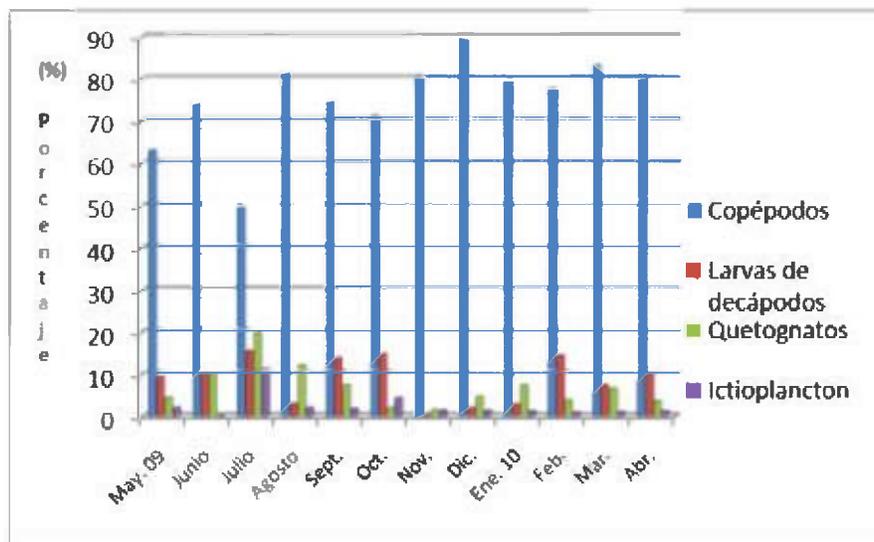


Fig.3. Variaciones temporales porcentuales (%) de los grupos más importantes.

Es de notar que las variaciones porcentuales de representatividad anual de las larvas de crustáceos decápodos (mysis) refleja una zona de crianza y desarrollo potencial del camarón y su pesca ulterior. Las investigaciones de Gómez (1994) sobre el meroplancton señalan que a finales de la estación lluviosa se da el reclutamiento de las larvas de crustáceos. Nosotros observamos varios picos anuales de estas larvas. (julio, septiembre-octubre y febrero) con valores que superan el 10 % de las muestras.

La presencia en este estudio de los depredadores carnívoros del zooplancton quetognatos *Sagitta sp.* demuestra la existencia de alimento suficiente en este nivel y en el área, caracterizando y asegurando la estabilidad y productividad de todos los ecosistemas marinos y de esta cadena trófica del Golfo de Montijo en particular. Estos “gusanos flecha” representan un eslabón importante en el ciclo alimenticio del ecosistema marino, actuando como predadores, consumidores y presas; pero su importancia radica en su posición como consumidor secundario dentro de la cadena trófica del plancton (Thompson, 1974). El porcentaje de variación de estos “gusanos” fluctúa de 1.5% a 19.8% y coincide con los resultados de Hossfeld (1996). Su máxima estuvo en julio y estuvieron presentes todo el año (Fig.3). Además, Alvaríño (1965) sugiere que los mismos deben ser tomados en cuenta como indicadores hidrológicos, para determinar diferentes tipos de masas de agua y sus movimientos.

Aparentemente, la zona estudiada no es propicia para el abrigo y crianza de peces. El bajo porcentaje de incidencia anual (2.3%) lo indica (Fig.2). Su variación temporal mostró presencia en todo el periodo de estudio y su valor más alto en el mes de julio con 11.2% primordialmente huevecillos (Fig.3). Esta distribución podría estar asociada a una época reproductiva. Según Munro et al. (1973) muchos peces prefieren las aguas estuarinas para su desarrollo. Para Wangelin & Wolf (1996) la presencia de huevecillos de peces y de invertebrados en fase larval en sus estudios sobre las comunidades zooplanctónicas del Golfo Dulce y de Nicoya sugieren que estas zonas poseen una gran importancia reproductiva. Se requiere un estudio ictioplanctónico más completo para confirmar nuestras observaciones.

La presencia y variabilidad temporal para los otros integrantes del plancton del área, no amerita a nuestro criterio algún otro comentario más que, el de mencionar su baja incidencia y su importancia en la cadena alimenticia del Golfo de Montijo.

### Índice de Productividad Secundaria (II)

El índice de productividad secundaria mensual se determinó considerando el número total de individuos y el volumen ( $m^3$ ) de agua filtrada por la red. Este demostró incremento progresivo desde junio (2009) hasta febrero del siguiente año (2010), precedida de una producción muy elevada en mayo 2009 (Fig.4).

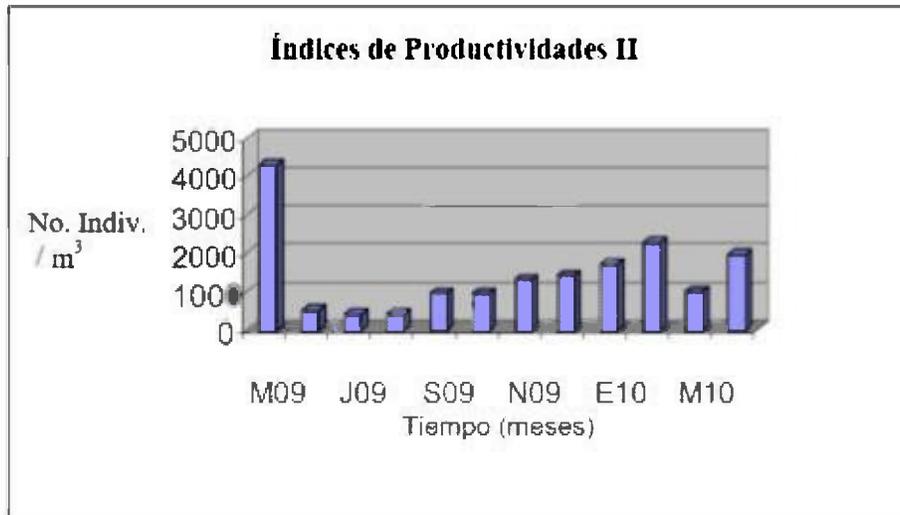


Fig. 4. Variaciones Mensuales de los Índices de Productividad Secundaria (No. Indiv./ $m^3$ ) (Mayo 2009 a Abril 2010).

El Golfo de Montijo está rodeado por una gran cantidad de ríos que vierten sus aguas en él y que traen consigo un gran aporte de nutrientes por escorrentía lo que se refleja en el aumento de fitoplancton y zooplancton (Seixas, 2004).

### CONCLUSIONES

La diversidad de taxones encontrados en el área de estudio es bastante elevada.

Los grupos sobresalientes fueron los copépodos calanoideos (75,4%), larvas de crustáceos decápodos (8.6%), quetognatos (7%) e ictioplancton (2,3%).

El índice de productividad secundaria demostró incremento progresivo desde junio (2009) hasta febrero del siguiente año (2010), precedida de una producción muy elevada en mayo 2009.

## **REFERENCIAS**

Alvariño, A. 1965. Chaetognathes. *Ann. Rev. Oceanogra. Mar. Biol.* 3:115-197.

Barnes, R. 1977. *Zoología de los invertebrados*. Edit. Interamericana. México. 514 pág.

Escamilla, J., E. Suarez, & R. Gasca. 2001. Distribución del zooplancton durante los flujos de marea opuestos en el complejo lagunar de Chelem, Yucatán, México. *Rev. Biol. Trop.*, 49(1):47-51.

Gasca, R. & I. Castellanos. 1993. Zooplancton de la Bahía de Chetumal, Mar Caribe, México. *Rev. Biol. Trop.* 41(3):619-625.

Gómez, J. 1994. El Meroplancton. *Revista Scientia*. (Panamá) 8(2):118-126.

Guzmán, H. & V. Obando. 1988. Diversidad y abundancia diaria y estacional del zooplancton marino de la Isla del Caño, Costa Rica. *Rev. Biol. Trop.* 36:139-150.

Hossfeld, B. 1996. Distribution and biomass of arrow worms (Chaetognatha) in Golfo of Nicoya and Golfo Dulce, Costa Rica. *Rev. Biol. Trop.*, 44(3):157-172 p.

Lamotte, M. & F. Bourliere. 1971. *Problèmes d'écologie: L'échantillonnage des peuplements des milieux aquatiques*. Masson & Cie. 294 pp.

Lindquist, A., 1961. *Manual de planctología tropical*. Instituto de Oceanografía de la Academia de Cuba, La Habana.

Munro, J., V. Caunt, R. Thompson & P. Reason. 1973. The spawning seasons of Caribbean reef fishes. *J. Fish Biol.* (5):69-84.

Riley, G.A. 1946. "Factors controlling phytoplankton populations on Georges Bank". *J. Mar Res.* 6: 54-73.

Rodriguez, C. & T. Torres. 2011. Zooplancton asociado al manglar de Punta Chame con énfasis en el ictioplancton. Tesis de Licenciatura. Escuela de Biología. Universidad de Panamá. 189 pág.

Seixas, C. 2004. Spatial pattern of zooplankton biomass in the Gulf of Montijo, Panama. *Tecnociencia*, Vol. 6(2): 153-160 p.

Suárez-Morales, E., & Rivera-Arriaga, E. 1998. Zooplancton e hidrodinámica en zonas litorales y arrecifales de Quintana Roo. *Hidrobiología* (8):19-32.

Sund, P. 1964. The chaetognaths of the waters of the Peru region. *Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull.*, Vol. 9(3): 115-188. p.

Thompson, J. 1974. The Chaetognatha of South-Eastern Australia. *Austral. Council Sci. Indus. Res. Bull.* 222, 43 p.

Tranter, D. & A. Heron. 1967. Experiments on filtration in plankton nets. *Austr. J. Mar. Freshw. Res.* 11-89 p.

Wangelin, M. & M. Wolf. 1996. Comparative biomass spectra and species composition of the zooplankton communities in the Golfo Dulce and Golfo de Nicoya, Pacific coast of Costa Rica. *Rev. Biol. Trop.*, 44(3):157-172.

*Recibido noviembre de 2011, aceptado febrero de 2013.*



## **DESARROLLO DE PRODUCTOS NOVEDOSOS DE PAPAYA PANAMEÑA: ENCURTIDOS EN FORMA DE DEDITOS Y RAYADOS**

**Mir N. Islam<sup>1</sup> y Eunice M. Molinar-Toribio<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Universidad Interamericana de Panamá, Panamá, República de Panamá, Escuela de Hospitalidad. <sup>2</sup>Universidad Latinoamericana de Ciencia y Tecnología, Panamá.  
E-mail: <sup>1</sup>mislam@laureate.edu.pa, <sup>2</sup>eunice.molinar@iqac.csic.es

### **RESUMEN**

Con la intención de diversificar el uso de la papaya en Panamá, se llevó a cabo un proyecto para desarrollar una serie de productos empleando cáscara, pulpa y semillas de *Carica papaya* L., de la variedad Chola roja. Este estudio se enfocó en el desarrollo de dos encurtidos a base de la pulpa de papaya, denominados deditos y rayados de papaya. Después de realizar varias pruebas con diferentes ingredientes, evaluaciones sensoriales y parámetros como pH y grados de Brix, se encontraron las proporciones adecuadas para la elaboración y futura comercialización de estos encurtidos. La vida útil estimada para el encurtido en forma de deditos de papaya, empacado en bolsas plásticas doblemente laminadas, en área aire acondicionada ( $22^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ ) fue de 7 meses y de 19 meses en refrigeración ( $4^{\circ}\text{C} \pm 1^{\circ}\text{C}$ ).

### **PALABRAS CLAVES**

*Carica papaya*, Chola roja, encurtidos, evaluación sensorial, pH, Brix, vida útil.

### **ABSTRACT**

In order to diversify the use of papaya in Panama, a research project was implemented to develop a series of products based on the peels, pulp and seeds of *Carica papaya* L., variety "Chola Roja". This study focused on the development of a pickle type product from the pulp in the form of papaya fingers or shreds. After carrying out many trials with different ingredients, sensory evaluation and

parameters such as pH and Brix, a distinct recipe was developed for possible commercialization of the product. Storage study of the pickled papaya fingers packed in stand-up plastic pouch indicated a shelf-life of 7 months under air-conditioning ( $22^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ ) and 19 months under refrigeration ( $4^{\circ}\text{C} \pm 1^{\circ}\text{C}$ ).

## KEYWORDS

*Carica papaya L.*, Chola roja, Pickles, Sensory evaluation, pH, Brix, Shelf-life.

## INTRODUCCIÓN

La papaya (*Carica papaya L.*) es una de las frutas tropicales más común en Panamá. La planta es de origen centroamericano, conocida y consumida en casi toda América desde hace varios siglos, aunque hoy día se cultiva en muchos países de otros continentes, principalmente, en Asia y África. En Panamá existen varias plantaciones organizadas de papaya, las principales plantaciones están ubicadas en Chiriquí, San Carlos, Los Santos y Chepo. Aunque, existen muchas variedades de papaya, en Panamá se cultivan básicamente tres: la variedad más común denominada “Chola roja”, que se caracteriza por ser casi cilíndrica, grande, jugosa, de gran grosor, con cavidad interna pequeña, de color rojizo por dentro, con una textura fuerte que resiste el manoseo y el embarque, con peso promedio de 4-5 kg. La segunda variedad es la “Sunrise solo” fruta pequeña, de pulpa blanda pero su piel es dura al madurar lo que le ayuda a resistir el deterioro de la fruta en la transportación. Es de variedad Hawaianas, de color rosado por dentro, con peso promedio de 0.5-1 kg. La tercera variedad es la “Tainung”, un híbrido desarrollado por Fitomejoradores en Taiwán, tolera muy bien el frío, es una fruta de pulpa roja-naranja, con peso promedio de 1.5-2 kg. Estas variedades se han adaptado bien al clima y suelo de Panamá, llegándose a producir todo el año (Guzmán, 1998). Sin embargo, tradicionalmente la papaya solo se utiliza como una fruta de mesa, por lo que está sub-utilizada. Por otro lado, esta fruta es fuente de muchos nutrientes convencionales (Islam, 2005), presenta características fisicoquímicas que lo hacen una fuente excelente de bio-materiales para productos novedosos en la industria alimentaria,

cosmética y farmacéutica (Espin & Islam, 1998). Según estudios preliminares (Islam, 2000) se considera factible el desarrollo y elaboración de varios productos que tengan como base la papaya pintona (ni verde ni madura).

