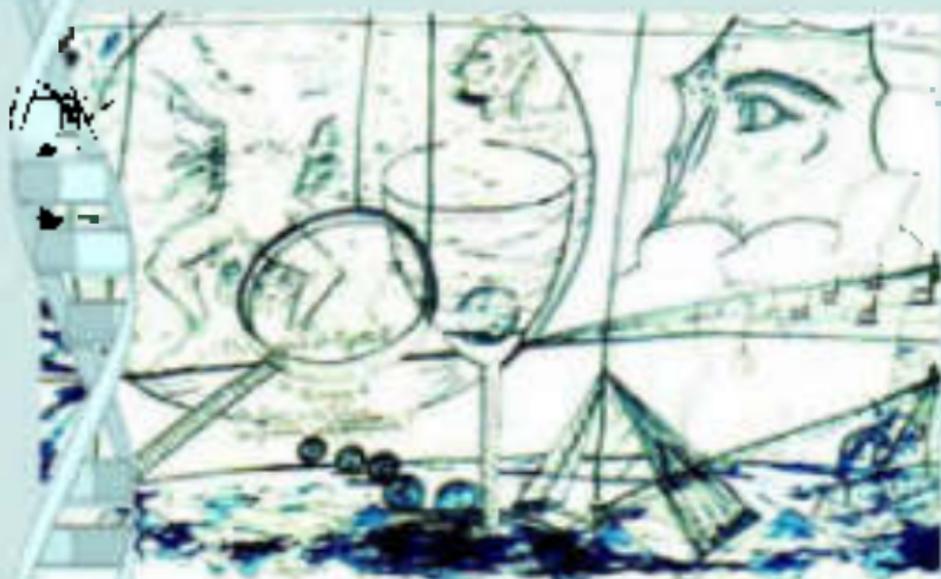


ISSN 1808-882



**Biología-Química-Física  
Matemática-Estadística**

# TECNOCIENCIA



Revista de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnológicas  
Universidad de Panamá



## **SEASONAL DIATOM AND COPEPOD ABUNDANCES IN THE GULF OF MONTIJO, PANAMA**

**Carlos E Seixas G.<sup>1</sup> and Manuel Grimaldo<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas.

<sup>2</sup> Universidad de Panamá, Escuela de Biología.

Email: carlosseix@hotmail.com

### **ABSTRACT**

Between November 1996 and December 1997 a study was conducted in the gulf of Montijo, Panamá to evaluate the spatial and seasonal diatom-copepod abundances. Water temperature averaged 29.1°C and salinity fluctuated from a minimum of 21.6 psu in November 1996 to a maximum of 30.3 psu in March 1997. Secchi depths increased from inshore to offshore stations with higher values in March and October. A seasonal pattern of rainfall prevailed in the gulf with cumulative precipitation peaked in June, September and November whereas lower values were registered from January to April. Copepods and nauplii were numerically the major component of the zooplankton community comprised over 90% of the catches whereas phytoplankton was diatom dominated. Both groups showed a distinct seasonal pattern. Whereas copepods were dominant during the rainy season, diatoms were in the dry season. In addition, an inverse spatial diatom-copepod relation was observed. Copepod and nauplii abundances decreased from inshore to offshore stations whereas diatom increased. Field observations were consistent with an expected inhibitory effect of diatom on copepod population.

### **KEYWORDS**

Phytoplankton, diatoms, zooplankton, seasonal plankton, gulf of Montijo.

## RESUMEN

Se efectuó un estudio con el propósito de evaluar la abundancia espacial y estacional de copépodos y diatomeas en el golfo de Montijo, Panamá. Las muestras se recolectaron entre noviembre de 1996 y diciembre de 1997. La temperatura anual promedio fue 29.1 °C mientras que la salinidad fluctuó entre un mínimo de 21.6 psu en noviembre de 1996 y un máximo de 30.3 psu en marzo de 1997. La transparencia de las aguas aumento hacia el exterior del estuario con valores máximos en marzo y octubre. Las mayores precipitaciones se presentaron en junio, septiembre y noviembre y los mínimos entre enero y abril. El fitoplancton estuvo dominado por diatomeas mientras que el zooplancton por copépodos y nauplii. Ambos grupos mostraron un comportamiento anual inverso. Los copépodos fueron abundantes en la estación lluviosa y las diatomeas en la estación seca. La distribución espacial reflejó el mismo comportamiento. Los copépodos y nauplii disminuyeron hacia la boca del estuario mientras que las diatomeas aumentaron. Estas observaciones sugieren una relación inhibitoria entre las diatomeas y la población de copépodos.

## PALABRAS CLAVES

Fitoplancton, diatomeas, zooplancton, plancton estacional, golfo de Montijo.

## INTRODUCTION

Copepods are the most widely distributed zooplankton organisms in the marine ecosystems. They can graze both phytoplankton and micro zooplankton and play important roles in the dynamic of plankton in estuaries and coastal systems. As long as copepods dominate the zooplankton and are the major source of food for other organisms, diatoms dominate the phytoplankton assemblages. Several studies have been conducted to investigate aspects such as the graze relation between copepods and phytoplankton (Bautista & Harris, 1992; Dagg, 1995; Froneman, 2000) or the seasonal variation of species composition (Yoshioka *et al.*, 1985; García & López, 1989; Buskey, 1993; Gilbes *et al.*, 1996; Tilstone *et al.*, 2000) but the spatial and temporal variation of copepods and their relationships with food sources such as diatoms have seldom been explored. Traditionally, diatoms have been considered the bulk of food that sustains the marine food chain to top consumers and important fisheries (Cushing, 1989). However, several laboratories worldwide have presented strong evidence of inhibition of copepod reproduction by diatoms (Ban *et al.*, 1997). Some studies have reported that some diatoms potentially

reduce copepod egg viability up to 100% (Ianora *et al.*, 2003). This strategy allows diatoms to reduce the grazer population and constitute a new model termed the paradox of diatom-copepod interaction in the pelagic food web (Ianora *et al.*, 2003). Since herbivorous copepods are the major predator of plankton diatom, it is possible to expect correspondence between their abundances on different temporal and/or spatial scales (Runge, 1988). This paper provides a description of changes observed in the diatom-copepod abundances in the estuarine system of the gulf of Montijo.

## **MATERIALS AND METHODS**

### **Area of study**

The Gulf of Montijo is an 80,765 ha area located on the Pacific coast, about 30 km southwest of the city of Santiago, province of Veraguas, western Panama (**Coordinates:** 07°45'N 081°07'W) (Fig. 1.). It is an estuarine system with humid tropical climate and fringed by mangroves with a wide variety of landscapes. The annual average precipitation is 3,000 mm, ranging between 2,000 and 3,200 mm.

### **Sample Collection, equipment and procedure**

Samples for total diatoms abundance were obtained for one year from November 1996 to December 1997 in a six stations transect between Puerto Mutis and Cébaco Island. At each station three 10 liter surface samples were taken for analysis. Samples were passed through an 80 um mesh-size phytoplankton net to obtain 100 ml concentrates which were fixed in 3% buffered formalin. Three replicates and two aliquots per replicate were counted in a Sedgwick Rafter Plankton Counting Chamber under stereoscopic binocular microscope according to EPA procedure (1973). Zooplankton abundance was determined by count under a dissecting microscope and using a squared Petri disc. Readings of temperature, salinity and light penetration were recorded using an YSI-30 Conductivity-Salinometer and a Secchi disk.



Fig.1. Map of the Republic of Panama, showing the Gulf of Montijo (Source: Earth Observatory, SERVIR.). The dots represent the sampling site.

## **RESULTS**

### **Hydrological parameters**

Figure 2 shows the values of the main hydrological parameters in the gulf of Montijo. Water temperature in the gulf averaged 29.2 °C and ranged from 28°C in March to 30.8°C in August. Mean Secchi depths increased from inshore to offshore stations. Although it is difficult to identify a temporal pattern for Secchi fluctuations, higher transparencies were found mainly in March and October whereas June showed lower values in almost all stations. A seasonal pattern of rainfall prevailed with higher values from May to December (Cumulative, 1904.7 mm) whereas lower values were registered from January to April (Cumulative, 73.5 mm). Cumulative precipitation peaked in June, September and November and the total annual was 1978, 2 mm. Mean monthly salinity fluctuated from a minimum of 19.1 psu in September to 30.3 psu in March. The annual salinity profile was more variable into than outer estuary.

### **Temporal diatom – copepod abundances**

Monthly surface variations in total diatoms and copepod abundances are presented in Figure 3. Centric diatoms dominated the community structure throughout the study. Two peaks in diatom cell counts were observed, one in November 1996 and the other in December 1997, both at the beginning of the dry season. Only small fluctuations were observed during the rest of the year. Diatom annual mean of counts was 5518 cell/liter. On the other hand, copepods and nauplii dominated throughout the year and both groups accounted for the 96.8% of the zooplankton counts. Mean abundance of copepods during the study period was 76.8 individuals/10 liter (7680 individuals/m<sup>3</sup>).

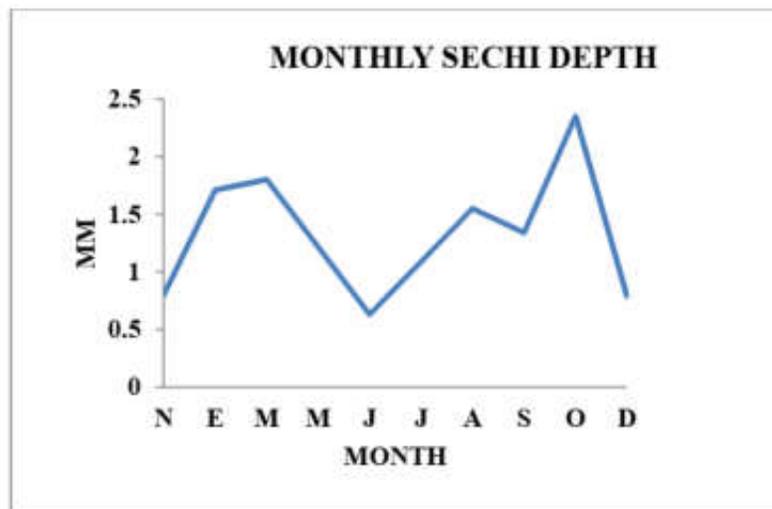
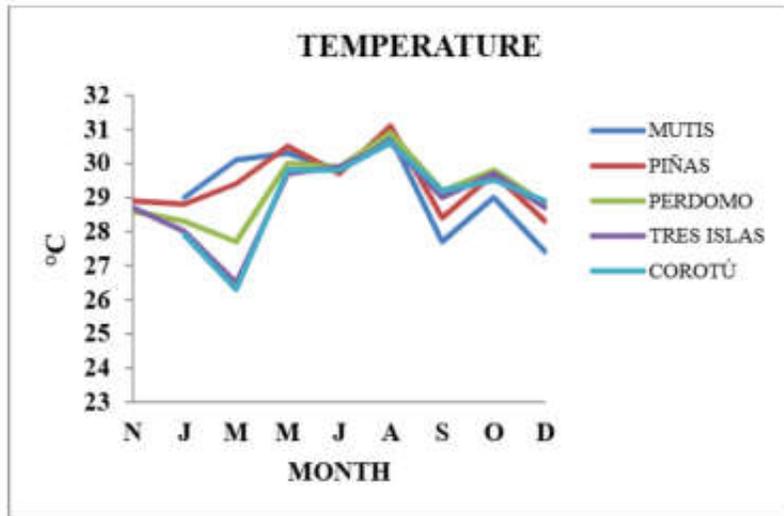


Fig.2a.

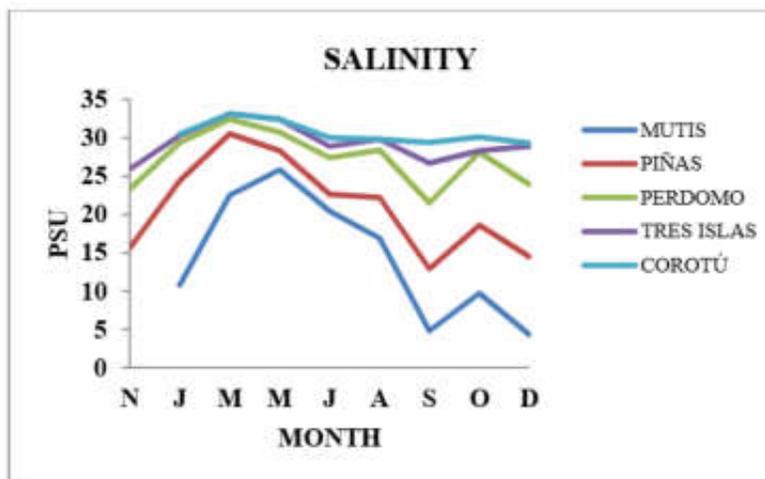
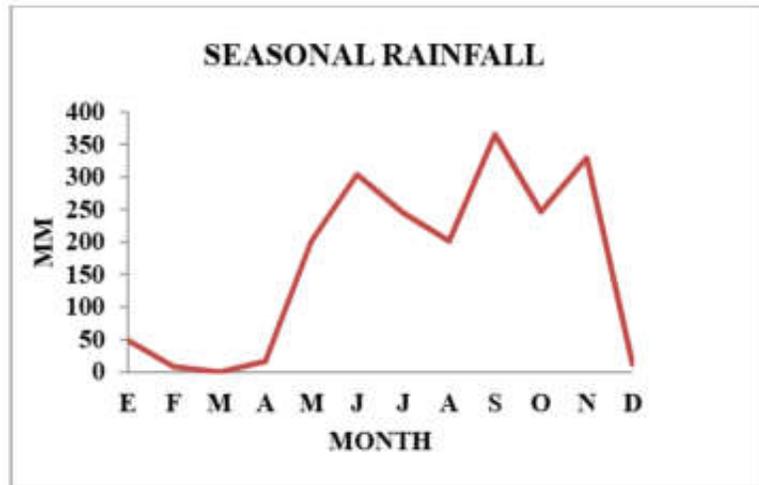


Fig.2b.

Fig.2a. y Fig.2b. Monthly hydrological parameters in the gulf of Montijo from November 1996 to December 1997.

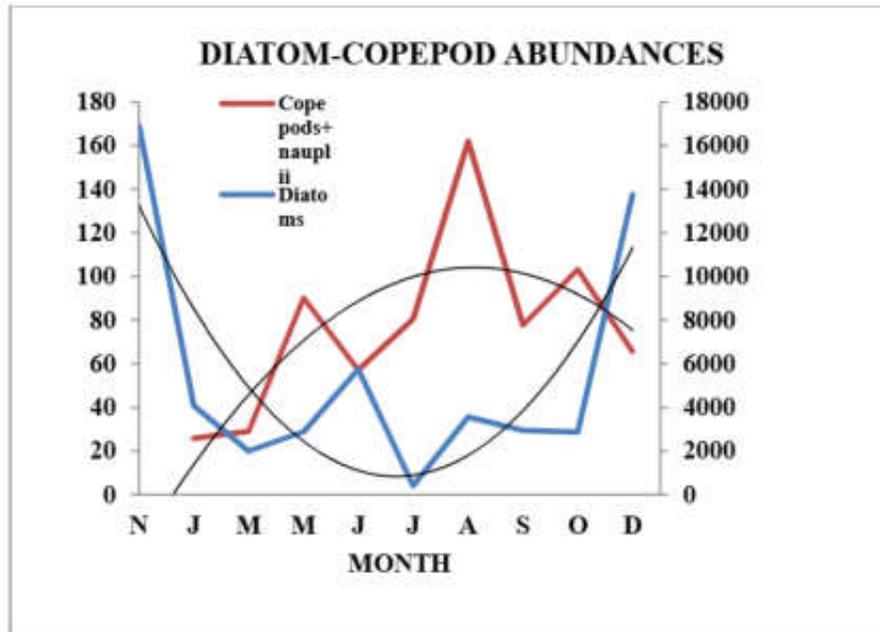


Fig. 3. Monthly diatoms and copepod + nauplii abundances in different station of the gulf of Montijo between November 1996 and December 1997. Values are annual mean and counts are expressed in individuals/10 liter for copepods and nauplii (left scale) and cel/liter for diatoms (right scale). Polynomial tendencies are showed (Black lines).

The highest mean count occurred in August with 162 individuals/10 liter (16200 individuals/m<sup>3</sup>) whereas the lowest was in January with 25.8 individuals/10 liter (2 580 individuals/m<sup>3</sup>).

#### Spatial diatom-copepod abundances

Figure 4 shows the annual means of diatom and copepods+ nauplii counts in different stations of the gulf of Montijo. Copepod and nauplii abundances decreased from inshore to offshore stations and was higher at Piñas station (One-way ANOVA;  $p= 0.0894$ ). On the other hand, diatoms showed an opposite pattern increasing until a maximum at Perdomo station.

### SPATIAL COPEPOD-DIATOM ABUNDANCES

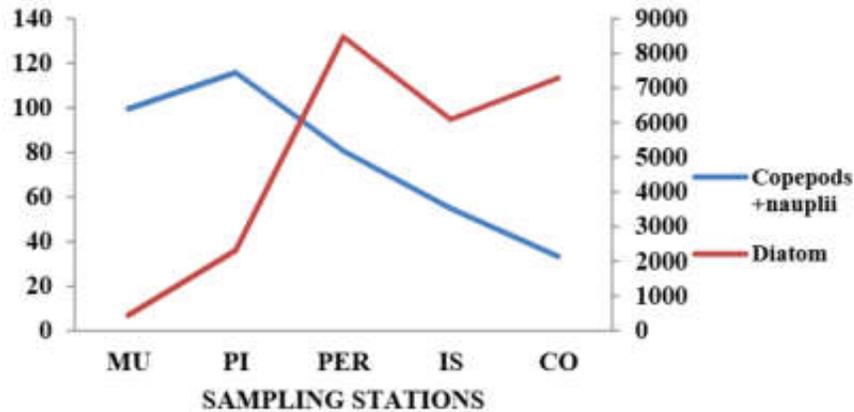


Fig.5. Abundances of diatoms and zooplankton in different station of the gulf of Montijo between November 1996 and December 1997. Values are annual mean of sampling stations and counts are expressed in individuals/10 liter for copepods and nauplii (left scale) and cel/liter for diatoms (right scale). (MU- Puerto Mutis; PE-Perdomo; PI- Piñas; IS-Tres Islas; CO-Punta Corotú).