En Panamá, muchos campesinos se dedican al cultivo de papaya. Tradicionalmente, esta fruta se cosecha cuando está madura (evidenciado por el desarrollo de color en la cáscara) o cerca de la maduración. Luego, la fruta es transportada en camiones a los mercados públicos, donde es comercializada al por mayor y/o al detal. La vida útil de la papaya es generalmente alrededor de una semana, pero cuando es magullada durante el transporte y manejo, su vida útil se reduce a unos cuantos días. Según la literatura (Gajanana *et al.*, 2010), los valores de pérdidas post-cosecha de papaya están alrededor del 25%.

Con el objetivo de incrementar la demanda de la fruta verde-pintona (menos perecedera), se crearon varios productos novedosos, como los encurtidos en forma de deditos y rayados. Se puede elaborar encurtidos de muchas vegetales y frutas, pero comercialmente se destacan los de pepinos (Martin *et al.*, 2006). No es común hacer encurtidos de papaya verde, aunque existen algunas recetas caseras en la India, para elaborar “achar” y “chutney” utilizando muchos condimentos como ají picante y colorantes como cúrcuma (Vimesh, 2012). Pero en países Latinoamericanos aún los consumidores optan por encurtidos como de los pepinos con especias escasas. Por consiguiente, sería bueno desarrollar encurtidos de papaya verde con características similares a de los pepinos. Algunos de los beneficios esperados a corto, mediano y largo plazo, con la producción de productos como encurtidos son: evitar la pérdida de la fruta; aprovechar las múltiples cualidades nutricionales; aumentar la demanda de la fruta; incorporar más campesinos en su cultivo; creación de nuevas fábricas que procesen los nuevos productos; generar nuevos puestos de trabajos que contribuyan al desarrollo económico de las áreas rurales y en general al país.

Esta publicación es la primera de una serie de informes sobre la diversificación de la utilización de la papaya. El objetivo específico de

este estudio fue el desarrollo de encurtidos de papaya verde-pintón en forma de deditos y rayados.

## **MATERIALES Y MÉTODOS**

Se entiende que el proyecto de papaya verde fue tratado como un proyecto de "Investigación y Desarrollo", en el ámbito de la tecnología de alimentos. Después de muchas pruebas de ensayo y error se logró encontrar las mejores recetas posibles, comprobando en el laboratorio los parámetros objetivos. También se realizaron una evaluación sensorial y la estimación de vida útil.

**Materia prima:** Toda la papaya de la variedad Chola Roja empleada en este estudio fue proporcionada por el Sr. Gilberto Alemán, quien es el mayor productor de papaya de esta variedad, en la región de San Carlos. Por otro lado, la finca del Sr. Alemán se encuentra cerca del laboratorio de Química, de la Facultad de Ciencias Naturales y Tecnología de la Universidad de Panamá, donde se realizaron las pruebas a pequeña escala y la planta piloto (Tropical de Alimentos, S. A.) donde se escaló la producción. También, se realizaron pruebas con otras variedades de papaya Sunrise solo y Tainung obtenidas del mercado público, por la calidad, textura y tamaño se decidió concentrar el trabajo con la variedad Chola roja, la cual presentó las características deseadas para los productos planteados.

**Equipos:** Se consiguieron equipos básicos de cocina en comercios locales de la ciudad de Panamá. Se diseñaron y fabricaron dos máquinas de acero inoxidable especialmente, para pelar y hacer los deditos de papaya con la colaboración del taller técnico especializado "El Preciso" de Panamá.

Se modificó un sellador de 12 pulgadas de Mercier Corporation, (Taiwán) para sellar las bolsas doblemente laminadas en vertical.

**Cristalería, ingredientes y bolsas plásticas doblemente laminadas:**

En la Distribuidora Jema, S. A. de Panamá, se obtuvieron toda la cristalería y reactivos (cloruro de calcio, glutamato de sodio, sorbato de potasio y ácido ascórbico) empleados en esta investigación. Productos Lux, S.A. de Panamá proporcionó el ácido acético al 12%. La mayoría de los condimentos se consiguieron en tiendas hindúes y chinas de la Ciudad de Panamá. Las bolsas plásticas doblemente laminadas de 22 cm x 13 cm (Stand-up Pouch) fueron obtenidas de Celloprint, S.A. de Panamá.

**El procedimiento**

El desarrollo del encurtido fue el primer producto a base de papaya verde en el proyecto de la diversificación del uso de papaya. Previamente, se realizaron algunos ensayos para determinar la forma del encurtido. Parecía que la forma cilíndrica como pequeños dedos era más deseable. Por ello, se buscó en el mercado un utensilio de cocina que pudiera cortar la pulpa de la papaya en esa forma y se encontró un descorazonador de manzana que brindaba el propósito. Para la aplicación industrial se diseñó un sistema mecánico para hacer los cilindros de papaya. El resto de la fruta fue rayada utilizando un equipo común de marca KitchenAid para hacer productos como "Cole-slaw" o "Sauerkraut" de EEUU.

El sirope (medio de empaque) preparado con vinagre y otros ingredientes era el factor más importante en la aceptación sensorial del producto. Para lograr un sabor exótico se agregaron diferentes clases de especias de la India y China. Los parámetros objetivos (pH y Brix) de los productos fueron determinados después de una semana y alcanzar un equilibrio dentro de pulpa (cilindro y rayado) y el sirope con los condimentos. Subsecuentemente, un panel de seis personas entrenadas con encurtidos evaluaron los productos organolépticamente. Se evaluaron factores como apariencia, sabor, acidez, textura y aceptación general usando escala hedónica de 1-5 donde 1= malo, 2= regular, 3= bueno, 4= muy bueno y 5 = excelente. Este procedimiento se ajustaba según los resultados que se lograban en cada prueba. Se manipularon varios factores como pH, tiempo de blanqueamiento, ingredientes, y la temperatura de sirope. Según las observaciones de productos comerciales, el encurtido ideal debía tener

un pH de 3.7-3.8, Brix de 20-21°, textura bien crujiente y la apariencia basado de 80% papaya verde y 20% papaya pintona.

**Preparación del sirope:** Se prepararon varios tipos de siropes que diferían en la porción y mezcla de ingredientes presentadas en el cuadro 1, sirope estándar con todos los condimentos (sirope 1), sirope sin especies (sirope 2), sirope con doble porción de canela (sirope 3), doble porción de cardamomo (sirope 4), doble porción de picante (sirope 5), doble porción de jengibre (sirope 6) o doble porción de clavo de olor (sirope 7). El procedimiento en general para la elaboración de estos siropes consistió en colocar y mezclar en un recipiente de acero inoxidable, todos los ingrediente, pesados, medidos o lavados, según el tipo de sirope a elaborar, con excepción del cloruro de calcio, glutamato de sodio, sorbato de potasio y ácido ascórbico, que fueron añadidos al final del cocimiento. Se dejó en reposo durante una hora. Luego, de este periodo de tiempo se coció por 2 minutos, después de alcanzar el punto de ebullición, se retiró del fuego, se añadieron los ingredientes restantes (cloruro de calcio, glutamato de sodio, sorbato de potasio y ácido ascórbico), se mezcló bien y se coló en caliente en un colador de tela fina. Para tener una idea sobre las características del sirope (medio de empaque), se midieron el volumen, peso, pH y Brix. La receta indicada en cuadro 1 resultó un sirope de 1,800 ml (2,100 g) con pH 3.0 y Brix 42°. Es importante monitorear estos parámetros del sirope que influyen en los productos finales.

**Preparación de la pulpa de papaya:** Se calentó a 95°C, una disolución acuosa al 1% en cloruro de sodio y 0.5% en cloruro de calcio, en un recipiente de acero inoxidable. Luego, se agregaron los deditos o rayados y se blanqueó por 6 minutos para los deditos y 3 minutos para los rayados de papaya, la temperatura se mantuvo a 90°C. Se enfrió la pulpa blanqueada con agua a temperatura ambiente y se coló para eliminar el exceso de agua.

Cuadro 1. Receta estándar para la elaboración de los siropes de los encurtidos de papaya verde-pintona.

Ingredientes	Cantidad
Agua (ml)	1,200
Azúcar (g)	800
Ácido acético al 12% (ml)	265
Sal (g)	49
Jengibre en polvo (g)	19
Ají Chombo (rojo) (g)	11
Canela en raja (g)	5
Cardamomo en semilla (g)	7
Clavo de olor entero (g)	9
Cloruro de Calcio (g)	1.7
Glutamato de sodio (g)	2.1
Sorbato de potasio (g)	1.2
Acido ascórbico (g)	1.3

**Empacado del encurtido:** El proceso de empacado se llevó a cabo en bolsas plásticas doblemente laminadas, donde se colocó 360 g de deditos (20% de papaya pintonas y 80% de papaya verde) y se agregó 230ml de sirope a 90°C y se selló. Después de 15 minutos para los deditos y 10 minutos para rayados de sellado, el producto se enfrió rápidamente con agua fría y/o en una cámara de refrigeración para mantener la textura crujiente.

**Determinación de pH y los grados Brix:** Según las pruebas anteriores se observaron que los deditos de papaya toman alrededor de una semana para alcanzar un equilibrio con el sirope. Los rayados usualmente se equilibran en 3-4 días. Por eso, la determinación de acidez (pH) y sólidos soluble (Brix) fueron determinados después de una semana de la elaboración de los productos. Se tomó la muestra y

homogenizó en una licuadora. Insertando el electrodo de Hanna Instruments (USA) dentro de la pulpa se midió el pH y el Brix fueron medidos con el Refractómetro de Fisher Scientific (USA).

**Evaluación sensorial de los encurtidos:** La evaluación sensorial la realizaron 6 panelistas, familiarizados en encurtidos. Los panelistas evaluaron en los encurtidos de papaya la apariencia, el olor, el sabor, la acidez, la textura y la aceptación general, usando una escala hedónica de 1-5 donde 1= malo, 2= regular, 3= bueno, 4= muy bueno y 5 = excelente.

**Determinación de la vida útil de los encurtidos:**

En el proyecto de la diversificación de la utilización de la papaya, el encurtido en forma de deditos, era el primer producto desarrollado. Se decidió comenzar un estudio de vida útil con 70 bolsas de deditos, con todos los condimentos (sirope 1). Según observaciones anteriores, el oscurecimiento de los deditos durante el almacenamiento era el primer indicador de deterioro de la calidad. Subsecuentemente empeoraba la textura y sabor de los productos. Por eso se decidió por “la apariencia” como el factor principal para determinar la vida útil. En vez de hacer un estudio acelerado de la vida útil (Ellis & Man, 2000), se realizó una evaluación directa manteniendo 20 bolsas en un área con aire acondicionado ( $22^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ ), semejante a un supermercado típico de Panamá y 50 bolsas bajo refrigeración ( $4^{\circ}\text{C} \pm 1^{\circ}\text{C}$ ). Después de 3 meses, se abrieron 2 bolsas del área con aire acondicionado y otros 2 de nevera, para evaluar la apariencia. Subsecuentemente, las muestras fueron evaluadas cada mes hasta que observaron un oscurecimiento indeseable. Por ser un producto de bajo pH (menos de 4.0) no se preocuparon por problemas bacteriológicas (21CFR 114.3). Además, el sirope contenía sorbato de potasio como un conservante antimicrobiano (Kmieciak & Lisiewska, 1994).

## RESULTADOS Y DISCUSION

Los parámetros objetivos de acidez y sólidos solubles de los encurtidos de papaya verde en formas deditos y rayados, se presentan en Cuadro 2. Básicamente no se observó ninguna diferencia significativa en el pH o Brix por las variaciones de los condimentos. Todos los valores de pH eran bajo 4.0 indicando un riesgo mínimo del crecimiento de los microorganismos indeseables en los productos.

Los valores de evaluación sensorial por seis panelistas fueron analizados estadísticamente (ANOVA). El cuadro 3 presenta los resultados de evaluación sensorial de los deditos de papaya empacado en siropes variando las especias. Casi todos los productos recibieron buena evaluación (valores >3) en todos los factores. Los panelistas tuvieron dificultad de distinguir los atributos de productos con variaciones de especias. Eso significa que habrá bastante flexibilidad en mercadear este producto. En caso de aceptación general, los panelistas prefirieron producto con todos los condimentos o con doble de canela. El producto con doble cantidad de jengibre (#5) era relativamente menos deseado.

Los encurtidos de papaya rayada demostraron características similares a los deditos y así no fue sometido a una evaluación formal con las panelistas.

Al respecto de cómo presentar el producto al público, la mayoría de los panelistas sugirieron presentar los deditos como un aperitivo acompañando con una bebida alcohólica. En caso de rayado, la sugerencia fue con hamburguesa o salchichas (Fig. 1).

**Vida útil:** Como se menciona en la metodología, la característica sensorial más importante de vida útil era el oscurecimiento del producto. Durante los primeros 3 meses los productos empacados en bolsas plásticas tenían apariencia normal en el anaquel con aire acondicionado ( $22^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ ) y dentro de la nevera ( $4.4^{\circ}\text{C} \pm 1^{\circ}\text{C}$ ). Siguiendo las observaciones cada mes, después de 8 meses se observó una tendencia de oscurecimiento del producto en el anaquel de  $22^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ , pero los deditos en la nevera eran normales sin ninguna señal de deterioro. Así que la vida útil de los deditos en la temperatura

controlada (22°C) fue 7 meses. El oscurecimiento de los productos (Eskin, 1990) ocurre por varios tipos de reacciones incluyendo Maillard entre azúcar y amino ácidos. La presencia del oxígeno y la luz también provocan oscurecimiento (Friedman, 1996). Por otro lado se descarta que el oscurecimiento sea por enzimas debido a que la pulpa de papaya fue blanqueada (Fenema, 2010).

Cuadro 2. pH y Brix de los encurtidos de papaya verde en forma de deditos o rayados con variaciones de condimentos.

# Sirope	Deditos		Rayados	
	pH	Brix	pH	Brix
1(Todos condimentos)	3.7	21	3.8	20
2(Sin condimentos)	3.6	21	3.7	19
3(Doble Canela)	3.6	22	3.8	21
4(Doble Cardamomo)	3.7	20	3.7	20
5(Doble Aji chombo)	3.8	20	3.9	19
6(Doble Jengibre)	3.6	21	3.7	20
7(Doble Clavo de olor)	3.6	20	3.6	20



Fig. 1. Presentación culinaria de deditos de papaya en aperitivo (A) y rayados en hamburguesa (B).

**Cuadro 3. Evaluación sensorial de encurtidos de Deditos de Papaya verde en siropes variando en condimentos (indicado en Cuadro 2) #.**

Sirope	Apariencia	Olor	Sabor	Acidez	Textura	Aceptación general
1	4.33 ± 0.82 <sup>a</sup>	3.50 ± 0.84 <sup>a</sup>	3.67 ± 0.82 <sup>a</sup>	3.67 ± 0.52 <sup>a</sup>	4.50 ± 0.84 <sup>a</sup>	4.00 ± 0.63 <sup>a</sup>
2	4.17 ± 0.75 <sup>a</sup>	3.16 ± 0.40 <sup>a</sup>	3.00 ± 0.89 <sup>a</sup>	3.17 ± 0.98 <sup>a</sup>	4.17 ± 0.75 <sup>a</sup>	3.33 ± 0.52 <sup>b</sup>
3	4.00 ± 0.63 <sup>a</sup>	3.83 ± 0.75 <sup>a</sup>	3.50 ± 0.55 <sup>b</sup>	3.83 ± 0.75 <sup>a</sup>	4.17 ± 1.17 <sup>a</sup>	3.83 ± 0.41 <sup>a</sup>
4	3.67 ± 1.03 <sup>a</sup>	3.33 ± 0.52 <sup>a</sup>	3.33 ± 0.52 <sup>a</sup>	3.00 ± 0.63 <sup>b</sup>	3.83 ± 1.47 <sup>a</sup>	3.17 ± 0.41 <sup>b</sup>
5	3.83 ± 0.75 <sup>a</sup>	3.67 ± 0.82 <sup>a</sup>	2.83 ± 0.98 <sup>a</sup>	2.67 ± 1.21 <sup>b</sup>	4.00 ± 0.89 <sup>a</sup>	2.83 ± 0.75 <sup>c</sup>
6	3.37 ± 0.82 <sup>b</sup>	3.00 ± 1.09 <sup>a</sup>	3.67 ± 1.03 <sup>a</sup>	3.50 ± 1.05 <sup>a</sup>	3.83 ± 1.47 <sup>a</sup>	3.50 ± 0.84 <sup>a</sup>
7	3.83 ± 0.75 <sup>a</sup>	3.67 ± 0.82 <sup>a</sup>	3.67 ± 1.03 <sup>a</sup>	3.83 ± 0.75 <sup>a</sup>	4.33 ± 1.21 <sup>a</sup>	3.83 ± 0.75 <sup>a</sup>

# Los datos son promedio de seis panelistas ± la desviación estándar en una escala hedónica de 1-5 donde 1= malo y 5 = excelente.

\* Los parámetros de cada columna son diferentes significativamente si tienen diferente letra ( $p < 0.05$ ).

Dentro de la nevera, los productos no demostraron ninguna descoloración indicando la protección por la baja temperatura y la ausencia de luz. Al cabo de un año, los productos en la nevera mantuvieron aún sus atributos sensoriales. En el mes No. 20, el sirope del producto en la nevera desarrolló un leve oscurecimiento. Pero la textura de los deditos era aún crujiente. Para los consumidores, se puede decir que la vida útil de los deditos de la papaya en la nevera fueron 19 meses. El Cuadro 4 presenta la vida útil de los deditos de papaya verde bajo diferentes condiciones de almacenamiento. La vida útil de los encurtidos obtenidos en este estudio es similar a los productos en el mercado.

**Cuadro 4.** Vida útil de encurtidos de deditos de papaya verde en anaquel aire acondicionado y en la nevera.

Condición de almacenamiento	Vida útil (meses)
22°C ± 2°C (aire acondicionado)	7
4.4°C ± 1°C (nevera)	19

### **CONCLUSIÓN**

Según los datos y las observaciones generales, es factible fabricar los encurtidos de papaya en forma de deditos y/o rayados. Los productos tienen buena aceptación por consumidores potenciales. Es interesante notar, que durante la evaluación sensorial, las panelistas no detectaron diferencias significantes ( $p < 0.5$ ) entre las muestras a pesar de variaciones en los condimentos. Eso indica que la pulpa de papaya tiene gran capacidad de amortiguar los diferentes sabores ofreciendo flexibilidad a diferentes paladares. La vida útil de los productos era similar al de los encurtidos del pepino, y así podrán distribuirse a través de misma cadena de comercialización. El hecho, de fabricar los encurtidos en diferentes formas, deditos y rayados, facilita el uso integral de toda la fruta sin desecho. Obviamente es una opción viable de diversificar el uso actual de la papaya de variedad, "Chola roja", que se produce mucho en Panamá. Es conocido que la fruta de papaya tiene gran valor nutricional. La introducción en el mercado en forma de productos novedosos, no es tarea fácil, por lo que será importante realizar campañas de comercialización que promuevan estos productos.

### **AGRADECIMIENTOS**

Este estudio fue patrocinado por el Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA) a través del Ministerio de Desarrollo Agropecuario (MIDA) de Panamá. Agradecemos la ayuda logística del Dr. Enrique Murillo del Instituto de Alimentación y Nutrición (IANUT) de la Universidad de Panamá y de la Sra. Arietza

Castro de Tropical de Alimentos, S.A. de Penonomé durante la ejecución de este proyecto.

## **REFERENCIAS**

Ellis, M.J. & C.D. Man. 2000. The Methodology of Shelf-life Determination. *In: Man, C.D. y A. Jones (Eds). Shelf-life Evaluation of Foods*, 2ª ed. Aspen Publishers, Inc. Gaithersburg. pp. 28-31.

Eskin, N.A.M. 1990. Biochemistry of food processing: Browning reactions in foods. *In: Biochemistry of Foods*, 2ª ed. Academic Press. London. pp. 240-295.

Espin, N.F. & M.N. Islam. 1998. Stabilization of papain from papaya peels. *Food Science and Technology International*, 4: 179-187.

Fenema, O. 2010. Química de los alimentos. 3ª ed. Editorial Acribia, España. pp. 265-270.

Friedman, M. 1996. Food browning and its prevention: An overview. *J. Agr. Food Chem* 44(3): 631-653.

Gajanana, T.M., M. Sudha, A.K. Saxena & V. Dakshinamoorthy. 2010. Post-harvest handling, marketing and assessment of losses in papaya. *Acta Hort.* (ISHS) 851:519-526.

Guzmán, D.G. 1998. Guía para el cultivo de papaya. Ministerio de Agricultura y Ganadería. Serie: Cultivos no tradicionales. San José, Costa Rica. Imprenta Nacional. Nº 4. pp. 15-32.

Islam, M.N. 2000. Diversificación en la utilización de Papaya. VI Congreso Nacional de Ciencia y Tecnología, 30 de nov – 2 de dic., Panamá.

Islam, M. N. 2005. Papaya – La manzana del trópico. *Ingeniería de Alimentos*, 4:20-21.

Kmiecik, W. & Z. Lisiewska. 1994. The influence of potassium sorbate addition on the quality of pickled zucchini fruit. *Rocz Panstw Zakl Hig.* 45(4):301-309.

Martin, L., S. Thomsbury & T. Nagai. 2006. National and International Factors in Pickle Markets. Agricultural Economics Report No. 628. Michigan State University, East Lansing, MI.

Vimesh, R. 2012. Green Papaya Pickle/Raw Papaya Achar. Achu's Amma's Kitchen.

<http://achusammaskitchen.blogspot.com/2012/03/pappaya-picklepappaya-acharomakka-achar.html>

*Recibido octubre de 2012, aceptado marzo de 2013.*



## RIQUEZA, DIVERSIDAD Y ABUNDANCIA DE ANFIBIOS EN EL BOSQUE NUBOSO DE CERRO AZUL, SECTOR ALTO CHAGRES, PARQUE NACIONAL CHAGRES, PANAMÁ

Ángel Sosa<sup>1</sup> y Jorge Guerrel<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Sociedad Mastozoológica de Panamá, Apartado 0835-00680, Panamá, República de Panamá, e-mail: angelsosa1983@yahoo.com

<sup>2</sup>Smithsonian Tropical Research Institute, Apartado 0843-03092, Balboa, Ancón Panamá, República de Panamá.

### RESUMEN

El objetivo de este estudio fue determinar el estado de conservación del bosque nuboso de Cerro Azul, considerando la riqueza de especies de anfibios existentes. El muestreo se realizó por un periodo de seis meses, desde febrero de 2009 hasta julio del mismo año. Los muestreos fueron llevados a cabo mediante la técnica de búsqueda por transectos, realizando incursiones diurnas y nocturnas a lo largo de fuentes naturales de agua (ríos y quebradas), ubicadas en los tres sitios que fueron seleccionados para monitorear. La abundancia registrada de anfibios fue de 661 individuos, agrupados en dos órdenes (Anura y Caudata), 9 familias, 15 géneros y 26 especies. Se obtuvo una riqueza de 26 especies de anfibios, la cual presentó un patrón estacional, siendo los meses con menor precipitación los que aportaron el mayor número de especies. El área de Cerro Azul presentó el mayor índice de diversidad durante el periodo de transición, entre la estación seca y la estación lluviosa. Al aplicar el análisis de viabilidad ecológica (AVE) se determinó que el estado de conservación del bosque nuboso para Cerro Azul, basado en la riqueza de especies de anfibios, se encuentra en una condición de Pobre. Los rangos de abundancia indicaron que más de la mitad de las especies de anfibios registradas (62%) disminuyeron su abundancia desde el último inventario realizado hace 15 años.

### PALABRAS CLAVES

Anfibios, Bosque Nuboso, Análisis de Viabilidad Ecológica, Estado de Conservación y Riqueza de Especies.

## **ABSTRACT**

The aim of this study was to determine the conservation status of the cloud forest of Cerro Azul, considering the wealth of prevailing amphibian species. Sampling was done over a period of six months, from February 2009 until July of that year. Samplings were carried out using transect as search technique day and night raiding along natural water sources (rivers and streams), located at the three sites were selected for monitoring. Amphibian abundance was 661 individuals, subdivided into two orders (Anura and Caudata), 9 families, 15 genera and 26 species. A richness of 26 species of amphibians was obtained, which showed a seasonal pattern, with the months with lower precipitation those with the greatest number of species. The Cerro Azul area had the highest diversity index during the transition period between the dry season and the rainy season. Applying ecological feasibility analysis (AVE) it was determined that the state of conservation of Cerro Azul cloud forest, based on species richness of amphibians, is in a poor condition. Abundance ranges indicated that more than half of all amphibian species recorded (62%) decreased their abundance since the last inventory made 15 years ago.

## **KEYWORDS**

Amphibians, Cloud Forest, Ecological Viability Status and Species Richness.

## **INTRODUCCIÓN**

En el mundo existen pocas regiones que mantienen tanta diversidad biológica en un área tan pequeña como lo es el Istmo de Panamá, en donde están representados con un 4% los anfibios y reptiles del mundo (Rand & Myers, 1990). En la actualidad se reportan 199 especies de anfibios para Panamá (Jaramillo *et al.*, 2010), de las cuales 62 especies habitan en los bosques nubosos del Alto Chagres (Samudio *et al.*, 2008). En particular, 56 especies han sido reportadas en 10 sitios en el área montañosa de Cerro Azul – Cerro Jefe (Ibáñez *et al.*, 1999a) en el Alto Chagres.

Rand & Myers (1990) señalan que los anfibios de montaña, al igual que los de tierras bajas, son una mezcla de especies de Centro y Suramérica, pero con más endemismo. Un ejemplo de esto son los bosques nubosos del Alto Chagres, que conservan una buena representación de la fauna herpetológica endémica del país (Ibáñez, 2001).

Este grupo de animales amerita una atención especial dada la crítica disminución en sus poblaciones (Lips, 1999). Dicha situación es

preocupante, ya que los anfibios podrían ser bioindicadores de cambios ambientales, principalmente debido a las características de su piel e historia de vida (Ibáñez *et al.*, 1999b).

El propósito de este estudio es contribuir con información sobre las poblaciones de anfibios, al monitoreo de anfibios de los bosques nubosos del Alto Chagres, llevado a cabo por la Sociedad Mastozoológica de Panamá (SOMASPA) dentro del Proyecto de Monitoreo de la Biodiversidad del Alto Chagres. El indicador para el monitoreo de los anfibios del bosque nuboso es el número de especies de anfibios asociados a las quebradas o riachuelos y al bosque en este ecosistema montano. Este es un indicador del estado de conservación tanto de los anfibios como de estos bosques a elevaciones iguales o mayores a 650 msnm (Candanedo & Samudio, 2005).

## **MATERIAL Y MÉTODOS**

### **Área de Estudio**

El estudio se realizó en la región del Alto Chagres, específicamente en el área de Cerro Azul. El Alto Chagres se localiza hacia la vertiente del Caribe panameño ocupando parte de las provincias de Panamá y Colón y de la Comarca Kuna Yala. Está conformado por tres áreas protegidas a saber; los Parques Nacionales Chagres y Portobelo y el Área Silvestre Corregimiento Narganá No. 1, ocupando una superficie aproximada de 155.020 km<sup>2</sup>. El área de Cerro Azul, se localiza dentro del Parque Nacional Chagres, encontrándose a una altura de 665 msnm, está ubicado en la zona de vida llamada bosque pluvial premontano, según la clasificación de Holdridge (Departamento de Cartografía del Catastro Rural 1970), su precipitación promedio anual varía entre 2500 y 3500 mm en las elevaciones más altas y la temperatura promedio de 20 °C. Se caracteriza por presentar un bosque secundario relativamente joven, siendo un área que en la actualidad se encuentra sumamente perturbada debido a diversas actividades antrópicas, tales como producción avícola y proyectos de uso residencial.

### **Colecta, Identificación y Toma de Datos**

Los muestreos fueron realizados entre los meses de febrero y julio de 2009, mediante el recorrido de transectos localizados en cada uno de los sitios de muestreos (1 transecto/sitio). Se escogieron tres sitios de muestreo localizados en el bosque nuboso de Cerro Azul, región del Alto Chagres, los cuales son: Río Indio (Sitio 1, inicio 9.20361° N 79.39745° W; final 9.20388° N 79.39606° W), Quebrada Sin Nombre N° 1 que se encuentra cruzando el Río Indio (Sitio 2, inicio 9.20228° N 79.39863° W; final 9.20345° N 79.39982° W) y Quebrada Sin Nombre N° 2 ubicada detrás de La estación de ANAM de Cerro Azul (Sitio 3, inicio 9.20087° N 79.39848° W; final 9.20062° N 79.39691° W). Dichos transectos tenían una longitud aproximada de 200 metros cada uno, estando ubicados a una altura entre los 600 y 700 msnm. Los registros de las coordenadas geográficas (WGS 84, NAD 27) y de las alturas de los sitios de muestreos fueron determinados mediante el uso de un sistema de posicionamiento global (GPS). Cabe mencionar que, todos los transectos que se emplearon en este trabajo, son utilizados por la Sociedad Mastozoológica de Panamá (SOMASPA) para el Monitoreo de Anfibios del Alto Chagres.