### DISCUSSION

Diatoms have long been considered as a major food source for planktonic copepods and traditionally have been regarded as beneficial to the growth of marine organisms and a key piece to the transfer of organic material through the marine food chain to top consumer (Cushing 1989, Legendre, 1990). However, different laboratories worldwide have demonstrated an inhibitory effect of diatom on copepod reproduction (Poulet *et al.*, 1994, Syuhei *et al.*, 1997, Miralto *et al.*, 1999). As a consequence, a new biological model has been postulated to explain the apparent paradox of diatom-copepod interactions in the pelagic food web. According to the model while diatoms may provide a source of energy for copepod larval growth, they often reduce fecundity or hatching success or both (Ianora *et al.*, 2003, Roy & Chattopadhyay, 2007). This strategy allows diatoms to reduce the grazer population and since herbivorous copepods are the

major predator of diatoms one may expect correspondence between their abundances on different temporal and spatial scales. Field observations in the gulf of Montijo during the study period 1996-1997 were consistent with the model. Copepods and nauplii were numerically the major component of the zooplankton community whereas phytoplankton was diatom dominated. Both groups showed a distinct seasonal pattern. Copepods were dominant during the rainy season when diatoms abundances were low whereas on the dry season tendencies reverse. In estuarine environments, all living organisms are well known to be subjected to diverse physical, chemical and biological factors and observed changes of biomass reflect the net result of these forces. It remains to be demonstrated if deleterious effect of diatom over copepods is responsible by the copepod-diatom pattern observed.

### **CONCLUSIONS**

Field observations of copepod and diatom interactions in the gulf of Montijo during 1996-1997 periods were consistent with an inhibitory strategy of diatom on copepod abundances. Since changes in abundances might be the outcome of some other factors, it remains to be demonstrated if an inhibitory effect is responsible of observed changes.

### **ACKNOWLEDGMENTS**

The author thanks the financial support of the UNIPAN-BID program of the University of Panamá.

### **REFERENCES**

Bautista, B. & R. P. Harris. 1992. Copepod gut content, ingestion rates and grazing impact on phytoplankton in relation to size structure of zooplankton and phytoplankton during spring bloom. *Mar. Ecol. Prog. Ser.*, 82: 41-50.

Buskey, E. J. 1993. Annual cycle of micro- and mesozooplankton abundance and biomass in a subtropical estuary. *Journal of Plankton Research*. 15: 907-924.

Cushing, D. H. 1989. A difference in structure between ecosystems in strongly stratified waters and those that are only weakly stratified. *J. Plankton Res.*, 11: 1-13.

Dagg, M. J. 1995. Ingestion of phytoplankton by the microzooplankton and mesozooplankton community in a productive subtropical estuary. *J. Plankton Res.* 17: 845-857.

Fronemam, P. W. 2000. Feeding studies on selected zooplankton in a temperate estuary, South Africa. *Estuar. Coast. Shelf. Sci.*, 51: 543-552.

Garcia, J. R. & J. M. López. 1989. Seasonal patterns of phytoplankton productivity, zooplankton abundance and hydrological conditions in Laguna Joyuda, Puerto Rico. In *Topics in Marine Biology* (Ross, J. D., ed.). *Scientia Marina* 53: 625-631.

Gilbes, F., J. M. López & P. Yoshioka. 1996. Spatial and temporal variations of phytoplankton chlorophyll *a* and suspended particulate matter in Mayagüez Bay, Puerto Rico. *Journal of Plankton Research* 18 (1): 29-43.

Ianora, A. & S. A. Poulet. 1993. Egg viability in the copepod *Temora stylifera*. *Limnology and Oceanography*, 38:1615-1626.

Legendre, L. 1990. The significance of microalgal blooms for fisheries and for the export of particulate organic carbon in oceans. *J. Plankton Res.* 12: 681-699.

Miralto, A, G. Barone, G. Romano, S.A. Poulet, A. Ianora, GL. Russo, I. Buttino, G. Mazzarella, M. Laabir, M. Cabrini & M.G. Giacobbe. 1999. The insidious effect of diatoms on copepod reproduction. *Nature*, 402:173-176.

Poulet, S. A., A. Ianora, A. Miralto & L. Meijer. 1994. Do diatoms arrest embryonic development in copepods? *Marine Ecology Progress Series*, 111:79-86.

Roy, S. & J. Chattopadhyay. 2007. Toxin allelopathy among phytoplankton species prevents competition exclusion. *J. Biol. Syst.* 15(1): 1-21.

Runge, J. A. 1988. Should we expect a relationship between primary production and fisheries? The role of copepod dynamics as a filter of trophic variability. *Hydrobiologia*, 167: 61-71.

Syuhei, B., C. Burns, J. Castel, Y. Chaudron, E. Cristou, R. Escribano, S. Fonda Umani, S. Gasparini, F. Guerrero Ruiz, M. Hoffmeyer, A. Ianora, H. Kang, M. Laabir, A. Lacoste, A. Miralto, X. Ning, S. Poulet, V. Rodriguez, J. Runge, J. Shi, M. Starr, S. Uye & Y. Wang. 1997. The paradox of diatom-copepod interactions. *Mar. Ecol. Prog. Ser.* 157: 287-293.

Tilstone, G. H., F. G. Míguez, B. M. Figueiras & E. G. Fermin. 2000. Diatom dynamics in a coastal ecosystem affected by upwelling: coupling between species succession, circulation and biogeochemical processes. *Marine Ecology Progress Series*, 205(23-41).

U. S. Environmental Protection Agency. 1973. *Biological Field and Laboratory Methods for Measuring the Quality of Surface Waters and Effluents*. Office of Research and Development. EPA, Cincinnati, Ohio.

Yoshioka, P. M., G. P. Owen & D. Pesante. 1985. Spatial and temporal variations in Caribbean zooplankton near Puerto Rico. *Journal of Plankton Research* 7: 733-751.

*Recibido febrero de 2010, aceptado abril de 2011.*



**ESTRUCTURA DE LA COMUNIDAD EDÁFICA DE COLLEMBOLA (HEXAPODA: ENTOGNATHA), EN ÁREAS PRODUCTORAS DE BANANO, LOCALIZADAS EN ALANJE, PROGRESO Y BARÚ, PROVINCIA DE CHIRIQUÍ, PANAMÁ**

**<sup>1</sup>Bruno Zachrisson y <sup>1</sup>Onesio Martínez**

<sup>1</sup> Laboratorio de Entomología, Centro de Investigación Agropecuaria Oriental (CIAOr); Instituto de Investigación Agropecuaria de Panamá (IDIAP).

E-mail: bazsalam@sinfo.net

**RESUMEN**

El presente estudio tuvo como objetivo definir y conocer, la estructura de la comunidad edáfica de Collembola, en las localidades de Alanje, Progreso y Barú, ubicados en la provincia de Chiriquí, considerada la principal zona de banano en Panamá. La extracción de los monolitos de suelo se realizó de manera aleatoria, en las localidades estudiadas, las cuales fueron procesadas con auxilio del embudo de Berlesse. Los individuos colectados, fueron separados, procesados, montados e identificados al nivel taxonómico de familia. Se determinaron los índices de diversidad ( $\alpha$ ) propuestos por Shannon-Wiener, Margalef y por los coeficientes de similitud (Q). Los resultados destacaron la contribución significativa de familias Isotomidae y Entomobryidae, en la estructura de la comunidad edáfica de las zonas muestreadas. La abundancia relativa de individuos pertenecientes a las familias Onychiuridae, Poduridae y Sminthuridae, fue reducida. Los análisis realizados, confirmaron la semejanza de la estructura de la comunidad edáfica, entre las localidades de Alanje y Progreso.

**PALABRAS CLAVES**

Hexapoda, Entognatha, Collembola, comunidad edáfica, banano.

**ABSTRACT**

This study aimed to define and know the structure of the edaphic community of Collembola, in the localities of Alanje, Progreso and Barú, in the province of Chiriquí, which considered the main banana production zone in Panama. The

extraction of the soil monoliths was carried out in a random way, in these localities and was processed with aid of the Berlesse funnel. The collection of specimens, was conducted, separately, processed, mounted and identified to taxonomic family level. The analyses of the data were carried out by means of the diversity index ( $\alpha$ ) proposed by Shannon-Wiener and Margalef; and for the similarity coefficients (Q). The results highlight the significant contribution of the families Isotomidae and Entomobryidae, to the structure of the edaphic community of the areas sampled. The relative abundance of individuals belonging to the families Onychiuridae, Poduridae and Sminthuridae, was reduced. The analyses, confirmed the similarity of the structure of the edaphic community, between the locations of Alanje and Progreso.

## KEYWORDS

Hexapoda, Entognatha, Collembola, edaphic community, banana.

## INTRODUCCIÓN

El orden Collembola, es considerado un grupo primitivo de artrópodos (Gisin, 1943), que está relacionado directamente con la salud edáfica en los diversos ecosistemas, considerándose algunas especies de este grupo como bioindicadores de contaminación (van Straalen, 1997). El elevado grado de susceptibilidad de *Folsomia candida* (Isotomidae) y *Heteromurus nitidus* (Entomobryidae), a los cambios observados en la estructura y composición físico-química de los suelos de ecosistemas forestales del continente europeo, sustentan su papel como bioindicadores de contaminación (Cronau *et al.*, 1999; Salmon & Monge, 1999). En este sentido, parámetros biológicos tales como la longevidad y fecundidad de estas especies, se relacionan directamente con el pH del suelo y algunos contaminantes como Cadmio, Plomo y Zinc, lo que posibilita su uso como bioindicadores de la salud y calidad de suelos (Berrios, 2002; Cobarrubias *et al.*, 1992; Cronau *et al.*, 1999; Eisenbeis & Wichard, 1987; Greenslade & Vaughan, 2003; Hutson, 1978; Salmon & Ponge, 1999; van Straalen, 1997).

La adaptación de las diversas especies de Collembola, a ecosistemas que presentan diferentes tipos de suelo, es determinada entre otros factores por la cantidad de materia orgánica en descomposición y el pH (Rusek, 1998). Sin embargo, se necesita más información sobre los cambios en la dinámica de las comunidades edáficas de artrópodos y su relación con la variación en las propiedades físico-químicas de los suelos, principalmente cuando se trata de entender la sucesión

ecológica de los ecosistemas agrícolas y forestales (Chauvat *et al.*, 2003; Rusek, 1998).

La mayor parte de los estudios realizados sobre este tema, se concentran en ecosistemas forestales del continente europeo y australiano (Greenslade & Vaughan, 2003; van Straalen, 1997). A la fecha, los estudios realizados en América Latina, son pocos y la mayoría presentan resultados que no se ajustan a la realidad observada en los ecosistemas tropicales (Kanal, 2004). Sin embargo, existen evidencias de que independientemente de la zona biogeográfica estudiada, las relaciones tróficas y tendencias encontradas en las poblaciones de Collembola, son semejantes (Garita-Cambronero *et al.*, 2006; Greenslade & Vaughan, 2003).

Algunos trabajos pioneros realizados en el continente americano por Mari Mutt (1982), Mari Mutt & Berllinger (1996) y Palacios-Vargas (1992), presentaron observaciones preliminares sobre la distribución geográfica de más de 6,000 especies de colémbolos registradas para la región. De este total, solo 900 especies que representan 156 géneros, están debidamente identificadas para la región neotropical (Palacios-Vargas, 1992). En los bosques primarios de Panamá, se reportan tres (3) géneros endémicos (*Arlesia*, *Dicranocentrus* y *Folsomiella*), los cuales están restringidos para la región del neotrópico.

La actividad humana en los diferentes agroecosistemas, involucra actividades de fertilización y aplicación de agroquímicos, en la tentativa de promover la sostenibilidad de la producción agrícola a mediano y largo plazo (Ponge *et al.*, 1986; Rebek *et al.*, 2002). Razón por la cual, se sugiere que previo a la implementación de propuestas de investigación, se considere la definición de la estructura de la comunidad edáfica de artrópodos encontrados en los suelos destinados a la siembra de cultivos anuales. Por lo que, el presente trabajo tuvo como objetivo definir y conocer, la estructura de la comunidad edáfica de Collembola, en las localidades, de Alanje, Progreso y Barú, provincia de Chiriquí, Panamá.

## **MATERIALES Y MÉTODOS**

El presente estudio se realizó durante el año 2006, en las localidades de Alanje, Progreso y Barú, provincia de Chiriquí, en donde se concentra la principal zona productora de banano de Panamá. Para tal fin, se tomaron cincuenta muestras de suelo aleatoriamente, en cada una de las localidades estudiadas. Las mismas fueron extraídas por medio de monolitos de suelo con dimensiones de 100 cm<sup>3</sup>, próximas a plantas de banano seleccionadas previamente, las cuales fueron transferidas al laboratorio de entomología del Centro de Investigación Agropecuaria Oriental (CIAOr), del Instituto de Investigación Agropecuaria de Panamá (IDIAP), por medio de bolsas plásticas. Estas se rotularon con información pertinente, en donde se consideró la fecha de recolección de la muestra y el nombre de la localidad. El intervalo de tiempo entre la toma de la muestra en campo y la recepción de la misma en el laboratorio, no sobrepasó el período de 48 horas, aspecto que garantizó el control de calidad en el proceso de extracción de los artrópodos edáficos. Además, como medida para garantizar la calidad de la muestra procesada e impedir la alteración físico-química del suelo, se evitó la exposición directa a la radiación solar.

La extracción de ejemplares de Collembola entre otros artrópodos edáficos, encontrados en las muestras de suelos, representativas para las diferentes localidades estudiadas, se realizaron por medio del embudo de Berlesse (Mound & Marullo, 1996) (Figura 1).



Fig.1. Detalle de la muestra de suelo, en el interior del “Embudo de Berlesse”.

El período de tiempo entre el inicio de la extracción del material y la retirada de este, fue de seis (6) días, garantizando la preservación de las características morfológicas de los ejemplares, para la identificación de los especímenes. El número de muestras de suelo recolectadas por finca, totalizaron ocho (8).

Los individuos recolectados, específicamente los pertenecientes al orden Collembola, fueron separados y transferidos a viales de 3 cc con alcohol al 70%, los cuales se rotularon con codificaciones específicas de acuerdo a la fecha de recolecta, el nombre de la finca y el distrito. La preparación y montaje del material, constó de tres (3) etapas: a) limpieza, b) clarificación, c) fijación temporal ó definitiva. Inicialmente, se procedió a la limpieza del material utilizando KOH a 70%, durante 5 segundos, lo que facilitó la eliminación de impurezas encontradas en el interior de los especímenes. Posteriormente, para clarificar el material, se colocó una gota de lactofenol a 5%, sobre el ejemplar, por un período aproximado de siete (7) minutos. Posteriormente, se colocó el ejemplar sobre el porta objeto y se fijó temporalmente, utilizando el líquido de "Hoyer", luego de la identificación se fijó de manera definitiva con "Balsamo de Canadá". La identificación de los ejemplares a nivel de familia, se realizó utilizando claves taxonómicas específicas para el grupo en estudio, las cuales incluyen especies de la región neotropical (Palacios-Vargas, 1983; 1992) y se basaron en las características morfológicas discriminantes para la definición de la familia.

Con la finalidad de comparar la estructura de la comunidad edáfica con énfasis en el grupo Collembola, en cada localidad, se estimaron los índices de diversidad ( $\alpha$ ) propuestos por Shannon-Wiener (1949), Margalef (1951) y Southwood, (1978). Además, se determinaron los coeficientes de similitud (Q) indicados por Jacard (1908) y Sorensen (1948) (Southwood, 1978).

## **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

Trejos & Villalobos (2006), establecieron que uno de los indicadores que influyen en la salud y calidad de suelos bananeros, fue "Colémbolas Totales por Familia". La selección del indicador biológico "Colembolas Totales por Familia", es considerado como uno

de los más relevantes en la determinación de la calidad y salud de los suelos, para algunos ecosistemas tropicales y de zonas templadas (Berrios, 2002; Cronau *et al.*, 1999; Garita-Cambronero *et al.*, 2006; Greenslade & Vaughan, 2003; Salmon & Ponge, 1999; Rebek *et al.*, 2002; van Straalen, 1997).

La abundancia relativa definida por familia, para las localidades muestreadas, presentaron tasas superiores a 46 y 23%, para las familias Isotomidae y Entomobryidae, respectivamente (Cuadro 1). No obstante, la variabilidad en cuanto a la abundancia relativa por familia, en cada localidad, pudo atribuirse al manejo fitosanitario del cultivo, entre otros factores. Rebek *et al.* (2002), estudiaron el impacto de cuatro (4) sistemas de producción, sobre la abundancia y diversidad de la fauna edáfica de Collembola, en donde se destacó la aplicación de fertilizantes y de agroquímicos como parte del programa de manejo. Además, la variación del pH de 5.6 y de la materia orgánica de 1.4%, encontrados en estas zonas productoras pueden influir sobre la abundancia relativa presentadas por las familias de Collembola (Villalobos & Trejos, 2006). Estas variables a juicio de diversos autores pudieron afectar la biología reproductiva de las diferentes especies de Collembola (Greenslade & Vaughan, 2003; Salmon & Ponge, 1999), afectando consecuentemente la abundancia relativa.