En cada muestreo participaron dos observadores, quienes registraron todos los individuos observados y escuchados de las especies presentes en un área aproximada de un metro de ancho, a lo largo de los 200 metros del transecto localizado en cada sitio de muestreo. Las observaciones se realizaron durante el día de 8:00 a.m. a 10:00 a.m. y en la noche de 7:00 p.m. a 9:00 p.m.

Se le tomaron fotografías a los ejemplares y se capturó un individuo por especie, los cuales fueron depositados en el Museo de Vertebrados de la Universidad de Panamá. Esta entrega, se realizó con la finalidad de documentar las especies registradas, lo cual, según Heyer *et al.* 1994, es sumamente importante para dar credibilidad a estudios sobre biodiversidad e inventarios biológicos como el presente. Los ejemplares que no pudieron ser identificados en campo, fueron capturados para su posterior identificación en los laboratorios de la Escuela de Biología, Universidad de Panamá.

### **Análisis de la Información**

Se utilizó la clasificación taxonómica para anfibios de Jaramillo *et al.* (2010), siendo esta la revisión más actualizada a nivel mundial de este grupo taxonómico en Panamá.

Los índices que se obtuvieron fueron el de Riqueza de Especies (S), Diversidad de Shannon-Wiener (H'), Equidad de Pielou (J') y el de Abundancia Relativa; empleando los programas estadísticos *BioEstat* y *Past*.

Los rangos de abundancia de las especies registradas fueron determinados de acuerdo a las categorías establecidas por Rand & Myers (1990): Común = se pueden encontrar muchos individuos; Usual = se pueden encontrar buscando en el hábitat y en la estación del año apropiados; Infrecuente = impredecible y Rara = raramente se observa.

El análisis de viabilidad ecológica (AVE), empleado para determinar el estado de conservación del bosque nuboso de Cerro Azul, se calculó tomando como indicador el número de especies de anfibios presentes/gira. Los rangos de estado de conservación del bosque nuboso se categorizaron empleando el método propuesto por Candanedo & Samudio (2005) de la siguiente forma: Pobre =  $\leq 17$  especies; Regular = 18-22 especies; Bueno = 23-26 especies y Muy Bueno =  $\geq 27$  especies.

Se empleo el coeficiente de correlación de Pearson, para establecer si existe o no correlación entre la riqueza de especies de anfibios y la precipitación lluviosa, utilizando el programa estadístico *BioEstat*.

## **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

### **Esfuerzo de Muestreo**

El esfuerzo total de muestreo para el área de Cerro Azul durante el periodo de muestreo fue de 236.84 horas/persona, dividido en 119.68 horas/persona de esfuerzo diurno y 117.16 horas/persona de esfuerzo nocturno. El esfuerzo de muestreo realizado fue mayor al obtenido en dos años por el monitoreo de anfibios del bosque nuboso del Alto

Chagres realizado por la Sociedad Mastozoológica de Panamá en Cerro Azul (Samudio *et al.*, 2008).

### **Riqueza de Especies y Diversidad Taxonómica**

A partir de los muestreos realizados durante seis meses (febrero a julio), se encontró para el área de Cerro Azul, un total de 26 especies de anfibios (incluyendo las especies registradas por canto, *Cochranella granulosa* y *Nelsonophryne aterrima*), agrupadas en 15 géneros, nueve familias y dos órdenes (Cuadro 1). Esta riqueza representa el 45% de las especies de anfibios reportados para esta área (Ibáñez *et al.*, 1994). La riqueza de anfibios asociados a hábitats de quebradas y ríos obtenida es similar a la reportada en los trabajos de Jaramillo & Ibáñez (1997a, 1997b, 1997c) durante el monitoreo de la Cuenca del Canal, en los cuales se indica la presencia de 25, 26 y 35 especies de anfibios para los sectores de Quebrada Las Pavas, Cerro Brewster y Cerro Bruja, respectivamente.

Se registró para Cerro Azul la especie *Diasporus quidditus*, la cual no había sido listada anteriormente en Cerro azul, y que formaba parte del complejo de especies denominado Grupo Diastema, reportado por Ibáñez *et al.* (1999a) para Cerro Azul, identificando la especie como *Diasporus diastema*. Lynch (2001) describe y separa la especie *Diasporus quidditus* del Grupo Diastema, cuyo rango de distribución va desde el área Central y Este de Panamá hasta el Oeste de Colombia.

*Scinax rubra*, es otra especie que es observada por primera vez en Cerro Azul, la cual era considerada como ausente en el complejo montañoso Cerro Jefe - Cerro Azul por Ibáñez *et al.* (1994; 1999a). Este nuevo registro puede ser debido a un mayor esfuerzo de muestreo en comparación a investigaciones pasadas o que en años anteriores esta especie no estaba presente en el área y se está desplazando a mayores altitudes en busca de mejores condiciones ambientales, comportamiento este que puede estar influenciado por causas naturales o por el cambio climático (Pounds *et al.*, 1999; Parmesan & Yohe 2003).

Cuadro 1. Riqueza de especies y abundancia relativa de las especies de anfibios en el bosque nuboso de Cerro Azul, febrero – julio 2009.

Taxa	Especies	Nº de individuos	Abundancia relativa (%)	Rango de Abundancia
<b>ANURA</b>				
<b>Bufonidae</b>				
	<i>Chaunus marinus</i>	4	0.61	Infrecuente
	<i>Rhaebo haematiticus</i>	1	0.15	Rara
	<i>Rhinella alata</i>	1	0.15	Rara
<b>Centrolenidae</b>				
	<i>Cochranella euknemos</i>	3	0.45	Infrecuente
	<i>Cochranella granulosa</i>	13	1.97	Infrecuente
	<i>Espadarana prosoblepon</i>	19	2.87	Usual
	<i>Hyalinobatrachium colymbiphylum</i>	24	3.63	Usual
	<i>Hyalinobatrachium fleischmanni</i>	3	0.45	Infrecuente
	<i>Sachatamia albomaculata</i>	43	6.51	Común
<b>Craugastoridae</b>				
	<i>Craugastor crassidigitus</i>	11	1.66	Infrecuente
	<i>Craugastor fitzingeri</i>	22	3.33	Usual
<b>Dendrobatidae</b>				
	<i>Colostethus panamensis</i>	1	0.15	Rara
	<i>Colostethus pratti</i>	116	17.55	Común
	<i>Silverstoneia flator</i>	29	4.39	Usual
	<i>Silverstoneia nubicola</i>	16	2.42	Usual
<b>Eleutherodactylidae</b>				
	<i>Diasporus diastema</i>	65	9.83	Común
	<i>Diasporus quiddinus</i>	1	0.15	Rara
	<i>Diasporus vocator</i>	182	27.53	Común
<b>Hylidae</b>				
	<i>Scinax rubra</i>	1	0.15	Rara
<b>Microhylidae</b>				
	<i>Nelsonophryne aterrima</i>	6	0.91	Infrecuente
<b>Strabomantidae</b>				
	<i>Pristimantis cerasinus</i>	1	0.15	Rara
	<i>Pristimantis cruentus</i>	78	11.8	Común
	<i>Pristimantis gaigei</i>	7	1.06	Infrecuente
	<i>Pristimantis ridens</i>	8	1.21	Infrecuente
	<i>Pristimantis taenianus</i>	4	0.61	Infrecuente
<b>CAUDATA</b>				
<b>Plethodontidae</b>				
	<i>Oedipina parvipes</i>	2	0.31	Infrecuente
<b>Total</b>		<b>661</b>	<b>100</b>	
<b>Ordenes: 2</b>		<b>Familias: 9</b>		<b>Géneros: 15 y Especies: 26</b>

La rana *Nelsonophryne aterrima*, por ser un animal fosorio, nunca fue observada directamente, sin embargo su presencia en los transectos pudo ser confirmada con la ayuda de grabaciones de su canto. Savage (2002) señala que el canto de *Nelsonophryne aterrima* es desconocido, pero se especula que probablemente tiene un llamado de advertencia.

Se observó una especie de salamandra (*Oedipina parvipes*), una de las tres especies reportadas para esta área por Ibáñez *et al.* (1999a). Este grupo de anfibios es difícil de observar en campo al igual que las cecilias (Orden Apoda), porque la mayor parte del tiempo están enterradas en la hojarasca, el humus o el suelo (Savage, 2002) (Cuadro 1).

El número de especies por familias es similar a los obtenidos por Ibáñez *et al.* (1994; 1999a), aunque este estudio no incluyó transectos en todos los hábitats disponibles. La diferencia más notable en la riqueza de especies por familia se observó en la familia Hylidae, donde Ibáñez *et al.* (1994; 1999a) reportan quince especies en Cerro Azul, comparado con una especie (*Scinax rubra*), reportada en este muestreo. Los miembros de esta familia generalmente prefieren cuerpos de agua lénticos para su reproducción, tales como charcos, lagunas y pantanos, hábitats que están ausentes en los sitios de estudio (Duellman & Trueb, 1994).

La familia Centrolenidae obtuvo una riqueza alta de especies en los tres sitios de estudio y Cerro Azul, debido a que los hábitats que se seleccionaron para los transectos son los preferidos por esta familia para depositar sus huevos, ya sea sobre las plantas, rocas u otro sustrato al lado o arriba de los mismos (Kubicki, 2007). Las observaciones de Duellman & Burrowes (1989), señalan que la mayor diversidad de centrolénidos se da en los bosques montañosos.

### **Tendencia de la Riqueza de Especies**

A través de los muestreos realizados en la primera mitad del año 2009, la tendencia en cuanto a la riqueza de especies de anfibios en el área de estudio de Cerro Azul fue en aumento. Desde siete especies registradas durante el mes de febrero hasta alcanzar un total de 26 especies de anfibios en julio de 2009 (Figura 1). Igual situación ocurrió en los sitios de muestreos, en donde la riqueza de especies registrada al inicio de los muestreos, fue incrementándose a través de los meses de

monitoreo producto de la acumulación de nuevas especies. La curva de acumulación de especies para Cerro Azul probablemente no esté completa, ya que Myers (1972) señala que para un inventario de herpetofauna, el esfuerzo debe hacerse en cada una de las regiones fisiográficas y de vegetación más importante y en partes diferentes de cualquier gradiente climático.

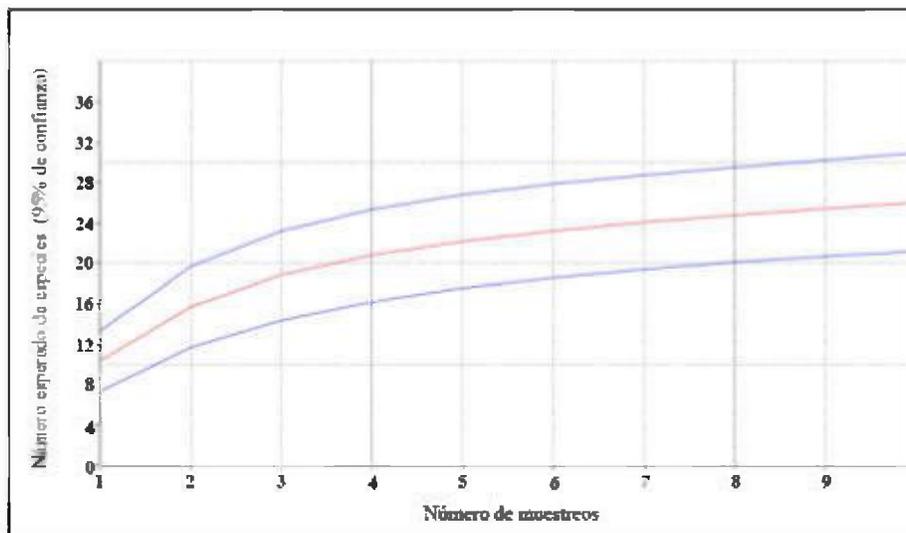


Fig.1. Curva de acumulación de especies de la riqueza observada y la riqueza estimada (95% de confianza), período febrero – julio de 2009 en el bosque nuboso de Cerro Azul y los tres sitios de estudio.

### Diversidad

Para determinar la diversidad en los sitios de muestreos, se utilizó el índice de diversidad de Shannon-Wiener ( $H'$ ), el cual no sólo toma en cuenta el número de especies, sino también la abundancia relativa de cada una de las especies incluidas en el análisis. Como resultado, se obtuvo que los mayores índices de diversidad fueron reportados para los sitios Río Indio y Quebrada Sin Nombre N° 2, con valores muy similares de  $H'=2.35$  y  $H'=2.12$  respectivamente. Cabe mencionar que, la mayor homogeneidad con relación a la distribución de los individuos entre las especies, también la presentaron Río Indio con un índice de equitatividad de  $J'=0.85$  y Quebrada Sin Nombre N° 2, la cual reportó una equitatividad de  $J'=0.69$  (Cuadro 2).

En el área de estudio Cerro Azul se obtuvo, durante la estación seca un índice de diversidad de  $H' = 1.72$ , en el periodo de transición este índice aumento notablemente ( $H' = 2.51$ ) y en la estación lluviosa disminuyó ( $H' = 1.95$ ) (Cuadro 4). Igual situación se presentó para los tres sitios muestreados, donde Río Indio alcanzó los mayores índices de diversidad durante los tres periodos de muestreo (Cuadro 3).

Cuadro 2. Valores de diversidad y equitatividad de las especies de anfibios en los sitios de muestreo, periodo de febrero a julio de 2009.

Sitios de Muestreo	H'	J'	Riqueza de Spp.
Río Indio	2.35	0.85	17
Quebrada Sin Nombre N° 1	1.74	0.57	21
Quebrada Sin Nombre N° 2	2.12	0.69	21
Cerro Azul	2.35	0.72	26

Cuadro 3. Índices de diversidad y equitatividad de las especies de anfibios durante la estación seca, transición y estación lluviosa del año 2009.