Los índices de diversidad (Southwood, 1978), determinaron que las familias Isotomidae y Entomobryidae, tuvieron mayor representación en todas las localidades muestreadas (Cuadro 1). La abundancia relativa de las familias de Collembola y los índices de diversidad, determinados para las localidades de Alanje, Progreso y Barú (Cuadro 1), permitieron caracterizar la estructura edáfica de Collembola, en estas localidades. La elevada abundancia relativa de las familias Isotomidae y Entomobryidae, confirman la contribución de estas familias a la estructura edáfica de colémbola, para las localidades muestreadas. Por el contrario, la reducida abundancia relativa de las familias Onychiuridae, Poduridae y Sminthuridae, puede atribuirse a la susceptibilidad de las especies a las diversas variables edáficas, entre otros factores, encontradas en los suelos de estas localidades. Por lo cual se recomienda, el registro de géneros y especies, encontrados dentro de estas familias, que presenten características de indicadores biológicos, para los suelos destinados al cultivo del banano. No

obstante, se hace necesario la implementación de estudios taxonómicos que permitan identificar los géneros y especies, consideradas como posibles indicadores biológicos de la salud y calidad, para estos suelos de vocación agrícola.

Cuadro 1. Abundancia relativa (%) de las familias de Collembola (Hexapoda: Entognatha) e índices de diversidad ( $\alpha$ ), para los distritos de Alanje, Progreso y Barú, provincia de Chiriquí, Panamá. 2006.

Distrito	Número Total de Ind. / Collembola	Número de Familias / Collembola	Total de Ind. / Isotomidae	Total de Ind. / Entomobryidae	Total de Ind. / Onychuridae	Total de Ind. / Poduridae	Total de Ind. / Sminthuridae	Índice de Diversidad (Margalef)	Índice de Diversidad (Shannon-Wiener)
Alanje	1,480	5	699 (47.22%)	544 (36.75%)	193 (13.04%)	17 (1.14%)	27 (1.82%)	0.5480	0.4826
Progreso	134	4	56 (41.79%)	32 (23.88%)	23 (17.16%)	0	23 (17.16%)	0.6125	0.5694
Barú	669	4	311 (46.48%)	258 (38.56%)	21 (3.13%)	0	79 (11.80%)	0.4612	0.4701

Los coeficientes de similitud Sorensen y Jacard (Cuadro 2), indicaron que existe un elevado nivel de semejanza en la estructura edáfica de la comunidad de Collembola, entre las localidades de Alanje y Progreso. Rebek *et al.* (2002), afirmaron que los colémbolos responden a la alteración de la estructura de los suelos producto de la actividad agrícola y antropogénica. De esta forma, se puede afirmar que el manejo agronómico en las localidades de Alanje y Progreso, destinadas al cultivo del banano, impacto de manera semejante a la población de colémbolos.

Cuadro 2. Coeficiente de similitud ( $Q$ ,  $Q_s$ ) y porcentaje de similitud (%S), en las localidades muestreados de la provincia de Chiriquí, Panamá. 2006.

Comparación entre Localidades	Coeficiente de Similitud ( $Q_j$ ) (Jacard)	Coeficiente de Similitud ( $Q_s$ ) (Sorensen)	Porcentaje de Similitud (% S)
Alanje: Progreso	0.9170	0.9567	82.90
Progreso: Barú	0.1669	0.2860	79.10
Alanje: Barú	0.6889	0.8157	86.90

La interpretación general de los resultados, permitieron definir la estructura de la comunidad edáfica de Collembola y establecieron parámetros de comparación para determinar la salud y la calidad de los suelos bananeros. El impacto del manejo agronómico y fitosanitario, que se implemente en el futuro, para las diferentes áreas de producción bananera de Panamá, podrá cuantificarse ya sea por la abundancia relativa de las familias Onychiuridae, Poduridae y Sminthuridae, o por medio de los índices de diversidad y similitud.

### CONCLUSIONES

Las familias Isotomidae y Entomobryidae, contribuyeron de manera significativa a la estructura de la comunidad edáfica de Collembola, en las zonas productoras de banano de Panamá.

Los coeficientes de similitud propuestos, confirmaron la semejanza en cuanto a la calidad y salud de los suelos de vocación arrocera, para las localidades de Alanje y Progreso, considerando la estructura edáfica de la comunidad de Collembola, como referencia.

### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la coordinación del proyecto "Innovaciones tecnológicas para el manejo y mejoramiento de la calidad y salud de suelos bananeros, en América Latina y el Caribe", financiado por FONTAGRO, cuyos fondos fueron manejados por Bioversity.

## REFERENCIAS

- Berrios, P. 2002. Artrópodos asociados a suelos renovables de *Nothofagus obliqua* (Mirb.) Oersted (Fabacea) en la zona costera de la VIII región. Gayana, 66 (1): 1-6.
- Chauvat, M., A. S. Zaitsev & V. Wolters. 2003. Successional changes of Collembola and soil microbiota during forest rotation. Oecologia, 137: 269-276.
- Cobarrubias, R., C. Cobarrubias & I. Mellado. 1992. Microartrópodos en suelos de bosques de *Nothofagus pumilio* en parques nacionales de Chile. Acta Entomológica Chilena, 18: 41-51.
- Cronau, Y., P. Chenon & C. Gisclard. 1999. The use of *Folsomia candida* (Collembola: Isotomidae) for the bioassay of xenobiotic substances and soil pollutants. Applied Soil Ecology, 12: 103-111.
- Eisenbeis, G. & W. Wichard. 1987. Atlas on the biology of soil arthropods. Springer-Verlag, Berlin, Alemania. 437 pp.
- Garita-Cambronero, J., A. Duarte-Madrigal & Retana-Salazar. 2006. A. Indicadores eficientes de salud edáfica. MES, 1 (11): 23-32.
- Greenslade, P. & G. Vaughan. 2003. A comparison of Collembola species for toxicity testing of Australian soils. Pedobiologia, 47: 171-179.
- Hutson, B. R. 1978. Influence of pH, temperature and salinity on the fecundity and longevity of four species of Collembola. Pedobiologia, 18: 163-179.
- Iannacone, J. & L. Alvarino. 2006. Diversidad de la artropofauna terrestre en la Reserva Nacional de Junín, Perú. Ecología Aplicada, 5 (1, 2): 171-174.
- Kanal, A. 2004. Effect of fertilization and edaphic properties on soil-associated Collembola in crop rotation. Agronomy Research, 2 (2): 153-118.

Mari Mutt, J. A. & P. F. Bellinger. 1996. Supplement to the Catalog of the Neotropical Collembola - August 1989 to April 1996. Caribbean Journal of Science, 32 (2): 166-175.

Mound, L. A. & R. Marullo. 1996. The thrips of Central and South America: An introduction (Insecta: Thysanoptera). Mem. Entomol. 487 p.

Palacios-Vargas, J.G. 1983. Catálogo de los colémbolos mexicanos. An. Esc. Nal. Cienc. Biol., 27: 61-76.

Palacios-Vargas, J.G. 1992. Guide to the springtails of Panama and Costa Rica (Collembola). In: Quintero, D. y Aiello, A. (eds.), Insects of Panama and Mesoamerica: Selected studies, pp. 25-36. Oxford University Press, Oxford.

Ponge, J. F., G. Vannier, P. Arpin & J. F. David. 1986. Soil fauna and site assessment in beech stands of the Belgian Ardennes. Canadian Journal of Forest Research, 27: 2053-2064.

Rebek, E. J., D. B. Hogg & D. K. Young. 2002. Effect of four cropping systems on the abundance and diversity of epedaphic springtails (Hexapoda: Parainsecta: Collembola) in Southern Wisconsin. Environmental Entomology, 31 (1): 37- 46.

Rusek, J. 1998. Biodiversity of Collembola and their functional role in the ecosystem. Biodiversity and Conservation, 7: 1207-1219.

Salmon, S. & J. F. Ponge. 1999. Distribution of *Heteromurus nitidus* (Hexapoda, Collembola) according to soil acidity: interactions with earthworms and predator pressure. Soil Biology and Chemistry, 31: 1161-1170.

Southwood, T. R. E. 1978. Ecological methods with particular reference to the study of insects populations. 2 Ed. Chapman and Hall Publication, London 524 p.

Trejos, J. & M. Villalobos. 2006. Construcción del índice de calidad y salud de suelos bananeros en Panamá. Informe del Proyecto

“Innovaciones tecnológicas para el manejo y mejoramiento de la calidad y salud de suelos bananeros, en América Latina y el Caribe”, 11 pp.

van Straalen, N. M. 1997. Community structure of soil artropods as bioindicators of soil health. In: Pankhurst, C. E., Double, B.M. and Gupta, V. V. S. R. eds. Biological Indicators of Soil Health. CAB International, Wallingford, UK, pp. 235-264.

Villalobos, M. & J. Trejos. 2006. Rango y curvas de respuesta de los indicadores seleccionados para Panamá. Informe del Proyecto “Innovaciones tecnológicas para el manejo y mejoramiento de la calidad y salud de suelos bananeros, en América Latina y el Caribe”, 15 pp.

*Recibido enero de 2011, aceptado mayo de 2011.*



**FIRST RECORD OF THE PRESENCE OF MANGROVE BORER SPHAEROMA PERUVIANUM RICHARDSON (ISOPODA: SPHAEROMATIDAE) IN THE GULF OF MONTIJO, PANAMA**

**Carlos E. Seixas G.**

Centro Regional de Veraguas, Universidad de Panamá.

E-mail: carlosseix@hotmail.com

**ABSTRACT**

A field survey was carried out to investigate the presence of mangrove borers at the mouth of San Pablo River in the Gulf of Montijo, western Pacific of Panamá. Previous reports of the National Environment Authority (ANAM) indicate a high degree of root tip atrophy and breakage in young plants of red mangrove, *Rhizophora mangle*. Samples of roots were sawed off and examined for isopod burrow openings. Analysis revealed the presence of the eastern Pacific root-boring *Sphaeroma peruvianum* Richardson. The organism bore the roots and it is the likely cause of fall trees due to the lack of root support. A voucher specimen was deposited in the Smithsonian National Museum of Natural History, Washington, DC (USNM 1139603).

**KEYWORDS**

Isopods, Mangrove, Root borer, *Rhizophora mangle*.

**RESUMEN**

Se efectuó un estudio de campo con el propósito de investigar la presencia de barrenadores de mangle en la desembocadura del río San Pablo en el Golfo de Montijo, Pacífico oeste de Panamá. Informes previos de la Autoridad Nacional del Ambiente (ANAM) describen un alto grado de atrofia radicular en plantas jóvenes de *Rhizophora mangle*. Se recolectaron muestras de raíces en busca de evidencia de isópodos barrenadores. Los análisis revelaron la presencia de *Sphaeroma peruvianum* Richardson, un barrenador de mangle rojo activo en el Pacífico y

reportado previamente para el golfo de Nicoya, Costa Rica. El organismo perfora las raíces y es la causa probable del colapso de los árboles por debilitamiento del soporte radicular. Se depositaron especímenes testigo en el Museo Nacional de Historia Natural Smithsonian en Washington, D.C. (USNM 1139603).

### **PALABRAS CLAVES**

Isópodos, Manglar, Barrenador de Raíces, Mangle Rojo, *Rhizophora mangle*.

The Gulf of Montijo is located on the Pacific coast, about 30 km southwest of the city of Santiago, province of Veraguas, western Panama (Coordinates: 07°45'N, 081°07'W). It is an estuarine system with humid tropical climate and fringed by mangroves with a wide variety of landscapes. On 12 June 2009 we participated in a survey to explore affected areas at the mouth of San Pablo River. A general view showed that a substantial fraction of the prop roots of young red mangrove plants were colonized by oysters and barnacles. Isopod burrow opening also were evident (Fig.1).

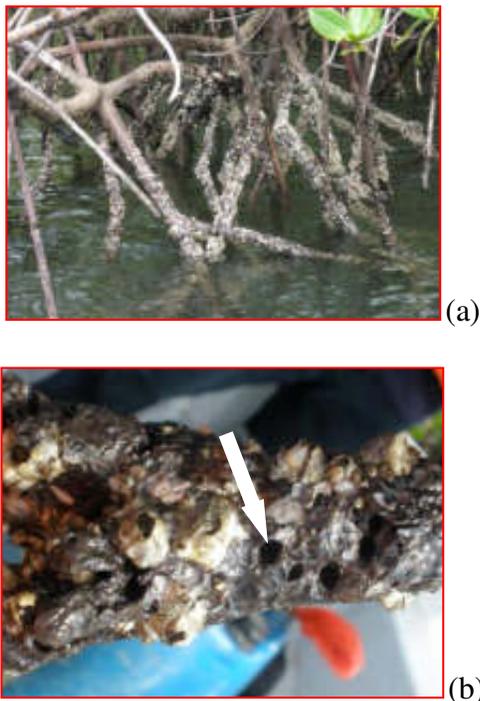


Fig. 1. Invasion of red mangrove roots by oyster, barnacles (a) and scattered burrow openings (b).

Roots were sawed off, placed into plastic bags and transported to the laboratory for analysis. Openings were habitated by the eastern Pacific root-boring *Sphaeroma peruvianum* Richardson (Fig 2).



(a)



(b)

Fig. 2. Burrows excavated in young roots (a) by *Sphaeroma peruvianum* Richardson (b).

The organism was found mainly in burrows excavated in roots of red mangrove although it probably also makes burrows in roots of other species. The distribution of holes was irregular and many isopods were collected from the roots. Voucher specimens were deposited in

the Smithsonian National Museum of Natural History, Washington, DC (USNM 1139603). Wood-boring isopods are common organisms of mangrove swamps. The Pacific *Sphaeroma peruvianum* Richardson and the Caribbean *Sphaeroma terebrans* Spence –Bate, bore into the growing tips of *Rhizophora mangle* L. once the roots have reached down to the high water line. However, studies of the effect of isopods on the vitality of red mangrove plants are controversial. According to Rehm & Humm (1973), isopods bores into the growing roots of the red mangrove *R. mangle* causing failure of roots to reach the ground, decreased productivity and instability of the mangrove community. On the other hand, Simberloff et al. (1978) suggested that *Sphaeroma* stimulate new branching of aerial root tips and as a consequence, new prop roots. Perry & Brusca (1989) studied the effect of *S. peruvianum* on roots of the red mangrove *R. mangle* in a mangrove forest in the Gulf of Nicoya, Costa Rica and observed a 50% reduction in aerial root growth rate in the presence of isopods. The reduction was due to atrophy and breakage of the root tips caused by boring isopods. They concluded that the stimulation of new root tip growth does not compensate for this loss. Brooks (2004) reported the presence of *S. terebrans* in Northern Florida and suggested that changes in the root system as a result of isopod burrowing not only alter structural support and nutrient provision for the tree itself but may also affect other flora and fauna which utilize the mangrove roots as a substratum or protective habitat. The organism is here reported the first time for Panamá. The nearest location formerly reported was the Gulf of Nicoya, Costa Rica (Perry & Brusca, 1989).

#### **ACKNOWLEDGMENTS**

We are grateful to Marilyn Schotte, specialist of the National Museum of Natural History of the Smithsonian Institution for the precise identification of the species. Also, to the biology students Dicialia Urriola and Cecibell Bonilla for helping me in the field work. The author thanks also the logistic support of the National Environment Authority (ANAM) and the Aquatic Resources Authority (ARAP).

## REFERENCES

Brooks, R. 2004. Discovery of *Sphaeroma terebrans*, a wood-boring isopod in the red mangrove. *Rhizophora mangle*, habitat of northern Florida Bay. *Ambio* 33(3): 171-173.

Perry, D. M. & R. C. Brusca. 1989. Effects of the root-boring isopod *Sphaeroma peruvianum* on red mangrove forest. *Mar. Ecol. Prog. Ser.* 57: 287-292.

Rehm, A. & H. J. Humm. 1973. *Sphaeroma terebrans*: a threat to the mangroves of southwestern Florida. *Science* 182:173-174.

Simherloff, D., B. J. Brown & S. Lowrie. 1978. Isopod and Insect root borers may benefit Florida mangroves. *Science* 201: 630-632.

*Recibido febrero de 2011, aceptado junio de 2011.*



**PRIMER REGISTRO PARA PANAMÁ DE *BRACHYCYRTUS COSMETUS* (WALKLEY, 1956) (HYMENOPTERA, ICHNEUMONIDAE, BRACHYCYRTINAE)**

**Rubén D. Collantes G.**

Programa Centroamericano de Maestría en Entomología, Vicerrectoría de Investigación y Postgrado, Universidad de Panamá.

E-mail: rdcg31@hotmail.com

**RESUMEN**

Se registra por primera vez a *Brachycyrtus cosmetus* (Hymenoptera, Ichneumonidae, Brachycyrtinae) en Panamá. El espécimen corresponde a un macho emergido de una pupa de Chrysopidae (Neuroptera), recolectada de hojas de *Ficus benjamina* (Moraceae). Se provee una breve descripción del hábitat donde fue colectado el ejemplar, junto con imágenes de la especie.

**PALABRAS CLAVES**

Ichneumonidae. Parasitoide. Chrysopidae. Nuevo registro. Panamá.

**ABSTRACT**

*Brachycyrtus cosmetus* (Hymenoptera, Ichneumonidae, Brachycyrtinae) is reported for the first time in Panama. The specimen corresponds to a male emerged from a pupa of Chrysopidae (Neuroptera), collected from leaves of *Ficus benjamina* (Moraceae). A brief description is provided with the habitat where the specimen was collected, along with pictures of the species.

**KEYWORDS**

Ichneumonidae. Parasitoid. Chrysopidae. New record. Panama.

## INTRODUCCIÓN

El género *Brachycyrtus* Kriechbaumer, 1880, está constituido por 15 especies de hábitos ectoparasitoides idiobiontes de prepupas y pupas de Chrysopidae (Neuroptera) (Gauld, 2006). Cushman (1936), registró por primera vez el género para América y describió tres especies: *B. pretiosus*, *B. convergens* y *B. oculatus*, siendo las dos últimas recolectadas en Lago Gatún, Panamá.

Walkley (1956), describe el género *Habryllia* y la especie tipo del género: *H. cosmata*. Gauld (2000), realiza la nueva combinación: *Brachycyrtus cosmetus* (Walkley).

Durante estudios realizados sobre artrópodos asociados con *Ficus benjamina* L., se recolectó de una hoja afectada por *Gynaikothrips uzeli* (Thysanoptera: Thripidae) una pupa de Chrysopidae, la cual se mantuvo bajo observación en laboratorio por siete días hasta la emergencia de un parasitoide macho.

El presente trabajo tuvo por objetivo identificar la especie a la cual pertenece dicho parasitoide y determinar si corresponde a un nuevo registro para Panamá.

## METODOLOGÍA

El espécimen colectado ha sido depositado en la Colección Entomológica del Programa Centroamericano de Maestría en Entomología de la Universidad de Panamá (PMEUP). Para la adecuada identificación del espécimen, se consultó los trabajos de Cushman (1936), Walkley (1956) y Gauld (2000; 2006). Complementariamente, se revisó la Colección Entomológica del Museo de Invertebrados G. B. Fairchild de la Universidad de Panamá (MIUP).

## Material examinado

*Brachycyrtus cosmetus* (Fig. 1). 1 adulto ♂. PANAMÁ. Provincia de Panamá. Tocumen. Río Tapia. 23-jun-2009 (*Collantes*). Det. Collantes G., R.D. [PMEUP]. 1 adulto ♀. TRINIDAD. St Patrick, Bonasse, ago-1976 (*Noyes*). BM 1976-462. Det. Gauld, I. [MIUP].

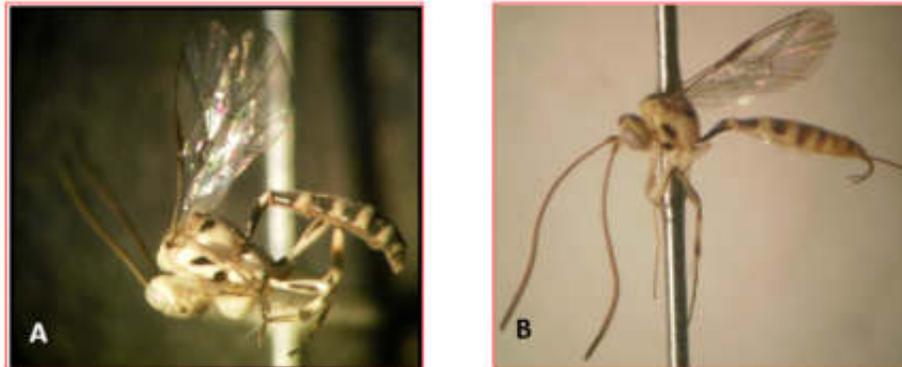


Fig. 1. *Brachycyrtus cosmetus* (Walkley, 1956): A) Macho; B) Hembra.

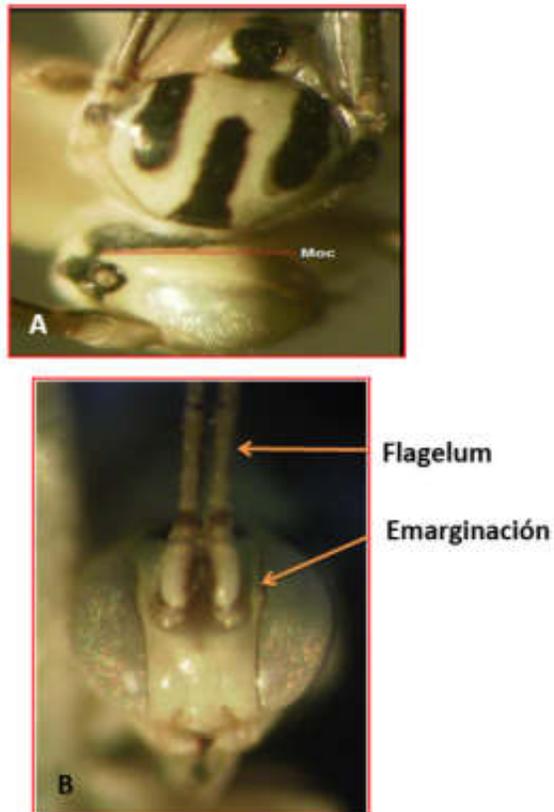


Fig. 2. A) Patrón de manchas en cabeza y tórax de *B. cosmetus*: Mancha ocelar (Moc) conectada con mancha occipital. B) Cabeza del macho (vista frontal).

### **Hábitat**

La localidad de colecta corresponde a las áreas verdes de la Dirección Nacional de Sanidad Vegetal, situada en Río Tapia, Tocumen-Panamá. Según Gauld (2000), esta especie se encuentra distribuida desde Costa Rica, pasando por Suramérica a través de Venezuela, Trinidad y Surinam, llegando hasta el norte de Brasil. Posteriormente, Onody *et al.* (2009), colectaron esta especie en varios ecosistemas diferentes de Brasil: Caatinga, Cerrado, humedales del pantanal y áreas donde se practica agricultura orgánica y convencional.

### **Discusión**

Gauld (2000), afirmó que se desconocía el hospedante de esta especie, debido a que la mayor parte del material fue obtenido por métodos indirectos de recolección. Por tanto, la emergencia del espécimen macho identificado como *B. cosmetus* corrobora la afirmación de Cushman (1936), situando a las especies del género como parasitoides de pupas de Chrysopidae.

*Brachycyrtus cosmetus* no ha sido reportada en Panamá, hasta donde se conoce, siendo este el primer registro. Es recomendable revisar otras colecciones entomológicas en Panamá, a fin de determinar si más especímenes del género *Brachycyrtus* han sido recolectados. Cushman (1936) y Onody *et al.* (2009), han reportado otras especies de *Brachycyrtus* en Panamá, i.e. *B. oculatus*.

### **AGRADECIMIENTOS**

A los Profesores Cheslavo Korytkowski y Héctor Barrios, por sus enseñanzas y apoyo constante. Al Profesor Roberto Cambra, por facilitar acceso a la colección de insectos del MIUP. Al Dr. Paul Hanson, por responder las consultas formuladas sobre taxonomía de Hymenoptera. A la Dirección Nacional de Sanidad Vegetal, por el apoyo técnico y logístico brindado para el desarrollo de esta investigación.

## REFERENCIAS

Cushman, R. A. 1936. The Ichneumon-flies of the genus *Brachycyrtus* Kriechbaumer. Proceedings of the United States National Museum, 84: 17-24.

Gauld, I. 2000. The Ichneumonidae of Costa Rica, 3. Memoirs of the American Entomological Institute, 63: 453 p.

Gauld, I. 2006. Familia Ichneumonidae. Págs. 446-487. En: Hymenoptera de la Región Neotropical (Hanson, P. y Gauld, I., eds.). Memoirs of the American Entomological Institute, 77: 994p.

Onody, HC., APS Loffredo & AM. Pentead-Dias. 2009. Notes on the Brazilian *Brachycyrtus* Kriechbaumer species (Hymenoptera, Ichneumonidae, Brachycyrtinae). Brazilian Journal of Biology, 69(3): 981-982.

Walkley, L. M. 1956. A tribal revision of the Brachycyrtine wasps of the world (Cryptinae-Ichneumonidae). Proceedings of the United States National Museum, 106: 315-329.

*Recibido marzo de 2011, aceptado julio de 2011.*



## **APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE HIPÓTESIS DE PROPORCIÓN Y DE DIFERENCIAS DE PROPORCIONES A LA INCIDENCIA DE MORDEDURAS CANINAS**

**Saskia Dayana Ayala Flores**

Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología,  
Departamento de Estadística.

e-mail: saskia306@yahoo.es – Teléfonos: oficina: 523-6243 - celular: 6151-6311.

### **RESUMEN**

Las mordeduras de animales pueden producir lesiones de diversa gravedad con riesgo y secuelas cosméticas, complicaciones infecciosas, daños emocionales y elevados costos sanitarios. En nuestro país son escasos y parciales los datos estadísticos y epidemiológicos locales. El blanco de esta investigación fue la población de 1 a 15 años atendidos en instalaciones de salud del Distrito San Miguelito durante los meses de enero a junio de 2008. Los objetivos generales del estudio fueron determinar la incidencia de menores atendidos por mordeduras y ataques de perro; describir los tipos de traumatismo y la gravedad de las lesiones físicas más frecuentes. Se trabajó con dos grupos: menores atendidos por otras causas (Grupo Control) y menores atendidos por mordeduras de perro (Grupo Experimental). Se analizaron las variables sexo, edad, gravedad de la atención y estación climatológica de la atención. Con los resultados fue posible confeccionar un perfil de los menores que son afectados por mordeduras caninas: mordeduras en la cara y extremidades superiores hechas por el perro de la casa a menores masculinos de 1 a 5 años durante la estación seca. Otros resultados relevantes fueron que al aumentar la edad de los menores, disminuye la cantidad de afectados y las mordidas son en las extremidades superiores; la incidencia por mordeduras caninas en los menores de 1 a 15 años fue 33,3%. Mediante pruebas de hipótesis se concluyó que: entre los menores de 1 a 5 años, la proporción de afectados por mordeduras caninas es mayor que la proporción de afectados por otras causas de traumatismo.

## **PALABRAS CLAVES**

Incidencia; mordeduras caninas; prueba de hipótesis de proporción; prueba de hipótesis de diferencia de proporciones; menores de 1 a 15 años; grupo etario; grupo control; grupo experimental; perfil.

## **ABSTRACT**

Animal bites can produce injuries of varying severity with risk and cosmetic squeals, infectious complications, emotional damage and high health care costs. In our country there are scarce and partial statistics and local epidemiology. The target of this research was the population of 1-15 years who attended health facilities in San Miguelito district during the months of January to June 2008. The general objectives of the study were to determine the incidence of children treated for dog bites and attacks, to describe the types of trauma and severity of physical injuries more frequent identification of the time, place, weather station and location of the area at the time of occur from aggression by the dog. We worked with two groups: children treated for other reasons (control group) and children treated for dog bites (experimental group). Variables such as sex, age, severity of the weather station attention and care to present were analyzed. With the results was possible to compile a profile of children who are affected by dog bites: bites on the face and upper limbs made by the dog house male minors from 1 to 5 years during the dry season. Other results were: increasing age of children decreases the number of patients and their bites are in the upper extremities, the incidence of dog bites in children 1 to 15 years was 33.3%. Using hypothesis tests, it was concluded that among children under 15 years, the proportion of people affected by dog bites is higher than the proportion of people affected by other causes of trauma.

## **KEYWORDS**

Incidence, dog bites, hypothesis testing of proportion, hypothesis testing of difference in proportions, children less than 1 to 15 years age group, control group, experimental group; profile.

## **INTRODUCCIÓN**

Si bien la posesión de animales se remonta a épocas antes de Cristo, hoy las motivaciones que nos llevan a convivir con un animal de compañía son diversas, desde afectivas y recreativas hasta la seguridad. A raíz de esta situación pueden surgir, inconvenientes en la convivencia, como son las mordeduras. En Panamá, se ha presentado un aumento de la población canina en la última década, en especial en

áreas como San Miguelito, Chorrera y Arraiján (entrevista, 2009). En consecuencia, las mordeduras caninas han aumentado, en especial en el Distrito de San Miguelito (Cuadro 1).

Cuadro 1. Mordeduras caninas o ataques de perro en Panamá, según localización geográfica. Año: 2005 – 2007.

Región	Año			Total
	2005	2006	2007	
San Miguelito	728	118	893	<b>1739</b>
Panamá Metro	305	522	446	<b>1273</b>
Panamá Oeste	797	907	683	<b>2387</b>
<b>Total</b>	<b>1830</b>	<b>1547</b>	<b>2022</b>	<b>5399</b>

**Fuente:** Región de Salud de San Miguelito. Año 2007.

En Panamá existe poco conocimiento de la magnitud del problema debido a que no se han realizado estudios técnicos científicos sobre esta patología (entrevista, 2009). El blanco de esta investigación fue la población de 1 a 15 años atendidos en instalaciones de salud del Distrito San Miguelito durante los meses de enero a junio de 2008. Los objetivos generales del estudio fueron determinar la incidencia de menores atendidos por mordeduras y ataques de perro; describir los tipos de traumatismo y la gravedad de las lesiones físicas más frecuentes; identificar el horario, lugar, la estación climatológica y ubicación del área al momento de ocurrir de la agresión por el perro. Algunos de los objetivos específicos fueron probar que la incidencia de las mordeduras de perro es inferior al 40%; determinar que la proporción de los menores atendidos por mordeduras de perro es inferior a la proporción de menores atendidos por otras causas de traumatismo; establecer que la proporción de menores masculinos de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro es superior a la proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por otras causas de tipo leve. De los objetivos se desprendieron los enunciados de las siguientes hipótesis generales: la incidencia de las mordeduras de perro es menor del 40%; la proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro es menor que la proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por otras causas de traumatismo; la proporción de menores atendidos por mordeduras de perro leve es menor que la proporción de menores atendidos por otras causas de traumatismo

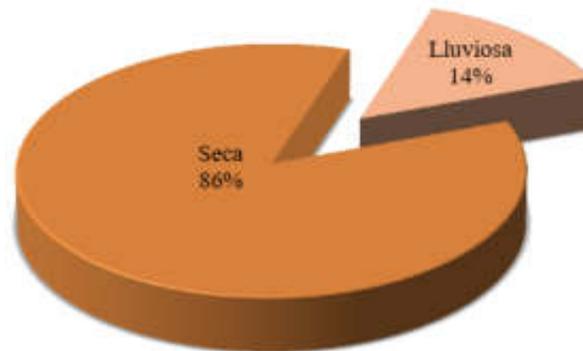
leve; la proporción de menores masculinos atendidos por mordeduras de perro es menor que la proporción de menores masculinos atendidos por otras causas de traumatismo; la proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro leves es menor que la proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por otras causas de traumatismo leves; la proporción de menores masculinos de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro leves es mayor que la proporción de menores masculinos de 1 a 5 años atendidos por otras causas de traumatismo leves.

### **METODOLOGÍA**

El estudio fue de carácter descriptivo, comparativo y analítico<sup>3,4</sup>. Para la recolección de la información se confeccionó una ficha para cada menor de 1 a 15 años que asistió a las instalaciones sanitarias oficiales del Distrito de San Miguelito en el período comprendido entre el 1 de enero al 30 de junio de 2008. La ficha contenía datos del atacado y del ataque como la edad del menor al momento de la agresión, sexo, área geográfica de residencia, sitio anatómico de la mordida, fecha y hora de la agresión. A los datos obtenidos se les dio un tratamiento estadístico descriptivo: cuadros, gráficas, medidas de tendencia central y de dispersión, y finalmente se aplicaron las pruebas de hipótesis adecuadas. La recolección de datos se hizo durante los meses de enero a julio de 2009.

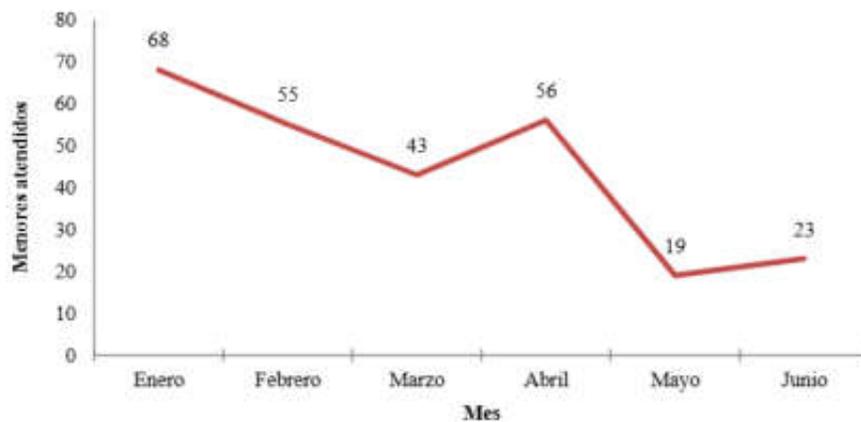
### **RESULTADOS**

Se analizaron los resultados de variables como sexo, edad, gravedad de la atención y estación climatológica de la atención para presentar un perfil de los menores que son afectados por mordeduras caninas y se determinó el perfil de los afectados: todos los ataques son hechos por el perro de la familia; predominan los ataques durante la estación seca (Fig. 1) y coinciden con los meses de vacaciones escolares (Fig. 2); en la casa, en la calle cerca del vecino o en la calle cerca de la escuela (Fig. 3); los ataques suceden en horas de la mañana (Fig. 4); las mordidas se dan en la cara y extremidades superiores en los menores masculinos de 1 a 5 años y que al aumentar la edad de los menores, disminuye la cantidad de afectados y las mordidas se dan en las extremidades inferiores (Fig. 5).



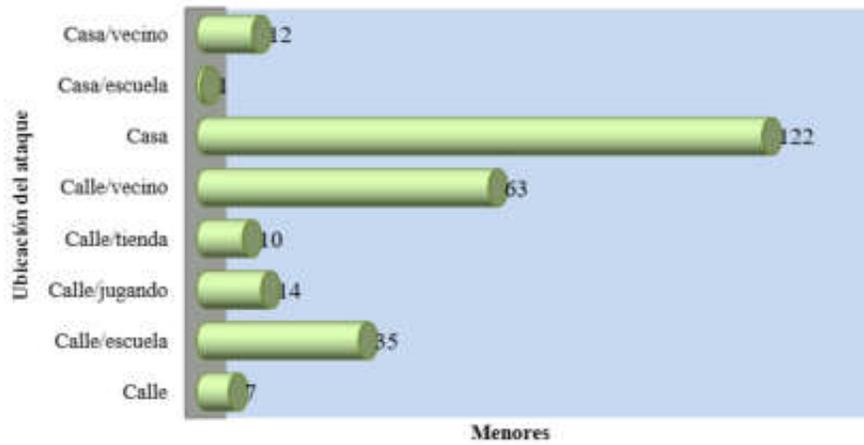
**Fuente:** Sección de Registros Médicos y Estadísticas de Salud, 2008.

**Fig.1.** Menores atendidos por mordidas de perro en instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito, según estación climatológica. Año: 2008.