		Río Indio	Qda. Sin Nombre N° 1	Qda. Sin Nombre N° 2	Cerro Azul
<b>Estación seca</b>	H'	1.87	1.16	1.52	1.72
	J'	0.85	0.48	0.61	0.63
	Abundancia	41	174	110	309
	Riqueza	9	11	12	15
<b>Transición</b>	H'	2.11	2.07	2.31	2.51
	J'	0.88	0.73	0.80	0.80
	Abundancia	54	144	112	297
	Riqueza	11	17	18	23
<b>Estación Lluviosa</b>	H'	1.38	0.95	1.56	1.95
	J'	1	0.86	0.96	0.81
	Abundancia	4	5	6	28
	Riqueza	4	3	5	11

Los tres sitios de estudio y el área de Cerro Azul, presentan índices de diversidad (Cuadros 2 y 3), similares a los reportados por el Monitoreo del Alto Chagres en Cerro Azul durante los años 2007 y 2008 (Samudio *et al.* 2008).

### **Abundancia**

Para las 26 especies identificadas se registró un total de 661 individuos. Las especies más abundantes fueron *Diasporus vocator* con 27.53% (182 individuos), *Colostethus pratti* con 17.55% (116 individuos), *Pristimantis cruentus* con 11.8% (78 individuos), *Diasporus diastema* con 9.83% (65 individuos), *Sachatamia albomaculata* con 6.51% (43 individuos), *Silverstoneia flotator* con 4.39% (29 individuos), *Hyalinobatrachium colymbiophyllum* con 3.53% (24 individuos) y *Craugastor fitzingeri* con 3.32% (22 individuos) (Cuadro 1).

En total, 10 especies (38%) fueron catalogadas como usuales o comunes para el área de estudio (Cuadro 1). Las especies que resultaron con menor abundancia o más raras fueron: *Rhinella alata*, *Rhaebo haematiticus*, *Colostethus panamensis*, *Diasporus quidditus*, *Scinax rubra* y *Pristimantis cerasimus* con un individuo cada una (Cuadro 1).

Comparando los rangos de abundancia obtenidos en este muestreo con el inventario de Ibáñez *et al.* (1994), podemos afirmar que más de la mitad (62%) de las especies de anfibios disminuyeron su abundancia, un 15% se mantiene igual, 11.5% aumentaron y finalmente otro 11.5% son nuevos registros (Cuadro 1).

Es importante señalar que algunas especies; como por ejemplo *Chaunus marinus* y *Diasporus quidditus* fueron consideradas raras o infrecuentes durante el muestreo, aunque en otros hábitats resultarían ser más abundantes. Peachmann *et al.* (1991) y Peachmann & Wilbur (1994), señalan que entre dos muestreos una disminución de abundancia no necesariamente es una indicación de declinación poblacional a largo plazo. Esto puede deberse a que bajo condiciones normales el tamaño de las poblaciones de anfibios puede fluctuar.

Las especies que obtuvieron una mayor abundancia de individuos: *Diasporus vocator*, *Colostethus pratti*, *Pristimantis cruentus*, *Diasporus diastema*, *Sachatamia albomaculata*, *Silverstoneia flotator*, *Hyalinobatrachium colymbiphylum* y *Craugastor fitzingeri* (Cuadro 1), son igualmente las especies reportadas por Ibáñez *et al.* (1994) y Samudio *et al.* (2008) como algunas de las especies más abundantes en Cerro Azul.

Las familias Eleutherodactylidae y Dendrobatidae, que obtuvieron el mayor número de individuos, son las mismas reportadas por Ibáñez *et al.* (1994) y Samudio *et al.* (2008) como las de mayor abundancia en el área de estudio.

Las observaciones en campo indican que las poblaciones de anfibios de Cerro Azul están en buen estado, pero probablemente esta condición no se mantendrá por mucho tiempo, debido a que el hongo quitrido ya está presente en algunos de los bosques nubosos del Parque Nacional Chagres (Ibáñez, 2009). No obstante, la ausencia de reportes sobre la presencia del hongo quitrido en las poblaciones de anfibios de Cerro Azul, no permite afirmar si estos cambios en la abundancia de individuos son el resultado de una declinación de las poblaciones debido a este patógeno o a factores antropogénicos.

### **Estado de Conservación del Bosque Nuboso y Análisis de Viabilidad Ecológica**

El estado de conservación del bosque nuboso de Cerro Azul y los tres sitios de estudio basado en la riqueza de especies de anfibios durante el año 2009 fue calificado como "Pobre", siendo igual al obtenido por el Monitoreo de Anfibios del Alto Chagres en Cerro Azul durante los años 2007 y 2008 (Samudio *et al.*, 2008) (Cuadro 4). Es importante señalar que es necesario emplear información de más indicadores como abejas de las orquídeas, murciélagos e insectos acuáticos, entre otros; para determinar el estado de conservación del bosque nuboso de Cerro Azul.

Cuadro 4. Análisis de viabilidad ecológica de los sitios de muestreo y el área de estudio utilizando el número de especies de anfibios presente/gira.

Mes	Rio Indio	Quebrada Sin Nombre N° 1	Quebrada Sin Nombre N° 2	Cerro Azul
Febrero	6	5	3	9
Marzo I	3	6	6	10
Marzo II	7	10	1	14
Abril	7	9	12	15
Mayo I	5	6	6	8
Mayo II	4	5	7	9
Junio I	6	2	8	10
Junio II	2	5	5	11
Julio I	2	3	3	6
Julio II	5	3	5	10
<b>Promedio de especies por gira</b>	5	5	5	10
	<b>N = 10</b>	<b>N = 10</b>	<b>N = 10</b>	<b>N = 10</b>

**N = número total de giras**

#### **Cambio Estacional en la Riqueza de Especies (S)**

Allmon (1991) y Arzabe (1999), afirman que generalmente hay una relación directa entre el número y/o abundancia de anfibios observados y la precipitación, sin embargo en este estudio se obtuvo una correlación negativa ( $r = - 0.70$ ,  $p = 0.02$ ), entre la precipitación y la riqueza de especies (Cuadro 5). Durante la estación seca varias especies de anfibios están asociadas a los márgenes de arroyos para mantener su humedad corporal. Sin embargo, algunas especies como *Diasporus diastema* y *Diasporus vocator*, se internan en el bosque cuando inicia la estación lluviosa (Ibáñez, 1999).

Cuadro 5. Variación mensual del número de individuos, riqueza de especies y precipitación.

Mes	Nº de individuos	Riqueza de especies (S)	Precipitación promedio diaria (mm)
febrero	66	9	4.25
marzo I	116	9	4.12
marzo II	145	14	0
Abril	180	15	0.5
mayo I	41	8	28.2
mayo II	35	9	14.25
junio I	29	10	21.28
junio II	19	11	1.3
julio I	14	6	22.2
julio II	16	10	13.65

### CONCLUSIONES

El estado de conservación del bosque nuboso basado en la riqueza de especies de anfibios para los tres sitios de estudio y Cerro Azul en el año 2009 presenta una condición “Pobre”, manteniéndose igual a la calificación obtenida para Cerro Azul en los dos años anteriores (2007 y 2008).

Los valores del Análisis de Viabilidad Ecológica y de los índices de diversidad son poco comparables, ya que el primero solo emplea la riqueza de especies y requiere implementarse con otros indicadores. Los índices de diversidad utilizan un conjunto de valores, como la riqueza y distribución de abundancia de las especies. Esto explica la diferencia entre el valor “Pobre” para el estado de conservación del bosque nuboso y los altos índices de diversidad de anfibios en Cerro Azul.

La riqueza de anfibios asociados a hábitats de quebradas y ríos obtenida en este estudio fue de 26 especies. Se considera que el listado de anfibios de Cerro Azul no está completo, ya que no se incluyeron transectos en todas las regiones fisiográficas y de vegetación. Sin embargo, las especies más conspicuas asociadas a quebradas y ríos fueron encontradas.

Los tres sitios de estudio y el área de Cerro Azul, mantienen altos índices de diversidad, siendo el periodo de transición el que obtuvo los valores más altos. El alto grado de heterogeneidad en la composición de especies de esta área permite que la diversidad sea alta.

Contrastando los índices de diversidad obtenidos en la comunidad de anfibios en Cerro Azul con los obtenidos en otras áreas de características ecológicas similares en la región (Bustamante *et al.*, 2005; Cadavid *et al.*, 2005), se observa que valores altos en índices de diversidad como Shanon Wiener son frecuentes en comunidades de anfibios en bosques nubosos del Neotrópico.

Los rangos de abundancia obtenidos en este muestreo al compararse con el trabajo de Ibáñez *et al.* (1994) demuestran que más de la mitad (62%) de las especies de anfibios disminuyeron su abundancia, un 15% se mantiene igual, 11.5% son nuevos registros y 11.5% aumentaron. No obstante, no se determinó si estos cambios en la abundancia son debidos a factores naturales o a factores humanos.

La abundancia de individuos fue mayor durante la estación seca y el periodo de transición de estación seca a estación lluviosa, siguiendo el patrón observado en las poblaciones de anfibios de tierras bajas (Isla de Barro Colorado) y en el bosque nuboso (Carretera de Llano Cartí) en Panamá. La actividad antropogénica en los transectos no muestra un efecto notable en la composición de especies.

Las 26 especies de anfibios muestran uniformidad en la cantidad de individuos con índices de diversidad ( $H'$ ) altos. Sin embargo, los índices de diversidad proporcionan un panorama sesgado de lo que ocurre, porque no es posible apreciar si hay una disminución de individuos en las poblaciones.

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Fondo Chagres-Fundación NATURA, Fundación Parque Nacional Chagres y The Nature Conservancy-Panamá por donar a SOMASPA el fondo usado en este estudio. A Rogelio Samudio y Roberto Ibáñez, por sus consejos y recomendaciones. Al personal del Parque Nacional Chagres en la Subsede de Cerro Azul, en especial a José Madrid.

## REFERENCIAS

Bustamante, M., S. Ron & L. Coloma. 2005. Cambios en la diversidad de siete comunidades de anuros en los Andes de Ecuador. *Biotropica* 37(2):180-189.

Cadavid, J., C. Roman-Valencia & A. Gómez. 2005. Composición y estructura de anfibios anuros en un transecto altitudinal de los Andes Centrales de Colombia. *Rev. Mus. Argentino Cienc. Nat.*, 7(2): 103-118.

Candanedo, I. & R. Samudio Jr. 2005. Construyendo un Mecanismo para Medir el Éxito de la Conservación en el Alto Chagres. Panamá. 80 pp.

Departamento de Cartografía del Catastro Rural. Reforma Agraria. 1970. Mapa Ecológico de Panamá. Dirección de Cartografía del Ministerio de Obras Públicas de Panamá.

Duellman, W. & P. Burrowes. 1989. New Species of Frogs, *Centrolenella*, from Pacific versant of Ecuador and Souththern Colombia. *Occas. Pap. Mus. Nat. Hist.*, University of Kansas. 132:1-14.

Duellman, W. & L. Trueb. 1994. *Biology of Amphibians*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

Heyer, W., M. Donnelly, R. McDiarmid, L. Hayek & M. Foster. 1994. *Measuring and Monitoring Biological Diversity: Standard Methods for Amphibians*. Smithsonian Institution Press, Washington, DC.

Ibáñez, R., F. Arosemena, F. Solis & C. Jaramillo. 1994. Anfibios y Reptiles de la Serranía Piedras-Pacora, Parque Nacional Chagres. *Scientia (Panamá)* 9(1):17-31.

Ibáñez, R., S. Aguilar, A. Sanjur, R. Martínez, R. Condit, R. Stallard, S. Heckadon, & S. Lao. 1999a. Proyecto Monitoreo de la Cuenca del Canal. *Reporte Anual Técnico*. Unites States Agency for International Development. Autoridad Nacional del Ambiente (Panama) and Smithsonian Tropical Research Institute. Panama City, Panamá.

Ibáñez, R., S. Rand & C. Jaramillo. 1999b. Los Anfibios del Monumento Natural Barro Colorado, Parque Nacional Soberanía y Áreas Adyacentes/ The Amphibians of Barro Colorado Nature Monument, Soberanía Nacional Park and Adjacent Areas. Editorial Mizrachi & Pujol, Panamá.

Ibáñez, R. 2001. Anfibios del Área Central de Panamá, pp. 150-157. En: Heckadon-Moreno, S. (Ed), Panamá: Puente Biológico. Instituto Smithsonian de Investigaciones Tropicales, Panamá.

Ibáñez, R. 2009. En el Parque Nacional Chagres Expedición de Rescate de Anfibios descubre el Hongo Quitrido en Ranas de Panamá. En: Comunicado de Prensa. Instituto Smithsonian de Investigaciones Tropicales (STRI).

Jaramillo, C. & R. Ibáñez. 1997a. Anfibios y Reptiles. En: Informe Final del Inventario de Vertebrados Terrestres: Quebrada Las Pavas, Parque Nacional Chagres, 5-14 marzo 1997. Informe Final: Proyecto de Monitoreo de la Cuenca del Canal de Panamá (PMCC), USAID-ANAM-STRI, Panamá. P. 3-13.

Jaramillo, C. & R. Ibáñez. 1997b. Anfibios y Reptiles. En: Informe Final del Inventario de Vertebrados Terrestres: Cerro Brewster, Parque Nacional Chagres, 18-27 febrero 1997. Informe Final: Proyecto de Monitoreo de la Cuenca del Canal de Panamá (PMCC), USAID-ANAM-STRI, Panamá. P. 2-15.

Jaramillo, C. & R. Ibáñez. 1997c. Anfibios y Reptiles. En: Informe Final del Inventario de Vertebrados Terrestres: Cerro Bruja, Parque Nacional Chagres, 21-30 febrero 1997. Informe Final: Proyecto de Monitoreo de la Cuenca del Canal de Panamá (PMCC), USAID-ANAM-STRI, Panamá. P. 2-15.

Jaramillo, C., L. Wilson, R. Ibáñez & F. Jaramillo. 2010. The Herpetofauna of Panama: Distribution and Conservation Status. En: Conservation of Mesoamerican Amphibians and Reptiles. Eagle Mountain Publications, L. C., Utah. 812 pp.

Kubicki, B. 2007. Ranas de vidrio de Costa Rica / Glass frogs of Costa Rica. Santo Domingo de Heredia, C.R., Editorial INBio. 299 pp.

Larry, W., J. Townsed & J. Johnson. 2010. Conservation of Mesoamerican Amphibians and Reptiles. Eagle Mountain Publications. 812 pp.

Lips, K. 1999. Mass Mortality and Population Declines of Anurans at an Upland Site in Western Panama. *Conservation Biology*. 13 (1): 117-125.

Lynch, J. 2001. Three New Rainfrogs of the *Eleutherodactylus diastema* Group from Colombia and Panama. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 25, 287–297.

Myers, C. 1972. The Status of Herpetology in Panama. In Jones, M. L., editor. The Panamic Biota: Some Observations Prior to a Sea-level Canal. *Bulletin of the Biological Society of Washington* 2:199–209.

Parmesan, C. & G. Yohe. 2003. A Globally Coherent Fingerprint of Climate Change Impacts Across Natural Systems. *Nature* 421: 37-42.

Pechmann, J., D. Scott, R. Semlitsch, J. Caldwell, L. Vitt & J. Gibbons. 1991. Declining Amphibian Populations: The Problem of Separating Human Impacts from Natural Fluctuations. *Science*, 253:892-895.

Pechmann, J. & H. Wilbur. 1994. Putting Declining Amphibian Populations in Perspective: Natural Fluctuations and Human Impacts. *Herpetologica*, 50:65-84.

Pounds, M., P. Fogden & J. Campbell. 1999. Biological Response to Climate Change on a Tropical Mountain. *Nature* 398: 611-615.

Rand, S. & C. Myers. 1990. The Herpetofauna of Barro Colorado Island, Panama: An Ecological Summary. pp. 386-409.

Samudio, R., A. Sosa & R. Samudio Jr. 2008. Estado de Conservación del Bosque Nuboso en la Región del Alto Chagres Basado en la

Diversidad de Anfibios. En: Productos del Proyecto: Construyendo un Mecanismo para Medir el Éxito de la Conservación en el Alto Chagres. 63-104 pp. Informe No Publicado.

Savage, J. 1973. The Geographic Distribution of Frogs: Patterns and Predictions. pp. 352 – 445. In: J. Vial, editor. Evolutionary Biology of the Anurans: Contemporary Research on Major Problems. University of Missouri Press, Columbia.

Wild, E. 1996. Natural History and Resource Use of Four Amazonian Tadpole Assemblages. *Occasional Papers of Natural History Museum of University of Kansas*. 176: 1-59.

*Recibido mayo de 2012, aceptado marzo de 2013.*



## HOMEOMORFISMO ENTRE ESPACIOS $l^p$ Y $L^p$

Jorge E. Hernández U.<sup>1</sup>, Temistocles Zeballos M.<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento de Matemática. email: edithleco@gmail.com

<sup>2</sup>Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Departamento de Matemática. email: temizeballos@gmail.com

### RESUMEN

En el presente trabajo estudiamos la existencia de homeomorfismos entre los espacios  $L^p$  y  $l^p$ . Se prueba que  $L^1([0,1])$  es homeomorfo a  $l^1$  para todo  $p > 1$ . Posteriormente, se muestra que  $L^p([0,1])$  es homeomorfo a  $l^p$  y que la bola unitaria cerrada en  $L^p([0,1])$  es uniformemente homeomorfa a la bola unitaria cerrada de  $l^p$  para  $p, q \geq 1$ . Seguidamente establecemos que para  $p, q \geq 1$  los espacios  $l^p$  y  $l^q$  son homeomorfos. Finalmente, se prueba que  $L^p([0,1])$  es homeomorfo a  $l^q$  para  $p, q \geq 1$ .

### PALABRAS CLAVES

Homeomorfismo, espacios  $L^p$ , espacios  $l^p$ .

### ABSTRACT

In this paper the existence of homeomorphisms between the spaces  $L^p$  and  $l^p$  was studied. It is proved that  $L^1([0,1])$  is homeomorphic to  $l^1$  for all  $p > 1$ . Subsequently, it is shown that  $L^p([0,1])$  is homeomorphic to  $l^p$  and that the closed unit ball in  $L^p([0,1])$  is uniformly homeomorphic to the closed unit ball of

$L^q([0,1])$  for  $p, q \geq 1$ . Then we establish that for  $p, q \geq 1$  the spaces  $L^p$  and  $L^q$  are homeomorphic. Finally, it is prove that  $L^p([0,1])$  is homeomorphic to  $l^q$  for  $p, q \geq 1$ .

## KEYWORDS

Homeomorphism, spaces  $L^p$ , spaces  $l^p$ .

## INTRODUCCIÓN

Los espacios  $L^p$  son fundamentales en muchas ramas del análisis moderno, un caso particular y muy importante es el espacio de todas las sucesiones  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de números reales o complejos para las que  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$  converge; éste es el espacio de Hilbert  $l^2$  el cual es el prototipo de los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita. El objetivo de este trabajo es el estudio de homeomorfismos entre los espacios  $L^p$  y  $l^q$ , los cuales nos brindan ejemplos encantadores en el análisis funcional.

### 1. LOS ESPACIOS $L^p$ Y $l^p$ .

**Definición 1.1:** Sean  $(X, M, \mu)$  un espacio de medida (Amann & Escher, 2009) y  $f$  una función medible real o compleja definida sobre el espacio  $X$ . Para cualquier  $0 < p < \infty$  la función  $|f|^p$  es medible. Definimos la  $p$ -norma de  $f$  por

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Observación:** Para  $0 < p < 1$  la  $p$ -norma no es una norma (Capinski & Kopp, 2004), ya que no se satisface la desigualdad triangular. Para  $1 \leq p < \infty$  la  $p$ -norma es una norma en  $L^p$ , si se supone que

$$f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

**Definición 1.2:** Sea  $(X, M, \mu)$  un espacio de medida. Denotaremos por  $L^p(X, M, \mu)$  o simplemente  $L^p(\mu)$  la colección de todas las funciones medibles  $f$  de valor real o complejo definidas sobre  $X$  tal que  $\int_X |f|^p d\mu < \infty$ ; es decir, las funciones que tienen una  $p$ -norma finita.

**Definición 1.3:** Por  $l^p$ , denotamos la colección de todas las sucesiones  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  de números reales (o complejos) tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty.$$

**Observación:** Los espacios  $l^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) son casos particulares de los espacios  $L^p$ . Son precisamente los espacios  $L^p$  tomados sobre el espacio de medida  $\mathbb{N}$  con la medida de conteo  $\mu$ . Estos espacios son de dimensión infinita.

**Propiedad 1.1:** Sea  $(X, M, \mu)$  un espacio de medida. Los espacios  $L^p(\mu)$  para  $1 \leq p < \infty$  con la norma  $\|f\|_p$  son espacios de Banach.

**Propiedad 1.2:** Sea  $(X, M, \mu)$  un espacio de medida finita, y suponga que  $1 \leq p < q \leq \infty$ . Entonces

$$L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu).$$

**Propiedad 1.3:** Si  $1 \leq p < q \leq \infty$ , entonces  $l^p \subseteq l^q$ . Además, la inclusión es propia.

**Definición 1.4:** Sea  $X$  un espacio con producto interno.  $X$  es un espacio de Hilbert si  $X$  con la norma inducida por el producto interno es un espacio de Banach (Rynne & Youngson, 2008). Es decir, si  $d$  es la métrica inducida por la norma en  $X$ , inducida a su vez por el producto interno, entonces  $(X, d)$  es completo.

**Propiedad 1.4:** El espacio  $l^p$  con  $p \neq 2$  no es un espacio con producto interno; por lo tanto, el espacio  $l^p$  con  $p \neq 2$  no es un espacio de Hilbert (Maccluer, 2009).

**Observación:** Ningún  $l^p$  ( $p \neq 2$ ) es un espacio con producto interno. Sin embargo,  $l^p$  es completo; por lo tanto,  $l^p$  con  $p \neq 2$  es un espacio de Banach que no es un espacio de Hilbert. El único  $l^p$  que es un espacio de Hilbert es el espacio  $l^2$ .

## 2. HOMEOMORFISMO ENTRE LOS ESPACIOS $L^p$ Y $l^q$ .

**Definición 2.1:** Una función  $f:(X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$  entre dos espacios topológicos es un homeomorfismo si es una función biyectiva y tanto  $f$  como su inversa  $f^{-1}$  son continuas. En este caso se dice que  $(X, \tau)$ ,  $(X', \tau')$  son espacios topológicos homeomorfos.

**Definición 2.2:** Una función  $f:(X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$  entre dos espacios topológicos es un homeomorfismo uniforme si es una función biyectiva y tanto  $f$  como su inversa  $f^{-1}$  son uniformemente continuas.

**Teorema 2.1:**  $L^1([0,1])$  es homeomorfo a  $L^p([0,1])$  para todo  $p > 1$ .

**Demostración:** Sean  $p > 1$  y

$$F: L^1([0,1]) \rightarrow L^p([0,1])$$

definida por

$$F(f) = \text{sgn}(f)|f|^{\frac{1}{p}}$$

donde  $\text{sgn}(f)$  es la función definida por  $\text{sgn}(f(x))$ , donde  $\text{sgn}(f(x))$  es el signo de  $f(x)$ .

Note que

$$\int_0^1 |F(f)|^p d\mu = \int_0^1 |f| d\mu < \infty.$$

Luego,  $F$  está bien definida.

Probemos que  $F$  es inyectiva.

En efecto, sean  $f, g \in L^1([0,1])$  tal que  $F(f) = F(g)$ , entonces

$$\operatorname{sgn}(f)|f|^{\frac{1}{p}} = \operatorname{sgn}(g)|g|^{\frac{1}{p}}.$$

Esto implica que  $\operatorname{sgn}(f) = \operatorname{sgn}(g)$  y  $|f|^{\frac{1}{p}} = |g|^{\frac{1}{p}}$ . Por lo tanto,  $f = g$ .

Probemos que  $F$  es suryectiva.

Sea  $h \in L^p([0,1])$ . Tomemos  $f = \operatorname{sgn}(h)|h|^p$ . Como

$$\int_0^1 |f| d\mu = \int_0^1 |h|^p d\mu < \infty,$$

se tiene que  $f \in L^1([0,1])$  y

$$\begin{aligned} F(f) &= \operatorname{sgn}(f)|f|^{\frac{1}{p}} \\ &= \operatorname{sgn}(h)\left(|h|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \operatorname{sgn}(h)|h| \\ &= h. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $F$  es suryectiva.

De todo lo anterior se concluye que  $F$  es una biyección. Además la inversa  $F^{-1}$  de  $F$  está definida por

$$\begin{aligned} F^{-1} : L^p([0,1]) &\rightarrow L^1([0,1]) \\ F^{-1}(h) &= \operatorname{sgn}(h)|h|^p. \end{aligned}$$

Probemos ahora que  $F$  es una función continua.

Sea  $f_0 \in L^1([0,1])$  y sea  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $L^1([0,1])$  que converge a  $f_0$ .

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_0\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f_0| d\mu = 0.$$

Ahora bien, como para todo número  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \operatorname{sgn}(a) \cdot |a|^{\frac{1}{p}} - \operatorname{sgn}(b) |b|^{\frac{1}{p}} \right|^p \leq 2^p |a - b|$$

se tiene que

$$\begin{aligned} |F(f_n) - F(f_0)|^p &= \left| \operatorname{sgn}(f_n) |f_n|^{\frac{1}{p}} - \operatorname{sgn}(f_0) |f_0|^{\frac{1}{p}} \right|^p \\ &\leq 2^p |f_n - f_0| \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\int_0^1 |F(f_n) - F(f_0)|^p d\mu \leq 2^p \int_0^1 |f_n - f_0| d\mu$$

de donde

$$\begin{aligned} \|F(f_n) - F(f_0)\|_p &= \left( \int_0^1 |F(f_n) - F(f_0)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2 \left( \int_0^1 |f_n - f_0| d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2 \|f_n - f_0\|_1^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|F(f_n) - F(f_0)\|_p \leq 2 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_0\|_1 \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(f_n) = F(f_0) \text{ en } L^p([0,1]).$$

Esto implica que  $F$  es una función continua en  $L^1([0,1])$ .

Finalmente probemos que la función  $G := F^{-1}$  es continua en  $L^p([0,1])$ .

En efecto, sea  $h_0 \in L^p([0,1])$  y sea  $\{h_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión en  $L^p([0,1])$  que converge a  $h_0$ . Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 |h_n - h_0|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Note que para todo número real  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \operatorname{sgn}(a)|a|^p - \operatorname{sgn}(b)|b|^p \right| \leq p|a-b|(|a|+|b|)^{p-1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |G(h_n) - G(h_0)| &= \left| \operatorname{sgn}(h_n)|h_n|^p - \operatorname{sgn}(h_0)|h_0|^p \right| \\ &\leq p|h_n - h_0|(|h_n| + |h_0|)^{p-1} \end{aligned}$$

y

$$\int_0^1 |G(h_n) - G(h_0)| d\mu \leq p \int_0^1 |h_n - h_0|(|h_n| + |h_0|)^{p-1} d\mu.$$

Pero por la desigualdad de Hölder-Riesz para  $q = \frac{p}{p-1}$ ,

$$\int_0^1 |h_n - h_0|(|h_n| + |h_0|)^{p-1} d\mu \leq \left( \int_0^1 |h_n - h_0|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 (|h_n| + |h_0|)^p d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|G(h_n) - G(h_0)\|_1 &= \int_0^1 |G(h_n) - G(h_0)| d\mu \\ &\leq p \left( \int_0^1 |h_n - h_0|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 (|h_n| + |h_0|)^p d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_0^1 (|h_n| + |h_0|)^p d\mu &\leq 2^p \int_0^1 (\max(|h_n|, |h_0|))^p d\mu \\ &\leq 2^p \left[ \int_0^1 |h_n|^p d\mu + \int_0^1 |h_0|^p d\mu \right]. \end{aligned}$$

Además, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |h_n - h_0|^p d\mu = 0$$

se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |h_n|^p d\mu = \int_0^1 |h_0|^p d\mu.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|G(h_n) - G(h_0)\|_1 \\ &\leq p2^{p-1} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 |h_n - h_0|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right] \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_0^1 |h_n|^p d\mu + \int_0^1 |h_0|^p d\mu \right]^{1-\frac{1}{p}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir, que la sucesión  $\{G(h_n)\}$  converge a  $G(h_0)$  en  $L^1([0,1])$ . Por consiguiente,  $G = F^{-1}$  es continua en  $L^p([0,1])$ .