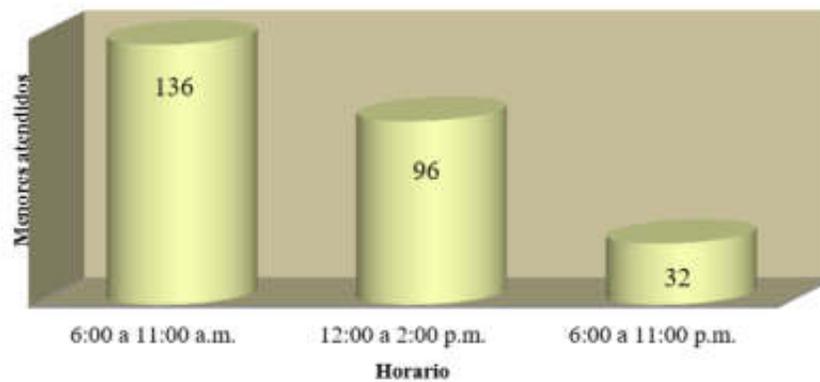
**Fuente:** Sección de Registros Médicos y Estadísticas de Salud, 2008.

**Fig. 2.** Menores atendidos por mordidas de perro en instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito, según mes en que ocurrió el ataque. Año: 2008.



**Fuente:** Sección de Registros Médicos y Estadísticas de Salud, 2008.

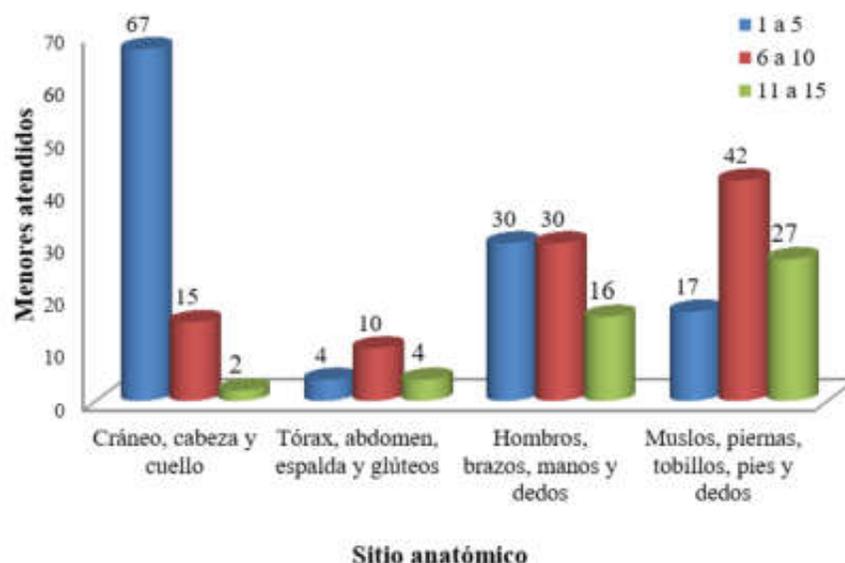
**Fig. 3.** Menores atendidos por mordidas de perro en instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito, según lugar donde ocurrió el ataque. Año: 2008.



**Fuente:** Sección de Registros Médicos y Estadísticas de Salud, 2008.

**Fig. 4.** Menores atendidos por mordidas de perro en instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito, según hora en que ocurrió el ataque. Año: 2008.

Para el propósito de esta investigación se dividió los 792 menores en dos grupos (Cuadro 2): los atendidos por otras causas (control) y los atendidos por mordeduras caninas (experimental).



**Fuente:** Sección de Registros Médicos y Estadísticas de Salud, 2008.

**Fig. 5.** Menores atendidos por mordidas de perro en instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito, por sitio anatómico del ataque, según grupo etario. Año: 2008.

**Cuadro 2.** Menores de 1 a 15 años atendidos en instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito, según grupos de estudio. Año: 2008.

Grupo	Afectados	%
Control	528	66,7%
Experimental	264	33,3%
<b>Total</b>	<b>792</b>	<b>100,0%</b>

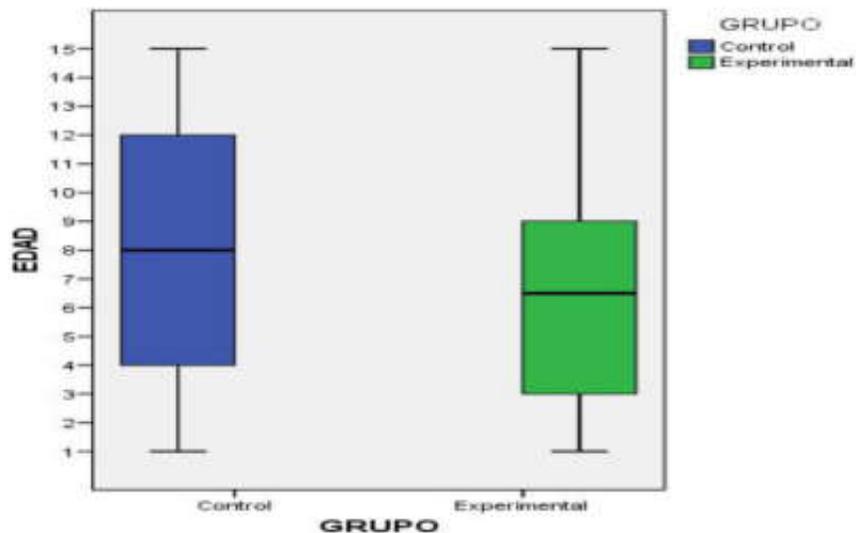
**Fuente:** Sección de Registros Médicos y Estadísticas de Salud, 2008.

En general, la edad promedio de los menores atendidos fue de 7,5 años. No hubo mucha diferencia en la edad promedio para ambos grupos (Cuadro 3). El Coeficiente de Variación (CV) indicó que los datos están muy dispersos con respecto a la media; por ende, se recomienda utilizar la mediana como medida representativa de la edad para estos datos.

Cuadro 3. Estadística descriptiva de la edad de los menores de 1 a 15 atendidos en las instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito. Año: 2008.

Grupo	Media	n	Desviación típica	CV	Mediana	Moda
Control	7,97	528	4,347	54,5%	8,00	6,00
Experimental	6,64	264	3,770	56,8%	6,50	4,00
<b>Total</b>	<b>7,53</b>	<b>792</b>	<b>4,208</b>	<b>55,9%</b>	<b>7,00</b>	<b>6,00</b>

Se aprecia (Fig. 6) que el grupo control tiene un rango de edad mayor que el grupo experimental. El grupo experimental, tiene una edad mediana menor que la del grupo control.



**Fuente:** Sección de Registros Médicos y Estadísticas de Salud, 2008.

**Fig. 6.** Diagrama de caja y bigotes de la edad de los menores de 1 a 15 atendidos en las instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito, por grupo. Año: 2008.

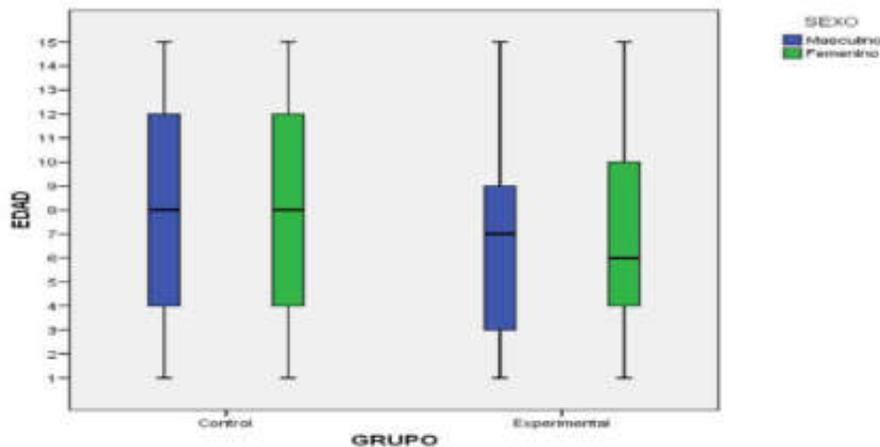
En el grupo experimental hay más menores masculinos que femeninos; todo lo contrario ocurre en el grupo control (Cuadro 4).

Cuadro 4. Menores de 1 a 15 atendidos en las instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito, por género, según grupo. Año: 2008.

Grupo	Género		Total
	Masculino	Femenino	
Control	254	274	<b>528</b>
Experimental	165	99	<b>264</b>
<b>Total</b>	<b>419</b>	<b>373</b>	<b>792</b>

**Fuente:** Sección de Registros Médicos y Estadísticas de Salud, 2008.

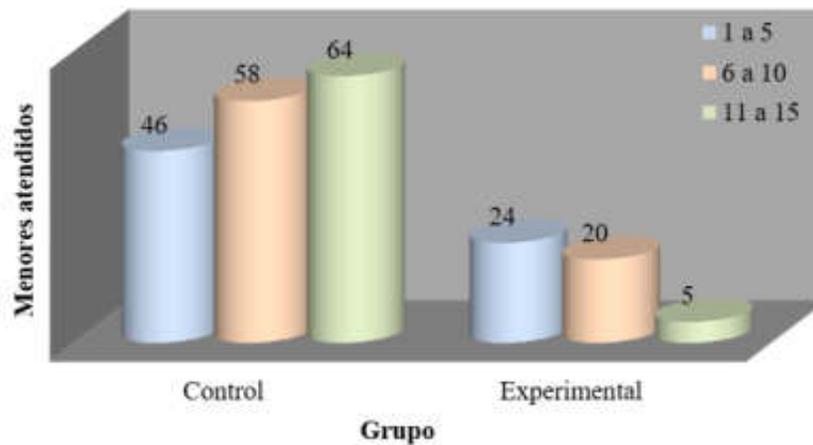
Al observar la edad y el sexo en cada grupo (Fig. 7), en el grupo control se aprecia que para ambos géneros la edad se distribuye igual, 50% de los niños tienen de los 4 y 12 años. En cambio en el grupo experimental, 50% de los niños se agrupan entre 3 y 9 años; y para las niñas, 50% se agrupan entre 4 y 10 años.



**Fuente:** Sección de Registros Médicos y Estadísticas de Salud, 2008.

**Fig. 7.** Diagrama de caja y bigotes de la edad de los menores de 1 a 15 atendidos en las instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito, por grupo, según sexo. Año: 2008.

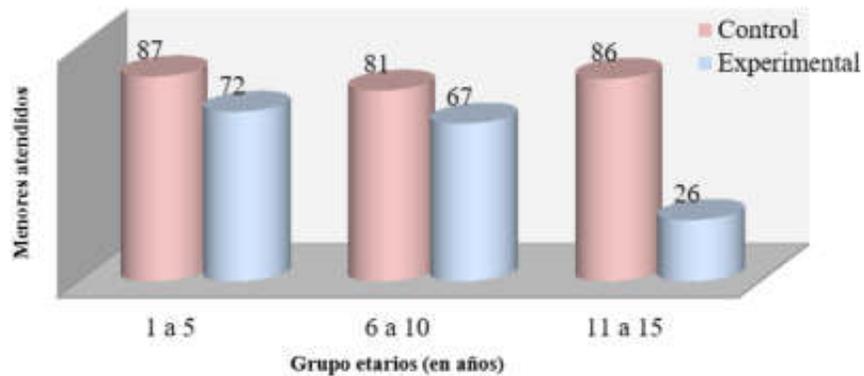
En el grupo control (Fig. 8), los casos aumentan al aumentar la edad; pero en el grupo experimental disminuyen los casos a medida que aumenta la edad.



**Fuente:** Sección de Registros Médicos y Estadísticas de Salud, 2008.

**Fig. 8.** Menores de 1 a 15 atendidos en las instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito, por grupo etario. Año: 2008.

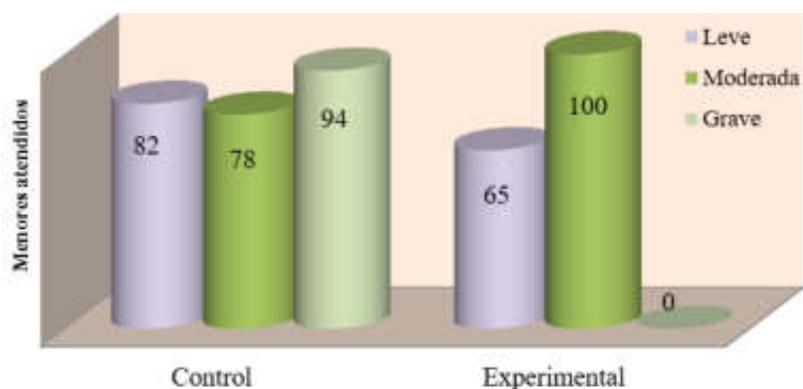
Al enfocar solamente los menores masculinos (Fig. 9), sobresale la clase de 1 a 5 años en ambos grupos, en especial los niños mordidos por perros.



**Fuente:** Sección de Registros Médicos y Estadísticas de Salud, 2008.

**Fig. 9.** Menores masculinos de 1 a 15 atendidos en las instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito, según grupo etario. Año: 2008.

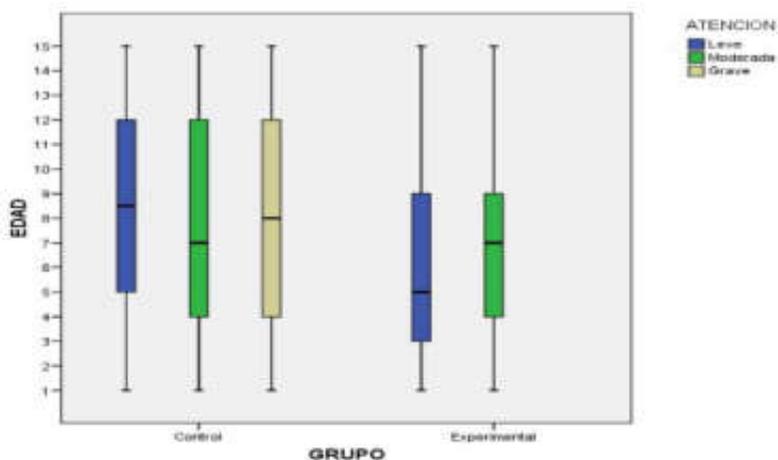
Nuevamente al apuntar sólo los menores masculinos (Fig. 10), en el grupo experimental hay menos atendidos por lesiones leves que los atendidos en el grupo control.



**Fuente:** Sección de Registros Médicos y Estadísticas de Salud, 2008.

**Fig. 10.** Menores masculinos de 1 a 15 atendidos en las instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito, por gravedad de la atención. Año: 2008.

No hubo menores con atención grave en el grupo experimental (Fig. 11). En cuanto a la atención leve, en el grupo control 50% de los niños se ubica entre los 5 y 12 años, sin embargo, en grupo control 50% se ubica entre los 3 y 9 años.



**Fuente:** Sección de Registros Médicos y Estadísticas de Salud, 2008.

**Fig. 11.** Diagrama de caja y bigotes de la edad de los menores de 1 a 15 atendidos en las instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito, por grupo, según gravedad de la atención. Año: 2008.

### Validación de las Hipótesis

A cada una de las hipótesis se les dará un tratamiento estadístico con los pasos requeridos para la aceptación o rechazo de la mismas con la prueba de hipótesis adecuada. Los supuestos son iguales para todas las pruebas; el nivel de significancia es  $\alpha = 0.05$  y el estadístico de la prueba tiene una distribución normal estandarizada; es decir,  $Z \sim (0,1)$

**Hipótesis 1:** La incidencia de las mordeduras de perro es mayor al 30% entre los menores de 1 a 15 años atendidos en instalaciones de salud del Distrito San Miguelito durante los meses de enero a junio de 2008.

### Hipótesis estadísticas:

$$H_0: p \leq 0.30$$

$$H_a: p > 0.30$$

**Prueba de hipótesis utilizada:** para una proporción para muestras grandes.

**Estadístico de la prueba:**  $Z_c = \frac{p - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$ , donde:

p: proporción de menores de 1 a 15 años atendidos por mordeduras de perro (IA)

$P_0$ : proporción especificada en la hipótesis nula

n: número de menores de 1 a 15 años atendidos

**Región de rechazo:** La prueba es unilateral derecha, puesto que la hipótesis alterna indica que una proporción es superior al 30%. Considerando el nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ ; entonces el valor del estadístico crítico ( $Z^*$ ) es 1.645. Por lo tanto, si  $Z_c > Z^* \Rightarrow H_0$  se rechaza

**Cálculo:**  $Z_c = \frac{p - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{0,3333 - 0,30}{\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{792}}} = 2,045$ . Por lo tanto,  $2,045 > 1,645$ ; es decir,  $Z_c > Z^* \Rightarrow H_0$  se rechaza

**Conclusión y Decisión:** Se concluye que existen evidencias significativas para rechazar la hipótesis nula; por lo tanto, se acepta como probable

que la incidencia acumulada de las mordeduras de perro sea mayor que 30% entre los menores de 1 a 15 años del Distrito San Miguelito durante los meses de enero a junio de 2008.

**Hipótesis 2:** La proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro es mayor que la proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por otras causas de traumatismo en instalaciones de salud del Distrito San Miguelito durante los meses de enero a junio de 2008.

**Hipótesis estadísticas:**

$$H_0: p_1 \leq p_2$$

$$H_a: p_1 > p_2$$

**Prueba de hipótesis utilizada:** para diferencia de proporciones para muestras grandes.

**Estadístico de la prueba**  $Z_c = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ ;  $\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$ , donde:

$p_1$ : proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro

$p_2$ : proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por otras causas

$X_1$ : número de menores de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro

$X_2$ : número de menores de 1 a 5 años atendidos por otras causas

$n_1$ : cantidad de menores de 1 a 15 años atendidos por mordeduras de perro

$n_2$ : cantidad de menores de 1 a 15 años atendidos por otras causas

$\bar{p}$ : proporción conjunta estimada de los menores de 1 a 15 años atendidos

**Región de Rechazo:** La prueba es unilateral derecha, puesto que la hipótesis alterna indica que una proporción es superior a la otra. El valor de  $Z^*$  es 1.645. Por lo tanto, si  $Z_c > Z^* \Rightarrow H_0$  se rechaza

**Cálculo:**  $p_1 = \frac{118}{264} = 0,4470$ ;  $p_2 = \frac{175}{528} = 0,3314$ ;  $\bar{p} = \frac{293}{792} = 0,3699$   
 $Z_c = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = 3,17$ . Al comparar,  $3,17 > 1,645$ ; es decir,  $Z_c > Z^* \Rightarrow H_0$  se rechaza

**Conclusión:** Se concluye que existen evidencias significativas para rechazar la hipótesis nula; por lo tanto, se acepta como probable que la proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro sea mayor que la proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por otras causas de traumatismo en instalaciones de salud del Distrito San Miguelito durante los meses de enero a junio de 2008.