Hemos probado así que la función  $F: L^1([0,1]) \rightarrow L^p([0,1])$  es un homeomorfismo para todo  $p > 1$ . Así pues,  $L^1([0,1])$  es homeomorfo a  $L^p([0,1])$  para todo  $p > 1$ .

Como la relación “es homeomorfo a” es una relación de equivalencia, por el Teorema anterior se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 2.1:** Sean  $p, q \geq 1$ , entonces  $L^p([0,1])$  es homeomorfo a  $L^q([0,1])$ .

**Corolario 2.2:** La bola unitaria cerrada en  $L^p([0,1])$  es uniformemente homeomorfa a la bola unitaria cerrada de  $L^q([0,1])$  para  $p, q \geq 1$ .

**Demostración:** Sean  $f, g \in L^1([0,1])$  tal que  $\|f\|_1 \leq 1$  y  $\|g\|_1 \leq 1$  y  $F : L^1([0,1]) \rightarrow L^p([0,1])$  la función definida en el Teorema 2.1.

Entonces,  $\|F(f)\|_p \leq 1$  y  $\|F(g)\|_p \leq 1$ . Además,

$$\begin{aligned} \|F(f) - F(g)\|_p &= \left( \int_0^1 |F(f) - F(g)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2 \|f - g\|_1^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Luego,  $F$  es uniformemente continua en la bola unitaria cerrada  $\bar{B}(0,1) = \bar{B}(L^1)$  de  $L^1([0,1])$ .

Análogamente, sea  $f, g \in L^p([0,1])$  tal que  $\|f\|_p \leq 1$  y  $\|g\|_p \leq 1$ . Entonces,  $\|G(f)\|_1 \leq 1$  y  $\|G(g)\|_1 \leq 1$ . Además,

$$\begin{aligned} \|G(f) - G(g)\|_1 &= \left( \int_0^1 |G(f) - G(g)| d\mu \right) \\ &\leq p 2^{p-1} 2^{\frac{p-1}{p}} \|f - g\|_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $G$  es uniformemente continua en la bola unitaria cerrada  $\bar{B}(0,1) = \bar{B}(L^p)$  de  $L^p([0,1])$ .

Finalmente, como la relación “es uniformemente homeomorfo a” es una relación de equivalencia, se tiene que  $\bar{B}(L^p)$  es uniformemente homeomorfa a  $\bar{B}(L^q)$  para todo  $p, q \geq 1$ .

**Teorema 2.2:**  $l^1$  es homeomorfo a  $l^p$ , para todo  $p > 1$ .

**Demostración:** Definamos la función

$$F: l^1 \rightarrow l^p$$

$$F(x) = \left( \operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}(x_3)|x_3|^{\frac{1}{p}}, \dots \right)$$

donde  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l^1$ .

Note que  $F$  está bien definida, ya que

$$\|F(x)\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \left| \operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{\frac{1}{p}} \right| \right)^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|x\|_1 < \infty.$$

Definamos la función

$$G: l^p \rightarrow l^1$$

$$G(y) = \left( \operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^p, \operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^p, \operatorname{sgn}(y_3)|y_3|^p, \dots \right)$$

donde  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in l^p$ .

Note que  $G$  está bien definida, ya que

$$\|G(y)\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \operatorname{sgn}(y_i)|y_i|^p \right| = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p = \|y\|_p^p < \infty.$$

Por otro lado,

$$(F \circ G)(y) = F(G(y))$$

$$= F\left( \left( \operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^p, \operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^p, \operatorname{sgn}(y_3)|y_3|^p, \dots \right) \right)$$

$$(F \circ G)(y) = \left( \operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^p\right) \left| \operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^p \right|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^p\right) \left| \operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^p \right|^{\frac{1}{p}}, \dots \right)$$

$$= \left( \operatorname{sgn}(y_1)|y_1|, \operatorname{sgn}(y_2)|y_2|, \operatorname{sgn}(y_3)|y_3|, \dots \right)$$

$$= (y_1, y_2, y_3, \dots)$$

$$= y$$

para todo  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in I^p$  y

$$\begin{aligned}
 (G \circ F)(x) &= G(F(x)) \\
 &= G\left(\left(\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}(x_3)|x_3|^{\frac{1}{p}}, \dots\right)\right) \\
 &= \left(\operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{p}}\right)\left|\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{p}}\right|^p, \operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{p}}\right)\left|\operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{p}}\right|^p, \dots\right) \\
 &= (\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|, \operatorname{sgn}(x_2)|x_2|, \operatorname{sgn}(x_3)|x_3|, \dots) \\
 &= (x_1, x_2, x_3, \dots) \\
 &= x
 \end{aligned}$$

para todo  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in I^1$ .

Así pues,  $F$  es una función biyectiva y  $G = F^{-1}$ .

Probemos que  $F$  es continua en  $I^1$ . En efecto, supongamos que

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots) \in I^1$  y sea  $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $I^1$  tal que  $x^n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - x^0\|_1 = 0$ .

Como para todo número real  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \operatorname{sgn}(a)|a|^{\frac{1}{p}} - \operatorname{sgn}(b)|b|^{\frac{1}{p}} \right|^p \leq 2^p |a - b|$$

se tiene que

$$\left| \operatorname{sgn}(x_i^n)|x_i^n|^{\frac{1}{p}} - \operatorname{sgn}(x_i^0)|x_i^0|^{\frac{1}{p}} \right|^p \leq 2^p |x_i^n - x_i^0| \text{ para todo } i = 1, 2, \dots$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \operatorname{sgn}(x_i^n)|x_i^n|^{\frac{1}{p}} - \operatorname{sgn}(x_i^0)|x_i^0|^{\frac{1}{p}} \right|^p \leq 2^p \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^0|$$

y

$$0 \leq \|F(x^n) - F(x^0)\|_p^p \leq 2^p \|x^n - x^0\|_1$$

lo que implica que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x^n) - F(x^0)\|_p \leq 2 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - x^0\|_1 \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x^n) - F(x^0)\|_p = 0.$$

Por consiguiente,  $F$  es continua en  $x^0$ , para todo  $x^0 \in I^1$ .

Probemos que  $G = F^{-1}$  es continua en  $I^p$ . En efecto, supongamos que  $y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0, \dots) \in I^p$  y sea  $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $I^p$  tal que  $y^n = (y_1^n, y_2^n, y_3^n, \dots)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y^n - y^0\|_p = 0$ .

Como para todo número real  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \operatorname{sgn}(a)|a|^p - \operatorname{sgn}(b)|b|^p \right| \leq p|a-b|(|a|+|b|)^{p-1}$$

se tiene que

$$\left| \operatorname{sgn}(y_i^n)|y_i^n|^p - \operatorname{sgn}(y_i^0)|y_i^0|^p \right| \leq p|y_i^n - y_i^0|(|y_i^n| + |y_i^0|)^{p-1} \text{ para todo } i = 1, 2, \dots;$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \operatorname{sgn}(y_i^n)|y_i^n|^p - \operatorname{sgn}(y_i^0)|y_i^0|^p \right| \leq p \sum_{i=1}^{\infty} |y_i^n - y_i^0|(|y_i^n| + |y_i^0|)^{p-1}.$$

Por la desigualdad de Hölder-Riesz se tiene que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{\infty} |y_i^n - y_i^0| |y_i^n - y_i^0|^{p-1} &\leq \left[ \sum_{i=1}^{\infty} |y_i^n - y_i^0|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (|y_i^n| + |y_i^0|)^{(p-1)\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \\
 &= \|y^n - y^0\|_p \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (|y_i^n| + |y_i^0|)^p \right]^{\frac{p-1}{p}} \\
 &\leq \|y^n - y^0\|_p \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (2 \max(|y_i^n|, |y_i^0|))^p \right]^{\frac{p-1}{p}} \\
 &\leq 2^{p-1} \|y^n - y^0\|_p \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (\max(|y_i^n|, |y_i^0|))^p \right]^{\frac{p-1}{p}} \\
 &\leq 2^{p-1} \|y^n - y^0\|_p \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (|y_i^n|^p + |y_i^0|^p) \right]^{\frac{p-1}{p}} \\
 &\leq 2^{p-1} \|y^n - y^0\|_p \left( \sum_{i=1}^{\infty} |y_i^n|^p + \left( \sum_{i=1}^{\infty} |y_i^0|^p \right) \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
 &\leq 2^{p-1} \|y^n - y^0\|_p \left( \|y^n\|_p^p + \|y^0\|_p^p \right)^{\frac{p-1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \|G(y^n) - G(y^0)\|_n &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \operatorname{sgn}(y_i^n) |y_i^n|^p - \operatorname{sgn}(y_i^0) |y_i^0|^p \right| \\
 &\leq p 2^{p-1} \|y^n - y^0\|_p \left( \|y^n\|_p^p + \|y^0\|_p^p \right)^{\frac{p-1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Además, como

$$\left| \|y^n\|_p - \|y^0\|_p \right| \leq \|y^n - y^0\|_p$$

se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y^n\|_p = \|y^0\|_p.$$

Por lo tanto,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|G(y^n) - G(y^0)\|_1 \leq p 2^{p-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y_0\|_p \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\|_p^p + \|y^0\|_p^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = 0$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G(y^n) - G(y_0)\|_1 = 0.$$

Por consiguiente,  $G$  es continua en  $y^0$ , para todo  $y^0 \in I^p$ .

Así pues,  $I^1$  es homeomorfo a  $I^p$ , para todo  $p > 1$ .

**Observación:** La función  $F$  definida en los Teoremas 2.1 y 2.2 se llama la función de Mazur y la función  $G$  se llama la función inversa de Mazur (Mazur, 1929).

Como consecuencia inmediata del Teorema 2.2, se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 2.3:** Sean  $p, q \geq 1$ , entonces  $I^p$  es homeomorfo a  $I^q$ .

**Teorema 2.3:** Sean  $p \geq 1$ ,  $\bar{B}(I^1) = \{x \in I^1 : \|x\|_1 \leq 1\}$  y

$\bar{B}(I^p) = \{y \in I^p : \|y\|_p \leq 1\}$ . Entonces  $\bar{B}(I^1)$  y  $\bar{B}(I^p)$  son uniformemente homeomorfas.

**Demostración:** Consideremos la función de Mazur  $F: I^1 \rightarrow I^p$  y su inversa  $G: I^p \rightarrow I^1$  definida en el Teorema 2.2.

Como para todo  $x \in \bar{B}(I^1)$ ,  $\|F(x)\|_p = (\|x\|_1)^{\frac{1}{p}} \leq 1$  y para todo  $y \in \bar{B}(I^p)$ ,  $\|G(y)\|_1 = (\|y\|_p)^p \leq 1$ , se tiene que

$$F: \bar{B}(I^1) \rightarrow \bar{B}(I^p) \quad \text{y} \quad G: \bar{B}(I^p) \rightarrow \bar{B}(I^1) \quad \text{y} \quad G = F^{-1}.$$

Además, por el Teorema 2.2, para todo  $x_1, x_2 \in \bar{B}(I^1)$ ,

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_p \leq 2 \|x_1 - x_2\|_1^{\frac{1}{2}}$$

y para todo  $y_1, y_2 \in \bar{B}(I^p)$

$$\|G(y_1) - G(y_2)\|_1 \leq p 2^{p-1} \cdot 2^{\frac{p-1}{2}} \|y_1 - y_2\|_2$$

lo que implica que  $F$  y  $G$  son uniformemente continuas. Por consiguiente,  $\bar{B}(I^1)$  y  $\bar{B}(I^p)$  son uniformemente homeomorfas.

Como consecuencia del Teorema 2.3, se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 2.4:** Sean  $p, q \geq 1$ , entonces la bola unitaria cerrada  $\bar{B}(I^p)$  es uniformemente homeomorfa a la bola unitaria cerrada  $\bar{B}(I^q)$ .

**Teorema 2.4:** Sean  $p, q \geq 1$ . Entonces  $L^p([0,1])$  es homeomorfo a  $I^q$ .

**Demostración:** Por el Corolario 2.1,  $L^p([0,1])$  es homeomorfo a  $L^2([0,1])$  y, como  $L^2([0,1])$  es isométricamente isomorfo a  $I^2$ , entonces  $L^2([0,1])$  es homeomorfo a  $I^2$ . Pero por el Corolario 2.3,  $I^2$  es homeomorfo a  $I^q$ . Por consiguiente,  $L^p([0,1])$  es homeomorfo a  $I^q$ , para todo  $p, q \geq 1$ .

## REFERENCIAS

Amann, H. & J. Escher. 2009. Analysis III. First Edition. Birkhäuser Verlag AG, Basel.

Capinski, M. & E. Kopp. 2004. Measure, Integral and Probability. Second Edition. Springer-Verlag, Berlin.

Maccluer, B.D. 2009. Elementary Functional Analysis. First Edition. Springer-Verlag, New York.

Mazur, S. 1929. Une Remarque sur L'homéomorphie des Champs Fonctionnels, *Studia Math.*, 1, 83-85.

Rynne, B.P. & M.A. Youngson. 2008. *Linear Functional Analysis*. Second Edition. Springer-Verlag, London.

*Recibido junio de 2012, aceptado marzo de 2013.*



## EXISTENCIA DE UNA FUNCIÓN NO LINEAL, CONTINUA Y BIYECTIVA EN $l^2$ CON INVERSA DISCONTINUA EN TODO PUNTO

Jorge E. Hernández U.<sup>1</sup>, Temístocles Zeballos M.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento de Matemática. email: edithleco@gmail.com

<sup>2</sup>Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Departamento de Matemática. email: temizeballos@gmail.com

### RESUMEN

En el presente trabajo se utiliza la función de Mazur para probar la existencia de una función no lineal biyectiva y continua de  $l^2$  sobre un subconjunto de  $l^2$  cuya inversa es discontinua en todo punto. También se presenta un ejemplo, relativamente sencillo, en el caso lineal.

### PALABRAS CLAVES

Espacio de Hilbert  $l^2$ , biyección continua con inversa discontinua.

### ABSTRACT

In this paper the Mazur function is used to prove the existence of a nonlinear bijective and continuous function from  $l^2$  on a subset of  $l^2$  whose inverse is discontinuous at every point. Also a rather simple example is shown in the linear case.

### KEYWORDS

Hilbert space  $l^2$ , continuous bijection with discontinuous inverse.