**Hipótesis 3:** La proporción de menores de 1 a 15 años atendidos por mordeduras de perro leve es menor que la proporción de menores de 1 a 15 años atendidos por otras causas de traumatismo leve en instalaciones de salud del Distrito San Miguelito durante los meses de enero a junio de 2008.

**Hipótesis estadísticas:**

$$H_0: p_1 \geq p_2$$

$$H_a: p_1 < p_2$$

**Prueba de hipótesis utilizada:** para diferencia de proporciones para muestras grandes.

**Estadístico de la prueba**  $Z_c = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ ;  $\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$ , donde:

$p_1$ : proporción de menores de 1 a 15 años atendidos por mordeduras de perro leves

$p_2$ : proporción de menores de 1 a 15 años atendidos por otras causas leves

$X_1$ : número de menores de 1 a 15 años atendidos por mordeduras de perro leves

$X_2$ : número de menores de 1 a 15 años atendidos por otras causas leves

- $n_1$ : cantidad de menores de 1 a 15 años atendidos por mordeduras de perro leves  
 $n_2$ : cantidad de menores de 1 a 15 años atendidos por otras causas leves  
 $\bar{p}$ : proporción conjunta estimada de los menores de 1 a 15 años atendidos

**Región de Rechazo:** La prueba es unilateral izquierda, puesto que la hipótesis alterna indica que una proporción es inferior a la otra. El valor de  $Z^*$  es -1.645. Por lo tanto, si  $Z_C < -Z^* \Rightarrow H_0$  se rechaza

**Cálculos:**  $p_1 = \frac{49}{264} = 0.1856$ ;  $p_2 = \frac{168}{528} = 0.3182$ ;  $\bar{p} = \frac{217}{792} = 0.2740$   
 $Z_C = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = -3.94$ . Al comparar,  $-3.94 < -1.645$ ; es decir,  $Z_C < -Z^* \Rightarrow H_0$  se rechaza

**Conclusión:** Se concluye que existen evidencias significativas para rechazar la hipótesis nula; por lo tanto, se acepta como probable que la proporción de menores atendidos por mordeduras de perro leve sea menor que la proporción de menores de 1 a 15 años atendidos por otras causas de traumatismo leve en instalaciones de salud del Distrito San Miguelito durante los meses de enero a junio de 2008.

**Hipótesis 4:** La proporción de menores masculinos de 1 a 15 años atendidos por mordeduras de perro es distinta a la proporción de menores masculinos de 1 a 15 años atendidos por otras causas de traumatismo en instalaciones de salud del Distrito San Miguelito durante los meses de enero a junio de 2008.

**Hipótesis estadísticas:**

$$H_0: p_1 = p_2$$

$$H_a: p_1 \neq p_2$$

**Prueba de hipótesis utilizada:** para diferencia de proporciones para muestras grandes.

**Estadístico de la prueba:**  $Z_c = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ ;  $\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$ , donde:

- $p_1$ : proporción de menores de 1 a 15 años masculinos atendidos por mordeduras de perro
- $p_2$ : proporción de menores de 1 a 15 años masculinos atendidos por otras causas
- $X_1$ : número de menores de 1 a 15 años masculinos atendidos por mordeduras de perro
- $X_2$ : número de menores de 1 a 15 años masculinos atendidos por otras causas
- $n_1$ : cantidad de menores de 1 a 15 años atendidos por mordeduras de perro
- $n_2$ : cantidad de menores de 1 a 15 años atendidos por otras causas
- $\bar{p}$ : proporción conjunta estimada de los menores de 1 a 15 años masculinos atendidos

**Región de Rechazo:** La prueba es bilateral, puesto que la hipótesis alterna indica que una proporción es distinta a la otra. Considerando el nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ ; entonces el valor del estadístico crítico ( $Z^*$ ) es  $\pm 1.96$ . Por lo tanto, si  $Z_c < -Z^*$  ó  $Z_c > Z^* \Rightarrow H_0$  se rechaza

**Cálculos:**  $p_1 = \frac{165}{264} = 0,6250$ ;  $p_2 = \frac{254}{528} = 0,4811$ ;  $\bar{p} = \frac{281}{792} = 0,5290$   
 $Z_c = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = 3,83$ . Al comparar,  $3,83 > 1,645$ ; es decir,  $Z_c > Z^* \Rightarrow H_0$  se rechaza

**Conclusión:** Se concluye que existen evidencias significativas para rechazar la hipótesis nula; por lo tanto, se acepta como probable que la proporción de menores masculinos de 1 a 15 años atendidos por mordeduras de perro es distinta que la proporción de menores masculinos de 1 a 15 años atendidos por otras causas de traumatismo en instalaciones de salud del Distrito San Miguelito durante los meses de enero a junio de 2008.

**Hipótesis 5:** La proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro leves es mayor que la proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por otras causas de traumatismo leves en instalaciones de salud del Distrito San Miguelito durante los meses de enero a junio de 2008.

**Hipótesis estadísticas:**

$$H_0: p_1 \leq p_2$$

$$H_a: p_1 > p_2$$

**Prueba de hipótesis utilizada:** para diferencia de proporciones para muestras grandes.

**Estadístico de la prueba**  $Z_c = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ ;  $\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$ , donde:

$p_1$ : proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro leves

$p_2$ : proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por otras causas leves

$X_1$ : número de menores de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro leves

$X_2$ : número de menores de 1 a 5 años atendidos por otras causas leves

$n_1$ : cantidad de menores de 1 a 15 años atendidos por mordeduras de perro

$n_2$ : cantidad de menores de 1 a 15 años atendidos por otras causas

$\bar{p}$ : proporción conjunta estimada de los menores de 1 a 5 años atendidos por lesiones leves

**Región de Rechazo:** La prueba es unilateral derecha, puesto que la hipótesis alterna indica que una proporción es superior a la otra. El valor de  $Z^*$  es 1.645. Por lo tanto, si  $Z_c > Z^* \Rightarrow H_0$  se rechaza

**Cálculos:**  $p_1 = \frac{24}{264} = 0,0909$ ;  $p_2 = \frac{46}{528} = 0,0871$ ;  $\bar{p} = \frac{293}{792} = 0,0884$   
 $Z_c = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = 0,177$ . Al comparar,  $0,177 < 1,645$ ; es decir,  $Z_c < Z^* \Rightarrow H_0$  se acepta

**Conclusión:** Se concluye que no existen evidencias significativas para rechazar la hipótesis nula; por lo tanto, se acepta como probable que la proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro leves sea menor o igual que la proporción de menores de 1 a 5 años atendidos por otras causas de traumatismo leves en instalaciones de salud del Distrito San Miguelito durante los meses de enero a junio de 2008.

**Hipótesis 6:** La proporción de menores masculinos de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro leves es mayor que la proporción de menores masculinos de 1 a 5 años atendidos por otras causas de traumatismo en instalaciones de salud durante la estación seca de 2008.

**Hipótesis estadísticas:**

$$H_0: p_1 \leq p_2$$

$$H_a: p_1 > p_2$$

**Prueba de hipótesis utilizada:** para diferencia de proporciones para muestras grandes.

**Estadístico de la prueba:**  $Z_c = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ ;  $\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$ , donde:

- $p_1$ : proporción de menores de 1 a 5 años masculinos atendidos por mordeduras de perro leves durante la estación seca
- $p_2$ : proporción de menores de 1 a 5 años masculinos atendidos por otras causas leves durante la estación seca
- $X_1$ : número de menores de 1 a 5 años masculinos atendidos por mordeduras de perro leves durante la estación seca
- $X_2$ : número de menores de 1 a 5 años masculinos atendidos por otras causas leves durante la estación seca
- $n_1$ : cantidad de menores de 1 a 15 años atendidos por mordeduras de perro durante la estación seca
- $n_2$ : cantidad de menores de 1 a 15 años atendidos por otras causas durante la estación seca
- $\bar{p}$ : proporción conjunta estimada de los menores de 1 a 5 masculinos atendidos por lesiones leves durante la estación seca.

**Región de Rechazo:** La prueba es unilateral derecha, puesto que la hipótesis alterna indica que una proporción es superior a la otra. El valor de  $Z^*$  es 1.645. Por lo tanto, si  $Z_C > Z^* \Rightarrow H_0$  se rechaza

**Cálculos:**  $p_1 = \frac{18}{264} = 0,0682$ ;  $p_2 = \frac{20}{528} = 0,0379$ ;  $\bar{p} = \frac{293}{792} = 0,0480$   
 $Z_C = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = 1,88$ . Al comparar,  $1,88 > 1,645$ ;  
es decir,  $Z_C > Z^* \Rightarrow H_0$  se rechaza

**Conclusión:** Se concluye que existen evidencias significativas para rechazar la hipótesis nula; por lo tanto, se acepta como probable que la proporción de menores masculinos de 1 a 5 años atendidos por mordeduras de perro leves sea mayor que la proporción de menores masculinos de 1 a 5 años atendidos por otras causas de traumatismo leves en instalaciones de salud del Distrito San Miguelito durante la estación seca de 2008.

## CONCLUSIONES

Las características de los menores de 1 a 15 años atendidos en las instalaciones de salud del Distrito de San Miguelito por mordidas de perro durante el periodo de enero a junio de 2008 fueron: predominan los varones, en el grupo de 1 a 5 años y a medida que aumenta la edad, disminuye la cantidad de afectados; los ataques predominan en la estación seca, que coincide con las vacaciones escolares; la incidencia por mordeduras caninas en menores de 1 a 15 años fue significativamente mayor que 30%. Queda estadísticamente demostrado que la incidencia por mordeduras caninas en menores de 1 a 5 años es significativamente mayor que la incidencia por otras causas de traumatismo en menores de 1 a 5 años; que la incidencia por mordeduras caninas leves en menores de 1 a 15 años es significativamente menor que la incidencia por otras causas de traumatismo leves en menores de 1 a 15 años; que la incidencia por mordeduras caninas en menores masculinos de 1 a 15 años es significativamente distinta que la incidencia por otras causas de traumatismo en menores de 1 a 15 años; que la incidencia por mordeduras caninas leves en menores de 1 a 5 años atendidos es significativamente menor que la incidencia por otras causas de

traumatismo leves en menores de 1 a 5 años; la incidencia por mordeduras caninas leves en menores masculinos de 1 a 5 años es significativamente mayor que la incidencia por otras causas de traumatismo leves en menores masculinos de 1 a 5 años.

## **REFERENCIAS**

1. Entrevista en la Asociación Amigos de los Animales y la Naturaleza de Panamá. Enero de 2009.
2. Entrevista a la Sección de Estadísticas Vitales del Instituto Nacional de Estadística y Censo. Enero de 2009.
3. Nativí Nicolau, J. N. 2000. Introducción a la investigación científica. Ed. Sibauste. Panamá.
4. Pagano, M. & K. Gauvreau. 1999. Fundamentos de Bioestadística. 2da edición. Editorial Thompson Learning. México.
5. Sección de Registros Médicos y Estadística de Salud de los Centros de Salud del Distrito de San Miguelito. 2008. Panamá.

*Recibido mayo de 2011, aceptado septiembre de 2011.*



**BIOECOLOGÍA DE *Telenomus podisi* (ASHMEAD) Y *Trissolcus basalis* (WOLLASTON) (HIMENOPTERA: SCELIONIDAE), PARASITOIDES ÓOFAGOS DE *Oebalus insularis* (KULGHAST) (HETEROPTERA: PENTATOMIDAE)**

**<sup>1</sup>Bruno Zachrisson, <sup>1</sup>Onesio Martínez**

<sup>1</sup>Instituto de Investigación Agropecuaria de Panamá, Centro de Investigación Agropecuaria Oriental “Dr. Alberto Perdomo”.

e-mail: bruno.zachrissons@idiap.gob.pa

**RESUMEN**

Se realizaron estudios bioecológicos de laboratorio y de campo para las localidades de Río Hato (Provincia de Coclé, Panamá), Chepo (Provincia de Panamá, Panamá). Se determinó la tasa de parasitismo de *Trissolcus basalis* y *Telenomus podisi*, (Himenoptera: Scelionidae), en áreas cultivadas con las variedades de arroz, IDIAP-38, IDIAP-L7 y Prosequisa-4, libres de la aplicación de insecticidas. Las tasas de parasitismo de *Tr. basalis*, encontradas en las variedades IDIAP-38 e IDIAP-L7, variaron entre 84% y 89%. Los parámetros biológicos estudiados en condiciones controladas de temperatura ( $28^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ ), humedad relativa ( $80\% \pm 5\%$ ) y fotofase (12 horas), tales como el ciclo biológico (huevo-adulto), la longevidad de las hembras, la tasa de emergencia de adultos y la tasa de sobrevivencia, demuestran una clara tendencia de la eficiente adaptación de *Te. podisi* sobre *Tr. basalis*. Los resultados de campo y de laboratorio, ponen en evidencia que *Te. podisi* presenta un amplio grado de adaptación a las diferentes eco-regiones evaluadas en el país. Por esta razón, esta especie puede considerarse como un candidato promisorio para programas de control biológico aplicado de *O. insularis*.

**PALABRAS CLAVES**

*Trissolcus basalis*, *Telenomus podisi*, Scelionidae, *Oebalus insularis*.

## ABSTRACT

Bioecology studies in field and laboratory conditions were carried out in Río Hato (Cocle Province), Chepo (Panama Province). The rate of parasitisms *Trissolcus basalis* (Wollaston) and *Telenomus podisi* (Ashmead), and the behavior of parasitism evaluated in field for different rice varieties (IDIAP-38, IDIAP-L7 and Prosequisa-4) were determined. The predominance of *Tr. basalis*, under field conditions was registered, standing out some variations as for the proportion of the parasitoids complex for the variety Prosequisa-4, which can be attribute to the plant architecture. The biological parameters studied under controlled conditions of temperature ( $28\text{ }^{\circ}\text{C} \pm 2\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), relative humidity ( $80\% \pm 5\%$ ) and photophase (12 hours), such as the biological cycle (egg – adult), the longevity of the females, the survival rate, and the rate of adults emergency, pointed out to demonstrated the excellent performance of *Te. podisi* on *Tr. basalis*. The results of the field and laboratory trials support the wide grade of adaptation of *Te. podisi* for different ecosystems, in the country. For that reason, this specie can be considered as a promissory candidate to applied biological control programs, for the management of *O. insularis*.

## KEYWORDS

*Trissolcus basalis*, *Telenomus podisi*, Scelionidae, *Oebalus insularis*.

## INTRODUCCIÓN

El pentatomideo *Oebalus insularis*, es considerada como una de las principales plagas, que limitan la producción en el cultivo del arroz, en Panamá (Rodríguez *et al.*, 2006a; Estrada, 1988; King & Saunders, 1984; Pantoja *et al.*, 1997; Zachrisson, 1991; 1998; 2009b). El “Chinche del Arroz” como también se le conoce a *O. insularis*, se alimenta de granos en estado lechoso, succionando el contenido interno (King & Saunders, 1989; Pantoja *et al.*, 1997; Zachrisson, 1998; 2001; 2009b). Esto provoca el vaneamiento de los granos, producto de la inoculación de toxinas y la entrada de fitopatógenos, lo cual afecta la calidad de molinería y reduce los rendimientos (King & Saunders, 1984; Shannon, 1989; Pantoja *et al.*, 1997; Zachrisson, 1998; 2001; 2009b).

A la fecha, no se ha confirmado la presencia de la resistencia varietal al chinche del arroz (Shannon, 1989; Pantoja *et al.*, 1997; Zachrisson, 2001; 2009b), lo cual dificulta el manejo de este insecto-plaga. Además, es importante considerar que la aplicación de insecticidas

dirigidos a este insecto, a inicios de la floración no es rentable (Shannon, 1989; Pantoja *et al.*, 1997; Zachrisson, 1998; 2001; 2007; 2009b). Sin embargo, la dependencia del control químico para el manejo de *O. insularis*, de manera unilateral, destaca el manejo ineficiente de este insecto - plaga, lo cual sugiere la implementación de un programa de control biológico aplicado (Shannon, 1989; Zachrisson, 1998; 2001; 2007; 2009a). La utilización del control biológico como una opción de manejo para reducir la población de *O. insularis*, se sustenta en función de la eficiencia, impacto ambiental y rentabilidad de este método (Shannon, 1988; Zachrisson, 2001; 2007; 2009a).

Los estudios que han determinado el impacto del control natural para el "Chinche del Arroz", por medio de parasitoides oófagos, son escasos (Orr, 1988; Zachrisson, 2001; 2007; 2009a). Por lo que, es importante considerar la viabilidad del control biológico, como una opción de manejo que este dirigida a la fase de huevo de *O. insularis* (Zachrisson, 1998; 2001; 2007; 2009a). La implementación de esta estrategia de manejo, impide la entrada de patógenos al interior del grano, producto del daño ocasionado por la inserción del estilete de las ninfas y adultos, en el grano, durante la fase de grano lechoso (Heinrichs, 1997; Rodríguez *et al.*, 2006b; Shannon, 1989; Zachrisson, 1998; 2001; 2007; 2009b).

En América Central, se han registrado varias especies de parasitoides de *O. insularis*, entre las cuales se citan *Telenomus latrifrons*, *Te. podisi* (Hymenoptera: Scelionidae) y *Encyrtus anasae* (Ashmead) (Hymenoptera: Encyrtidae) (King & Saunders, 1984; Shannon, 1989; Zachrisson, 1998; 2001; 2007; 2009a). De acuerdo a algunos autores (Jones, 1988; Orr, 1988; Zachrisson, 2007; 2009a), la familia Scelionidae incluye varias especies de parasitoides oófagos de la familia de Pentatomidae, utilizados ampliamente en diversos programas de control biológico aplicado. Por lo que, el presente trabajo tuvo como objetivo determinar la tasa de parasitismo del complejo de parasitoides oófagos de *O. insularis*, en diferentes variedades arroz (IDIAP-38, IDIAP-L7 y Prosequisa-4), de las principales zonas productoras de Panamá. Así como, se determinaron los parámetros biológicos de *Tr. basalis* y *Te. podisi*, sobre huevos de *O. insularis*, en condiciones abióticas controladas.

## **MATERIALES Y MÉTODOS**

### **Descripción del Área:**

La colecta de los insectos en campo, se realizó en parcelas de productores colaboradores, en la localidad de Chepo (9° 7' 037" N; 79° 13' 047" O) ubicada a 50 m.s.n.m., en la provincia de Panamá y en Río Hato (8° 22' 053" N; 80° 08' 514" O) a 6 m.s.n.m., provincia de Coclé, ambas libres de la aplicación de insecticidas. La temperatura, humedad relativa y precipitación pluviométrica promedio, para la localidad de Chepo (provincia de Panamá), durante el período de estudio fueron, 32.2°C, 83.0% y 5,500 mm, respectivamente. De manera semejante, se registraron las variables climáticas, encontradas para la localidad de Río Hato (provincia de Coclé), en donde la temperatura, humedad relativa y la precipitación pluviométrica promedio fueron respectivamente, 31.9°C, 82% y 1,350 mm. El tamaño de las parcelas experimentales, seleccionada al azar dentro de las áreas de producción, fue de 100 m<sup>2</sup>, (20 m x 5 m) y las variedades de arroz consideradas en cada una fueron, IDIAP-38, IDIAP-L7 y Prosequisa-4.

### **Muestreo de las masas de huevos de *Oebalus insularis*:**

Los muestreos de campo se realizaron durante los años agrícolas 2007 y 2010, entre los meses de Agosto y Diciembre, en áreas de producción sembradas en condiciones de riego. Los mismos se realizaron durante la fase de grano lechoso, colectándose veinticinco (25) masas de huevos, las cuales fueron colectadas en diez (10) plantas seleccionadas aleatoriamente, en cada una de las parcelas experimentales, para las localidades estudiadas.

### **Determinación de la Tasa de Parasitismo Natural:**

La masa de huevos de la plaga colectadas en campo, fue transferida a platos "Petri", cuyo fondo fue recubierto con papel de filtro humedecido con agua destilada, con la finalidad de determinar la tasa de emergencia de los parasitoides. Posterior, a la emergencia de estos, se registró el número de huevos parasitados, variable que permitió establecer la tasa de parasitismo natural, en función de la relación con el total de huevos colectados, conforme a la fórmula citada a seguir (1).

(1)

$$\text{Tasa de parasitismo natural} = \frac{\text{Número de huevos parasitados}}{\text{Número de huevos colectados}} \times 100$$

La identificación de las especies de parasitoides las realizó el Dr. Valmir Costa, entomólogo, especialista en taxonomía de micro himenoptera parasítica, del Instituto Biológico de São Paulo, Brasil.

**Parámetros Biológicos de *Telenomus podisi* y *Trissolcus basal*:**

Posterior a la determinación del complejo de parasitoides colectados para las zonas productoras de arroz, se evaluaron los parámetros biológicos, en condiciones controladas de temperatura ( $28^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ ), humedad relativa ( $80\% \pm 5\%$ ) y fotofase (12 horas), en el laboratorio de entomología, del Centro de Investigación Agropecuaria Oriental (IDIAP), con sede en Chepo, Panamá. El ciclo "huevo-adulto" de los parasitoides, se determinó a partir de las cincuenta masas (50) de huevos de *O. insularis* con veinticuatro (24) horas de edad, sometidas al parasitismo de *Te. podisi* y *Tr. basal*, durante un período de cinco (5) horas. Las evaluaciones realizadas diariamente, considerándose que el ciclo "huevo-adulto" de ambos parasitoides, se determinó a través de la duración entre el período de parasitismo de los huevos de la plaga y la emergencia de los adultos. Las hembras de *Te. podisi* y *Tr. basal*, fueron individualizadas en viales de 3 ml, en donde los adultos recién emergidos fueron alimentados con una solución a base de miel y agua destilada, en proporción de 7 : 3, respectivamente. La longevidad de las hembras de los parasitoides, se evaluó considerando el período comprendido entre la emergencia del adulto y la muerte de este, por medio de registros diarios. La proporción de hembras (PH), en relación a la totalidad de insectos de la muestra, se calculó mediante la fórmula (2).

$$PH = \frac{\text{Número de Hembras } (\text{♀})}{\text{Total de adultos } (\text{♀} + \text{♂})} \times 100 \quad (2)$$

La tasa de sobrevivencia (TS) de las hembras de *Tr. basal* y *Te. podisi*, posterior a las veinticuatro (24) horas de emergencia de los adultos, se calculó por medio de la fórmula (3). En la evaluación de la

tasa de parasitismo de registros de ambas especies de parasitoides, se consideraron cincuenta (50) masas de huevos, en donde cada una de ellas representa una repetición, se uniformizaron las masas de huevos a un total de quince (15), las cuales fueron individualizados en viales de 3ml.

$$TS (\%) = \frac{\text{Número de hembras vivas (24 horas)}}{\text{Número total de hembras (24 horas)}} \times 100 \quad (3)$$

### **Diseño experimental y análisis estadístico:**

Con la finalidad de determinar la especie dominante del parasitoide, correspondiente a cada año agrícola y localidad, se utilizó el diseño experimental completo al azar y los datos de parasitismo natural fueron analizados, por medio de la prueba de "t" de Student, al nivel del 5% de probabilidad. No obstante, para determinar el parasitismo natural, considerando cada especie de parasitoide, se aplicó la prueba de "F" y posteriormente el análisis de varianza (ANOVA), al nivel de 5% de probabilidad.

Los parámetros biológicos estudiados (duración "huevo-adulto", longevidad de las hembras, tasa de emergencia de los adultos, tasa de sobrevivencia de los adultos a las 24 horas y la proporción de sexos), se registraron a partir de la evaluación diaria de cincuenta (50) masas de huevos, en donde se aplicó el diseño experimental completamente al azar. El análisis estadístico utilizado, fue la prueba de "t" de Student, al nivel de 5% de probabilidad.

### **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

Las colectas realizadas en Río Hato (Coclé) durante el año 2007 en la variedad IDIAP-L7, registró la dominancia de *Telenomus podisi* sobre *Trissolcus basalis*, presentando tasas de parasitismo de 89.1%. En la localidad de Chepo, la tendencia de parasitismo observada en IDIAP-L7 e IDIAP-38, durante el período de 2007, fue semejante a la registrada para la localidad de Río Hato (Cuadro 1).

Cuadro 1. Tasa de parasitismo natural de *Trissolcus basalis* (Wollaston) (Himenoptera: Scelionidae) y *Telenomus podisi* (Ashmead), (Himenoptera: Scelionidae), en posturas de huevos de *Oebalus insularis* (Kulghast) (Heteroptera: Pentatomidae), colectadas en diferentes variedades de arroz, en dos localidades, de Panamá.

Año Agrícola	Localidad	Variedad	<i>Telenomus podisi</i>	<i>Trissolcus basalis</i>	Otros
2007	Río Hato	IDIAP-L7	89.10 ± 2.10 AB <sup>1</sup> a <sup>2</sup>	10.9 ± 0.84 BC b	—
2007	Chepo	IDIAP-38	95.0 ± 3.40 A a	5.0 ± 0.62 C b	—
		IDIAP-L7	84.9 ± 3.27 B a	14.1 ± 1.95 B b	—
2010	Chepo	Prosequisa-4	43.0 ± 1.74 C a	38.3 ± 2.52 A a	18.7 ± 3.74 b <sup>3</sup>

<sup>1</sup> Medias seguidas de la misma letra mayúscula, entre las filas, no difieren estadísticamente, al 5% de probabilidad.

<sup>2</sup> Medias seguidas de la misma letra minúscula, entre las columnas, no difieren estadísticamente, al 5% de probabilidad.

<sup>3</sup> Presencia de parasitoides de las familias, Trichogrammatidae.

La especie dominante tanto para la localidad de Chepo, como para Río Hato, fue *Te. podisi*, independientemente que la variedad sembrada fuese IDIAP-L7 ó IDIAP-38 (Cuadro 1). No obstante, resultados contrastantes se registraron para la variedad Prosequisa-4, para la localidad de Chepo, registrándose tasas de parasitismo para *Te. podisi* y *Tr. basalis*, de 43.0% y 38.3%, respectivamente (Cuadro1). Estos resultados pueden atribuirse posiblemente a la arquitectura de las variedades de arroz cultivadas en las áreas de colecta de material. Las variedades IDIAP-L7, IDIAP-38 y Prosequisa-4, presentan características propias en cuanto al follaje, variable que puede influir en la capacidad de búsqueda del huésped de los parasitoides. La variedad Prosequisa-4, presenta una distribución del follaje contrastante con las variedades IDIAP-L7 e IDIAP-38. Las características propias de la estructura de cada variedad, en función de la distribución de las hojas ó por el número de macollos presente en la planta, puede influir sobre el parasitismo natural de la plaga (Andow & Prokrym, 1990), lo cual puede explicar la variación de la tasa de parasitismo registrada en la variedad Prosequisa-4 (Cuadro 1).

Las posibles variaciones en cuanto al parasitismo natural de *Te. podisi*, de acuerdo a la localidad estudiada, podría atribuirse entre otros factores a la presencia de diferentes haplotipos de esta especie (Hassan & Guo, 1991). Además, no se descarta la posibilidad que los diferentes metabolitos secundarios, encontrados en las diferentes variedades de arroz, consideradas en este estudio, puedan influir en el comportamiento de *Te. podisi* y consecuentemente pueda afectar la tasa de parasitismo natural.

Los parámetros biológicos evaluados y analizados de manera individual, demuestran una clara tendencia de la eficiente adaptación de *Te. podisi* sobre *Tr. basalis*, en el agroecosistema arroz (Cuadro 2). La duración del ciclo de vida (huevo-adulto), para las especies registradas en el presente estudio, difieren estadísticamente entre sí (Cuadro 2). *Te. podisi* presentó menor duración del ciclo de vida, en comparación con *Tr. basalis*, lo que demuestra mayor adaptación de la primera especie, en el cultivo del arroz. Esto se explica en función de la mayor acumulación de energía en menor período de tiempo. De manera semejante, la mayor longevidad de *Te. podisi*, la define como la especie mejor adaptada, en función de su capacidad de incrementar la tasa de parasitismo. Las tasas de emergencia y de sobrevivencia de *Te. podisi* son superiores a las de *Tr. basalis*, las cuales difieren estadísticamente entre sí (Cuadro 2). No obstante, la proporción de hembras para ambas especies de parasitoides, fue estadísticamente semejante, lo que se puede atribuir principalmente a la calidad del huésped ó al haplotipo de la especie del parasitoide (Vinson, 1997). Sin embargo, el mismo autor también argumenta que el tamaño de la masa de huevos, favorece el incremento en la proporción de hembras. En este sentido, es probable que el número de huevos por masa utilizado en este estudio, no influya en la proporción entre hembras y machos. La edad de los huevos, también puede afectar la proporción sexual de la progenie, presentándose mayor número de hembras en huevos más viejos o de más edad (Taylor & Stern, 1971).

Cuadro 2. Biología de los parasitoides *trissolcus basalís* (wollaston) y *telenomus podisi* (ashmead), (himenoptera: scelionidae), en condiciones controladas.

Especie	Duración (días) de huevo-adulto	Longevidad (días) de las hembras	Tasa de emergencia de adultos (%)	Tasa de sobrevivencia (24 horas) (%)	Proporción de hembras
<i>Telenomus podisi</i>	11.6 ± 0.5 a <sup>1</sup>	18.0 ± 0.3 a	98.4 ± 0.2 a	94.0 ± 0.3 a	0.8 ± 0.4 a
<i>Trissolcus basalís</i>	14.1 ± 2.3 b	15.7 ± 4.7 b	91.6 ± 2.8 b	87.0 ± 3.7 b	0.7 ± 0.1 a

<sup>1</sup>Medias seguidas de la misma letra, no difieren estadísticamente entre sí, al 5% de probabilidad.

Los parámetros biológicos estudiados, indican que *Te. podisi*, es la especie mejor adaptada al huésped y al agro-ecosistema arroz (Cuadro 2), resultado coherente con las tasas de parasitismo obtenidas en el campo, para las diferentes variedades y localidades estudiadas (Cuadro 1).

Los datos biológicos y las tasas de parasitismo natural, de *Te. podisi* obtenidos en el presente estudio, proporciona el conocimiento básico que facilite la implementación de un programa de multiplicación para este parasitoide. *Te. podisi* puede ser considerado un candidato promisorio para el manejo de *O. insularis*, en función del amplio grado de adaptación a las diferentes agro-ecosistemas evaluados, en donde fueron sembradas las variedades IDIAP-38, IDIAP-L7 y Prosequisa-4.

## CONCLUSIONES

Se reportaron dos especies de parasitoides de huevos de *O. insularis* predominantes, *Telenomus podisi* y *Trissolcus basalís*, en las zonas arroceras de Chepo y Río Hato, Panamá.

*Telenomus podisi* fue la especie de parasitoide que mejor se adaptó, a los agroecosistemas arroceros de Chepo y Río Hato, sembrados con IDIAP-38 e IDIAP-L7.

Los parámetros biológicos estudiados en condiciones de campo y en condiciones controladas, sugieren la eficiencia de *Te. podisi*, como un promisorio agente de control biológico para *O. insularis*.

## REFERENCIAS

- Andow, D. A. & D. R. Prokrym. 1990. Plant structural complexity and host finding by a parasitoid. *Oecologia*, 82: 162-165.
- Estrada, F. 1988. Insectos asociados al arroz IDIAP. (Mimeografiado). 5pp.
- Hassan, S. A. & M. F. Guo. 1991. Selection of effective strains of egg parasites of the genus *Trichogrammatidae* (Hym., *Trichogrammatidae*) to control of the european corn borer *Ostrinia nubilalis* Hb (Lep., *Pyralidae*). *Journal of Applied Entomology*, 111: 335-361.
- Heinrichs, E. A. 1997. Management rice insect pests. University of Minnesota. National IMP Network. Consortium for international crop protection. 19 pp.
- King, A. B. S. & J. L. Saunders. 1984. The invertebrate pests of annual food crops in Central America. London, Overseas Development Administration. 166 p.
- Jones, W. A. 1988. World review of the parasitoids of southern green stink bug, *Nezara viridula* (L.) (Heteroptera: Pentatomidae). *Annual Entomological Society of America*, 81: 262- 273.
- Orr, D. B. 1988. Scelionid wasps as biological control agents: a review. *Florida Entomologist*, 71: 506-528.
- Pantoja, A., A. Fisher, F. Correa-Victoria & L. R. Sanint. 1997. Artrópodos, enfermedades y malezas. *En: Pantoja, A. MIP en arroz: Manejo Integrado de Plagas*. CIAT, Cali, Colombia. 141 pp.

Rodríguez, P., D. Navas, R. Chang & E. Medianero. 2006a. Riqueza y bionomía de Heteroptera, asociados al cultivo de arroz, en Panamá. *Scientia*, 21(1): 93-103.

Rodríguez, P., D. Navas, E. Medianero, & R. Chang. 2006b. Cuantificación del daño ocasionado por *Oebalus insularis* (Heteroptera: Pentatomidae), en el cultivo del arroz (*Oryzica* – 1) en Panamá. *Revista Colombiana de Entomología*, 32 (2): 131-135.

Shannon, P. 1989. Programas de MIP Implementados: Arroz. *En: Andrews, K. & Quesada, J. R. Manejo Integrado de Plagas Insectiles en la Agricultura: Estado Actual y Futuro. Escuela Agrícola Panamericana (EAP), El Zamorano, Honduras, Centroamérica. 623 pp.*

Taylor, T. A. & V. M. Stern. 1971. Host preference studies with egg parasite *Trichogramma semifumatum* (Hymenoptera: Trichogrammatidae). *Annals of the Entomological Society of America*, 64 (6): 1381-1390.

Vinson, S. B. 1997. Comportamento de seleção hospedeira de parasitoides de ovos, com ênfase na família Trichogrammatidae. *In: Parra, J. R. P. & Zucchi, R. A. Trichogramma e controle biológico aplicado. Piracicaba: FEALQ, 1997. Cap. 4, p. 67-70.*

Zachrisson, B. A. 1991. Resultados preliminares sobre la fluctuación poblacional de Insectos–Plagas, en tres variedades de arroz. XXXVIII. Reunión Anual, PCCMCA, IDIAP. 260 pp.

Zachrisson, B. A. 1998. Manejo Integrado del Cultivo (MIC): Componente Entomológico. Informe Técnico, IDIAP, Panamá, Panamá. 4 p.

Zachrisson, B. A. 2001. Registro del complejo de parasitoides oófagos del chinche del arroz (*Oebalus insularis* Stal) (Heteroptera: Pentatomidae). *En: Resumen de Congreso Nacional de Ciencia y Tecnología, 7. Panamá, Panamá. p. 99.*

Zachrisson, B. A. 2007. Bioecology of *Trissolcus* sp. and *Telenomus* sp. (Hymenoptera: Scelionidae), parasitoids of rice sting bug (*Oebalus*

*insularis* Stal.) (Heteroptera: Pentatomidae). p. 184. *In*: Abstract of the X Symposium of Biological Control, SINCOBIOL; Brasilia, Brasil.

Zachrisson, B. A. 2009a. Avances del control biológico de plagas de arroz (*Oryza sativa*), por medio de parasitoides oófagos, en Panamá. IDIAP, 20 p., Panamá, Panamá.

Zachrisson, B. A. 2009b. Bioecología, daños y muestreos de plagas, en el cultivo del arroz. IDIAP, 36 p., Panamá, Panamá.