## INTRODUCCIÓN

Los espacios de Hilbert son de vital importancia en el análisis moderno, en este trabajo vamos a limitar nuestra atención al espacio de Hilbert  $l^2$  (Stein & Shakarchi, 2005) y al espacio de Banach  $l^1$  (Rynne & Youngson, 2008). Como  $l^1 \subset l^2$ , podemos aplicar a  $l^1$  la topología de  $l^2$ . Consideramos la función  $G = F^{-1} : l^2 \rightarrow l^1 \subset l^2$  y mostramos que  $G$  es una biyección continua no lineal; sin embargo  $F$  es discontinua en todo punto de  $l^1$ .

## 1. EJEMPLO EN EL CASO LINEAL

A continuación presentamos un ejemplo de una función lineal continua y biyectiva cuya inversa es discontinua en todo punto.

**Ejemplo:** Sea  $f : l^2 \rightarrow l^2$  la función definida por

$$f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \left\{\frac{1}{n}x_n\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Como

$$\begin{aligned} f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) &= f\left(\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \\ &= \left\{\frac{1}{n}(x_n + y_n)\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \left\{\frac{1}{n}x_n\right\}_{n=1}^{\infty} + \left\{\frac{1}{n}y_n\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) + f\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f\left(\lambda\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) &= f\left(\{\lambda x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \\ &= \left\{\frac{1}{n}\lambda x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \lambda\left\{\frac{1}{n}x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \lambda f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \end{aligned}$$

se tiene que  $f$  es una función lineal.

Note que

$$f(l^2) = \left\{ \left\{ \frac{1}{n} x_n \right\}_{n=1}^{\infty} : \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 \right\} =: Y$$

**Notación:** Para cada  $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2$  y  $N \in \mathbb{N}$  denotemos

$$x^{[N]} = (x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots)$$

$$x^{(N)} = x - x^{[N]} = (0, \dots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)$$

Probemos que  $Y$  es denso en  $l^2$ . En efecto, sea  $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$  y definamos

$$x^{[n]} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

Como  $z^n = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, 0, 0, \dots) \in l^2$  y  $f(z^n) = x^{[n]}$ , se tiene que  $x^{[n]} \in Y$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Por otro lado,

$$\|x - x^{[n]}\|_2^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por lo tanto, la sucesión  $\{x^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $x$  en  $l^2$  y  $\bar{Y} = l^2$ ; es decir,  $Y$  es denso en  $l^2$ .

Para cada  $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2$  se tiene que

$$\|f(x)\|_2 = \|(x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots)\|_2 = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n}x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2.$$

Esto implica que  $f$  es un operador lineal acotado (Maccluer, 2009) y  $\|f\| \leq 1$ . Así pues,  $f$  es continua en  $l^2$ .

Es claro que  $f: l^2 \rightarrow Y$  es biyectiva y su inversa está definida por

$$f^{-1}: Y \rightarrow l^2$$

$$f^{-1}((y_1, y_2, y_3, \dots)) = (y_1, 2y_2, 3y_3, \dots)$$

Consideremos la sucesión ortonormal  $\{e_1, e_2, \dots\}$  de  $l^2$ , entonces como

$$f(ne_n) = f((0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-ésima posición}}}{n}, 0, \dots)) = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-ésima posición}}}{1}, 0, \dots) = e_n$$

se tiene que  $e_n \in Y$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Además

$$f^{-1}(e_n) = ne_n \quad \text{y} \quad \|f^{-1}(e_n)\|_2 = n$$

de donde

$$\|f^{-1}\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|f^{-1}(x)\|_2 \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f^{-1}(e_n)\|_2 = \infty.$$

Por lo tanto,  $f^{-1}$  es un operador lineal no acotado (Amann & Escher, 2009). Esto implica que  $f^{-1}$  es discontinua en todo punto  $y \in Y$ .

**Observación:** Recordemos que  $l^1$  es denso en  $l^2$  bajo la topología inducida por la norma  $\|\cdot\|_2$ .

## 2. EJEMPLO EN EL CASO NO LINEAL

**Teorema 1:** Sea  $G = F^{-1}: I^2 \rightarrow I^1 \subset I^2$ . La inversa de la función de Mazur (1929). Para todo  $x = (x_1, x_2, \dots) \in I^2$  y  $\varepsilon > 0$  existen  $N \in \mathbb{N}$  y  $\delta > 0$  tal que si  $y = (y_1, y_2, \dots) \in I^2$  y  $\|x - y\|_2 < \delta$ , entonces:

$$i) \quad |x_i| < 1 \text{ y } |y_i| < 1, \text{ para todo } i \geq N+1.$$

$$ii) \quad \|x^{(N)}\|_2 < \frac{\varepsilon}{4}.$$

$$iii) \quad \|y^{(N)}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$iv) \quad \|(G(x))^{(N)} - (G(y))^{(N)}\|_2^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

**Demostración:** Como  $x = (x_1, x_2, \dots) \in I^2$ , existe un número natural  $N$  tal que

$$|x_i| < \frac{1}{2} \text{ para } i \geq N+1 \text{ y } \|x^{(N)}\|_2 < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Tomemos  $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\}$ . Sea  $y = (y_1, y_2, \dots) \in I^2$  tal que  $\|x - y\|_2 < \delta$ , entonces

$$|x_i - y_i| = \sqrt{(x_i - y_i)^2} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x - y\|_2 < \delta;$$

por lo tanto, para todo  $i \geq N+1$  se tiene que

$$|y_i| \leq |y_i - x_i| + |x_i| < \delta + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Además,

$$\|x^{(N)} - y^{(N)}\|_2 = \left( \sum_{i=N+1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x - y\|_2 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

de donde

$$\left| \left\| x^{(N)} \right\|_2 - \left\| y^{(N)} \right\|_2 \right| \leq \left\| x^{(N)} - y^{(N)} \right\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

y

$$\left\| y^{(N)} \right\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{4} + \left\| x^{(N)} \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalmente, como  $|x_i| < 1$ ,  $|y_i| < 1$  para  $i \geq N+1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| (G(x))^{(N)} - (G(y))^{(N)} \right\|_2^2 &= \sum_{i=N+1}^{\infty} \left[ \operatorname{sgn}(x_i) x_i^2 - \operatorname{sgn}(y_i) y_i^2 \right]^2 \\ &= \sum_{i=N+1}^{\infty} (x_i^4 - 2 \operatorname{sgn}(x_i) \operatorname{sgn}(y_i) x_i^2 y_i^2 + y_i^4) \\ &\leq \sum_{i=N+1}^{\infty} (x_i^4 + 2 x_i^2 y_i^2 + y_i^4) \\ &\leq \sum_{i=N+1}^{\infty} (x_i^2 + 2 x_i^2 + y_i^2) \\ &= \sum_{i=N+1}^{\infty} x_i^2 + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} x_i^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} y_i^2 \\ &= \left\| x^{(N)} \right\|_2^2 + 2 \left\| x^{(N)} \right\|_2^2 + \left\| y^{(N)} \right\|_2^2 \\ &= 3 \left\| x^{(N)} \right\|_2^2 + \left\| y^{(N)} \right\|_2^2 \\ &< 3 \left( \frac{\varepsilon^2}{16} \right) + \frac{\varepsilon^2}{4} = \frac{7\varepsilon^2}{16} < \frac{\varepsilon^2}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\| (G(x))^{(N)} - (G(y))^{(N)} \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

**Teorema 2:** Sean  $G = F^{-1}: I^2 \rightarrow I^1 \subset I^2$  la inversa de la función de Mazur,  $x = (x_1, x_2, \dots) \in I^2$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$ . Entonces existe un  $\delta > 0$

tal que si  $\|x - y\|_2 < \delta$ , entonces  $\left\| (G(x))^{[N]} - (G(y))^{[N]} \right\|_2^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$ .

**Demostración:** Note que la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t) t^2$$

es continua en  $\mathbb{R}$ . Luego, para cada  $i = 1, 2, \dots, N$  existe un  $\delta_i > 0$  tal que:

$$|x_i - t| < \delta_i \Rightarrow (\operatorname{sgn}(x_i) x_i^2 - \operatorname{sgn}(t) t^2)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2N}.$$

Tomemos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N\}$ .

Sea  $y = (y_1, y_2, \dots) \in I^2$  tal que  $\|x - y\|_2 < \delta$ . Entonces  $|x_i - y_i| < \delta$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\| (G(x))^{[N]} - (G(y))^{[N]} \right\|_2^2 &= \sum_{i=1}^N (\operatorname{sgn}(x_i) x_i^2 - \operatorname{sgn}(y_i) y_i^2)^2 \\ &< N \left( \frac{\varepsilon^2}{2N} \right) = \frac{\varepsilon^2}{2}. \end{aligned}$$

**Teorema 3:** Sea  $G = F^{-1}: I^2 \rightarrow I^1 \subset I^2$  la inversa de la función de Mazur. Entonces  $G$  es continua en  $I^2$ .

**Demostración:** Sean  $x = (x_1, x_2, \dots) \in I^2$  y  $\varepsilon > 0$ . Por el Teorema 1, existe un número  $N \in \mathbb{N}$  y  $\delta_1 > 0$  tal que

$$y \in I^2, \|x - y\|_2 < \delta_1 \Rightarrow \left\| (G(x))^{[N]} - (G(y))^{[N]} \right\|_2^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Luego, por el Teorema 2, existe un  $\delta_2$  tal que

$$y \in I^2, \|x - y\|_2 < \delta_2 \Rightarrow \left\| (G(x))^{[N]} - (G(y))^{[N]} \right\|_2^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Luego, si  $y \in I^2, \|x - y\|_2 < \delta$ ; entonces

$$\begin{aligned} \|G(x) - G(y)\|^2 &= \left\| (G(x))^{(N)} + (G(x))^{[M]} - (G(y))^{(N)} - (G(y))^{[M]} \right\|^2 \\ &\leq \left\| (G(x))^{(N)} - (G(y))^{(N)} \right\|^2 + \left\| (G(x))^{[M]} - (G(y))^{[M]} \right\|^2 \\ &< \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $G$  es continua en  $x$ , para todo  $x \in I^2$ .

**Teorema 4:** Sea  $F: I^1 \subset I^2 \rightarrow I^2$  la función de Mazur (1929). Entonces  $F$  es discontinua en  $x$ , para todo  $x \in I^1$ .

**Demostración:** Sea  $x = (x_1, x_2, \dots) \in I^1$  y  $\delta > 0$ . Probemos que existe un punto  $y \in I^1$  tal que  $\|x - y\|_2 < \delta$  y  $\|F(x) - F(y)\|_2 > \frac{1}{2}$ .

En efecto, sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $\frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$ . Note que la función

$$\begin{aligned} g_n: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ g_n(t) &= \sqrt{|t| + \frac{1}{n}} - \sqrt{|t|} \end{aligned}$$

es continua en  $\mathbb{R}$ . Luego,  $\lim_{t \rightarrow 0} g_n(t) = g_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Por lo tanto, existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $g(t) > \frac{1}{2\sqrt{n}}$  siempre que  $|t| < \varepsilon$ .

Como  $x = (x_1, x_2, \dots) \in I^1$ , se tiene que  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$ ; lo que implica que existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_i| < \varepsilon$ , siempre que  $i > N$ .

Definamos la sucesión  $y = (y_1, y_2, \dots)$  por

$$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{\text{sgn}(x_i)}{n}, & \text{si } N+1 \leq i \leq N+n \\ x_i, & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Como  $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^1$  y  $y = (y_1, y_2, \dots)$  sólo difieren en una cantidad finita de términos, se tiene que  $y \in l^1$ .

Note que  $\operatorname{sgn}\left(t + \frac{\operatorname{sgn}(t)}{n}\right) = \operatorname{sgn}(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto,  $\operatorname{sgn}(x_i) = \operatorname{sgn}(y_i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Además,

$$\|x - y\|_2^2 = \sum_{i=N+1}^{N+n} \frac{(-\operatorname{sgn}(x_i))^2}{n^2} = n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} < \delta^2$$

de donde

$$\|x - y\|_2 < \delta.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|_2^2 &= \left\| \left( \operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{2}}, \operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{2}}, \dots \right) - \left( \operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^{\frac{1}{2}}, \operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^{\frac{1}{2}}, \dots \right) \right\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left( \operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{\frac{1}{2}} - \operatorname{sgn}(y_i)|y_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= \sum_{i=N+1}^{N+n} \left( \sqrt{|x_i|} - \sqrt{|x_i + \frac{\operatorname{sgn}(x_i)}{n}|} \right)^2 \\ &= \sum_{i=N+1}^{N+n} \left( \sqrt{|x_i|} - \sqrt{|x_i| + \frac{1}{n}} \right)^2 \\ &= \sum_{i=N+1}^{N+n} \left( \sqrt{|x_i| + \frac{1}{n}} - \sqrt{|x_i|} \right)^2 \\ &= \sum_{i=N+1}^{N+n} (g_n(x_i))^2 \\ &> \sum_{i=N+1}^{N+n} \left( \frac{1}{2\sqrt{n}} \right)^2, \text{ ya que } |x_i| < \varepsilon \\ &= n\left(\frac{1}{4n}\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

de donde,  $\|F(x) - F(y)\|_2 > \frac{1}{2}$ .

De todo lo anterior se deduce que  $F$  es discontinua en  $x$ , para todo  $x \in l^1$ .

Como consecuencia de los resultados anteriores, se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 1:** Sea  $G = F^{-1} : I^2 \rightarrow I^1 \subset I^2$ . Entonces  $G$  es una biyección continua y  $G^{-1} = F$  es discontinua en todo punto  $x \in I^1$ .

### **REFERENCIAS**

Amann, H. & J. Escher. 2009. Analysis III. First Edition. Birkhäuser Verlag AG, Basel.

Maccluer, B.D. 2009. Elementary Functional Analysis. First Edition. Springer-Verlag, New York.

Mazur, S. 1929. Une Remarque sur L'homéomorphie des Champs Fonctionnels, Studia Math., 1, 83-85.

Rynne, B.P. & M.A. Youngson. 2008. Linear Functional Analysis. Second Edition. Springer-Verlag, London.

Stein, E.M. & R. Shakarchi. 2005. Real Analysis. Measure Theory, Integration, & Hilbert Spaces. First Edition. Princeton University Press, New Jersey.

*Recibido junio de 2012, aceptado abril de 2013.*