*Recibido mayo de 2011, aceptado septiembre de 2011.*



## DIVERSIDAD DE AVISPAS (HYMENOPTERA: POMPILIDAE) CAZADORAS DE ARAÑAS DEL PARQUE NACIONAL DARIÉN, REPÚBLICA DE PANAMÁ

Patricia E. Corro Ch.<sup>1</sup> y Roberto A. Cambra T.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Smithsonian Tropical Research Institute, Panamá, República de Panamá.

<sup>2</sup> Museo de Invertebrados G. B. Fairchild, Universidad de Panamá, Estafeta Universitaria 0824, Panamá, República de Panamá.

### RESUMEN

Se presenta un listado de especies de avispas Pompilidae del Parque Nacional Darién (PND). Los especímenes fueron capturados cerca de las Estaciones Biológicas de Cana, Cruce de Mono y Rancho Frío, utilizando trampas Malaise, platos amarillos y redes entomológicas. Se colectaron 2715 especímenes en el PND, distribuidos en 4 subfamilias, 25 géneros, y 92 especies. Se registran por primera vez para **Panamá** las siguientes seis especies: *Notocyphus thetis* Banks, 1945, *Irenangelus crossopus* Kimsey y Wasbauer, 2004, *Priocnessus grandis* Dreisbach, 1961, *Ageniella (Alasagenia) pilifrons* (Cameron, 1912), *Agenioideus accoleus* (Banks, 1947) y *Psorthaspis laevifrons* (Cresson, 1869). Se atraparon especímenes que representan especies nuevas para los géneros: *Ageniella*, *Caliadurgus*, *Dipogon*, *Minagenia*, *Mystacagenia*, *Balboana*, *Epipompilus*, *Notocyphus* y *Priocnemella*. Se presenta información sobre la diversidad genérica de Pompilidae para Panamá y se compara con la de Costa Rica.

### PALABRAS CLAVES

Pompilidae, Parque Nacional Darién, listado de especies, registros de distribución.

## ABSTRACT

A checklist of Pompilidae wasps from Darien National Park (DNP) is presented. The specimens were captured near to the Biological Stations of Cana, Cruce de Mono and Rancho Frio, using Malaise traps, yellow pan traps and entomological nets. The 2715 specimens collected in DNP, represent 4 families, 25 genera and 92 species. These are the first records for Panama for the following six species: *Notocyphus thetis* Banks, 1945, *Irenangelus crossopus* Kimsey & Wasbauer, 2004, *Priocnessus grandis* Dreisbach, 1961, *Ageniella (Alasagenia) pilifrons* (Cameron, 1912), *Agenioideus accoleus* (Banks, 1947), and *Psorthaspis laevifrons* (Cresson, 1869). Trapped specimens included new species belonging to the genera: *Ageniella*, *Caliadurgus*, *Dipogon*, *Minagenia*, *Mystacagenia*, *Balboana*, *Epipompilus*, *Notocyphus*, and *Priocnemella*. Information on the generic diversity of Pompilidae is presented, and is compared with that of Costa Rica.

## KEYWORDS

Pompilidae, Darien National Park, checklist of species, distribution records.

## INTRODUCCIÓN

Pompilidae es conocida comúnmente como avispa cazadora de arañas. Todas las especies de Pompilidae depositan un sólo huevo en la araña capturada y las larvas de todas las especies se alimentan de la araña desde el exterior (Hanson & Wasbauer, 2006). Las hembras poseen un poderoso aguijón y un rasgo distintivo del grupo es la presencia de un par de espinas tibiales apicales prominentes, una de ellas en forma de espolón. Esta familia de avispa comprende 120 géneros y unas 5,000 especies en todo el mundo (Hanson & Wasbauer, 2006); para Norteamérica se han registrado 282 especies en 40 géneros (Brothers & Finnamore, 1993). Wasbauer (1995) menciona que Costa Rica posee 34 géneros y cerca de 250 especies de pompilidos, muchas de las cuales aún no han sido descritas; se estima que la diversidad de géneros de Pompilidae presentes en Panamá sea cercana a la de Costa Rica por su similitud ecológica, proximidad geográfica y especímenes examinados (Corro, 2011).

Pocos trabajos han sido publicados sobre diversidad y biología de Pompilidae de la Provincia de Darién. Cambra *et al.* (2004), Cambra (2005) y Cambra & Wahis (2005) presentan información biológica, primeros registros de distribución y descripción de especies nuevas para algunas especies de avispas colectadas en Panamá, incluyendo algunas especies de Pompilidae del PND. En este trabajo se listan las especies de Pompilidae colectadas en tres localidades del PND, aumentando el conocimiento de su diversidad y distribución, para un área hasta ahora poco estudiada.

### **MATERIALES Y MÉTODOS**

Las colectas se realizaron en los alrededores de las siguientes tres estaciones de campo en el PND: 1) Cana (estación biológica de ANCON, 7° 42' N, 77° 44' O): 4 al 13 de abril 1991; se utilizó una trampa Malaise. 2) Estación Cruce de Mono, ANAM (7° 49' N, 77° 38' O): 6 de febrero al 4 de marzo 1993; se utilizaron tres trampas Malaise. 3) Estación Rancho Frío, Cerro Pirre, ANAM (8° 02' N, 77° 43' O): 21 de marzo al 4 de abril 2000; 7 al 16 de noviembre 2000; 18 al 24 de enero 2001; 9 al 17 de abril 2002; 29 de julio al 9 de agosto 2002; 8 de agosto al 2 de octubre 2002; 2 al 17 de octubre 2002; se utilizaron de cinco a siete trampas Malaise.

Para las colectas se utilizaron de uno hasta siete trampas Malaise (Townes modificada) de acuerdo al recurso de equipo con que se contaba durante las giras de campo. Adicionalmente, se hicieron colectas con 50 a 100 platos amarillos llenos con agua y detergente VEL líquido, y colectas manuales con redes entomológicas. Las trampas Malaise se colocaron a alturas que oscilaban entre los 80 y 1000 msnm, colectando por un periodo de 24 horas, durante un mínimo de 9 días y un máximo de 54 días. Los platos amarillos fueron colocados diariamente entre las 7 y 8 horas, a alturas entre 80 a 200 msnm, y recogidos entre las 16 y 17 horas. Las colectas manuales se realizaron entre las 8 y 16 horas, a alturas entre 80 a 500 msnm, a lo largo de los senderos.

Los especímenes fueron identificados por Roberto A. Cambra, excepto las especies del género *Pepsis* que fueron identificadas por Colin Vardy. Todos los especímenes colectados se encuentran depositados en el Museo de Invertebrados G. B. Fairchild, Universidad de Panamá (MIUP).

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se colectaron en el PND un total de 2715 especímenes de Pompilidae, distribuidos en 4 subfamilias, 25 géneros y 92 especies (Cuadro 1). La subfamilia Pompilinae presentó la mayor proporción de individuos durante los muestreos con un total de 1445 especímenes (53.2%); seguido por la Notocyphinae con 576 especímenes (21.2%); Pepsinae con 559 especímenes (20.6%); y finalmente, la subfamilia con menor proporción de individuos colectados fue la Ceropalinae, representada tan sólo con 135 especímenes (5%).

Para el PND se registran 25 géneros de los 31 reportados para Panamá. Es decir, el PND aloja un 80.6% de todos los géneros registrados para Panamá, lo que indica una gran diversidad de géneros para tan sólo un sector del país. Los géneros no encontrados en el PND, y que han sido reportados para otras localidades de Panamá por Cameron (1891) y Evans (1966) son: *Ceropales*, *Allaporus*, *Euplaniceps*, *Aporinellus*, *Episyron* y *Paracyphononyx*.

La diversidad de géneros y especies de Pompilidae en Panamá puede presentar cierta proximidad a la de Costa Rica porque compartimos similitudes ecológicas y geográficas. Wasbauer (1995) menciona la presencia de 34 géneros y cerca de 250 especies para Costa Rica. Al momento, se han registrado para Panamá 31 géneros de Pompilidae. Cambra y Quintero (2009) registran para Panamá el género *Allaporus* y la especie *Allaporus smithianus* (Cameron, 1893), sin indicar que era el primer registro del género para Panamá. Entre los géneros presentes en Costa Rica y no registrados para Panamá destacan: *Priocnemis*, *Evagetes*, *Sericopompilus* y *Xenopompilus*. El único género no

registrado para Costa Rica y que está presente en Panamá es *Mystacagenia*.

Se reportan, del PND, un total de 28 especies nuevas para los nueve géneros siguientes: *Ageniella* (9 especies nuevas), *Caliadurgus* (5) *Dipogon* (1), *Minagenia* (2), *Mystacagenia* (1), *Balboana* (1), *Epipompilus* (1), *Notocyphus* (6) y *Priocnemella* (2). Además, se registran por primera vez para Panamá las seis especies siguientes: *Agenioideus accoleus* (Banks, 1947), *Notocyphus thetis* (Banks, 1945), *Irenangelus crossopus* (Kimsey & Wasbauer, 2004), *Priocnessus grandis* Dreisbach, 1961, *Ageniella (Alasagenia) pilifrons* (Cameron, 1912) y *Psorthaspis laevifrons* (Cresson, 1869).

De acuerdo a la cantidad de individuos por sexo, de los 2715 especímenes colectados, 1726 fueron machos y 989 hembras; con una proporción de 1.7:1 macho por hembra. La subfamilia Pompilinae estuvo mayormente constituida por especímenes machos, siendo *Aporus imotatus* la que más machos representó en las muestras (Cuadro 1).

Cuadro 1. Listado de Especies de Pompilidae Colectadas en el Parque Nacional Darién. Abreviaciones: C = Cana; C de Mono = Cruce de Mono; R Frio = Rancho Frio, T. Amarilla = Trampa Amarilla.

Especies del PND	Localidades			Técnica de Muestreo		
	C.	C. de Mono	R. Frio	Manual	T. Amarilla	Malaise
<i>Irenangelus crossopus</i> Kimsey y Wasbauer, 2004			3			3
<i>Irenangelus furtivus</i> Evans, 1969			17			17
<i>Irenangelus ichneumonoides</i> Ducke, 1908	2		39		2	39
<i>Irenangelus lucidus</i> Evans, 1969		1	37		2	36
<i>Irenangelus townesorum</i> Evans, 1969			36			36
<b>Total de especímenes por localidades</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>132</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Irenangelus</i></b>	<b>135</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>				<b>4</b>	<b>131</b>

<b>Notocyphinae</b>	<b>C.</b>	<b>C. de Mono</b>	<b>R. Frío</b>	<b>Manual</b>	<b>T. Amarilla</b>	<b>Malaise</b>
<i>Notocyphus chiriquensis</i> Cameron, 1893		2	2		1	3
<i>Notocyphus</i> afin a <i>ferrugineus</i> Fox, 1897		13	46		2	57
<i>Notocyphus thetis</i> Banks, 1945			5			5
<i>Notocyphus</i> sp. 1		3	7		6	4
<i>Notocyphus</i> sp. 2		4	15		14	5
<i>Notocyphus</i> sp. 4		2	473		1	474
<i>Notocyphus</i> sp. 5	1		1		1	1
<i>Notocyphus</i> sp. 6	1	1			1	1
<b>Total de Especímenes por localidades</b>	<b>2</b>	<b>25</b>	<b>549</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Notocyphus</i></b>	<b>576</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>				<b>26</b>	<b>550</b>
<b>Pepsinae</b>	<b>C.</b>	<b>C. de Mono</b>	<b>R. Frío</b>	<b>Manual</b>	<b>T. Amarilla</b>	<b>Malaise</b>
<i>Calliurgus albosignus</i> (Dreisbach, 1961)	1					1
<i>Calliurgus</i> afin a <i>machetes</i> Kohl, 1886	3				3	
<i>Calliurgus</i> afin a <i>ornatus</i> (Dreisbach, 1961)	6	1			7	
<i>Calliurgus</i> afin a <i>pretiosus</i> (Fox)		2				2
<i>Calliurgus</i> sp. 1			4			4
<i>Calliurgus</i> sp. 2			1			1
<b>Total de especímenes por localidades</b>	<b>10</b>	<b>3</b>	<b>5</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Calliurgus</i></b>	<b>18</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>				<b>10</b>	<b>8</b>
<i>Cryptocheilus neotropicalis</i> Cambra y Wahis, 2005		50				50
<b>Total de especímenes por localidades</b>		<b>50</b>				
<b>Total de especímenes para <i>Cryptocheilus</i></b>	<b>50</b>					

	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>		<b>11</b>	<b>?</b>	<b>?</b>
<i>Dipogon</i> n. sp.		5		5	
<b>Total de especímenes por localidades</b>		<b>5</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Dipogon</i></b>	<b>5</b>				
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>			<b>1</b>	<b>4</b>
<i>Entypus unifasciatus urichi</i> Banks, 1945	7			7	
<b>Total de especímenes por localidades</b>	7				
<b>Total de especímenes para <i>Entypus</i></b>	<b>7</b>				
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>			7	
<i>Hemipepsis mexicana</i> (Cresson) 1867	3	3		1	5
<b>Total de especímenes por localidades</b>	3	3			
<b>Total de especímenes para <i>Hemipepsis</i></b>	<b>6</b>				
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>			<b>1</b>	<b>5</b>
<i>Minagenia</i> sp. 1	2			2	
<i>Minagenia</i> sp. 2	7	1		3	5
<b>Total de especímenes por localidades</b>	2	7	1		
<b>Total de especímenes para <i>Minagenia</i></b>	<b>10</b>				
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>			<b>5</b>	<b>5</b>
<i>Pepsis assimilis</i> Banks, 1946	2		1		1
<i>Pepsis festiva</i> Fabricius, 1805	2			2	
<i>Pepsis frivaldszkyi</i> Mocsary, 1885	1		1		
<i>Pepsis menechma</i> Lepeletier, 1845	8	1		1	8
<i>Pepsis purpurea</i> Smith, 1873	4		9	4	9
<i>Pepsis vitripennis</i> Smith, 1855	1	3	1	1	4
<b>Total de especímenes por localidades</b>	<b>13</b>	<b>9</b>	<b>10</b>		
<b>Total de especímenes para <i>Pepsis</i></b>	<b>32</b>				
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>		<b>2</b>	<b>8</b>	<b>22</b>

<i>Prionnessus grandis</i> Dreisbach, 1961			1			1
<i>Prionnessus neotropicalis</i> (Cameron, 1891)	3				3	
<b>Total de especímenes por localidades</b>	<b>3</b>		<b>1</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Prionnessus</i></b>	<b>4</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>				<b>3</b>	<b>1</b>
<i>Ageniella anconis</i> (Banks, 1925)		1			1	
<i>Ageniella molinoi</i> (Banks, 1925)	5	11	20		24	12
<i>Ageniella (Alasagenia) pilifrons</i> (Cameron)	1					1
<i>Ageniella (Alasagenia) near pilifrons</i> (Cameron)			1			1
<i>Ageniella (Cyrtagenia) fallax</i> (Arle, 1947)			1			1
<i>Ageniella wheeleri</i> (Banks, 1925)	4	4	2	1	9	
<i>Ageniella zeteki</i> (Banks, 1925)	1	3	49	3	36	14
<i>Ageniella</i> sp. 1			6		1	5
<i>Ageniella</i> sp. 2	1				1	
<i>Ageniella</i> sp. 3			3			3
<i>Ageniella</i> sp. 4			1			1
<i>Ageniella</i> sp. 5		1	2		3	
<i>Ageniella</i> sp. 6		1				1
<i>Ageniella</i> sp. 7			2		2	
<i>Ageniella</i> sp. 8	3	15	6		22	2
<i>Ageniella</i> sp. 9			39		35	4
Ageniellini (machos)		17	90		17	90
<b>Total de especímenes por localidades</b>	<b>15</b>	<b>53</b>	<b>222</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Ageniella</i></b>	<b>290</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>			<b>4</b>	<b>151</b>	<b>135</b>
<i>Atopagenia menkei</i> Wasbauer, 1987		1		1		
<b>Total de especímenes por localidades</b>		<b>1</b>		<b>1</b>		

<b>Total de especímenes para <i>Atopagenia</i></b>	<b>1</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>			<b>1</b>		
<i>Auplopus esmeraldus</i> (Banks, 1925)	5		6		11	
<i>Auplopus gentilis</i> (Cameron, 1893)			1		1	
<i>Auplopus grossus</i> Dreisbach, 1963			1		1	
<i>Auplopus semialatus</i> Dreisbach, 1963	5	3			8	
<i>Auplopus shannoni</i> Dreisbach, 1963	1		4		5	
<i>Auplopus venetus</i> Dreisbach, 1963			1		1	
<i>Auplopus violaceus</i> Dreisbach, 1963	3		8	3	4	4
<b>Total de especímenes por localidades</b>	<b>14</b>	<b>3</b>	<b>21</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Auplopus</i></b>	<b>38</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>			<b>3</b>	<b>31</b>	<b>4</b>
<i>Mystacagenia n. sp.</i>			1		1	
<b>Total de especímenes por localidades</b>			<b>1</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Mystacagenia</i></b>	<b>1</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>				<b>1</b>	
<i>Priocnemella fairchildi</i> (Banks, 1925)	5	3	1		6	3
<i>Priocnemella isolata</i> (Banks, 1925)		1	4		2	3
<i>Priocnemella rufothorax</i> (Banks, 1925)	31	19	16		57	9
<i>Priocnemella tabascoensis</i> (Cameron, 1891)	3	3	9		5	10
<i>Priocnemella</i> sp. 1			1		1	
<i>Priocnemella</i> sp. 2			1			1
<b>Total de especímenes por localidades</b>	<b>39</b>	<b>26</b>	<b>32</b>			
<b>Total de Especímenes para <i>Priocnemella</i></b>	<b>97</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>				<b>71</b>	<b>26</b>
<b>Pompilinae</b>	<b>C.</b>	<b>C. de Mono</b>	<b>R. Frio</b>	<b>Manual</b>	<b>T. Amarilla</b>	<b>Malaise</b>
<i>Aporus innotatus</i> (Banks, 1925)	68	60	947		808	267
<i>Aporus idris comptus</i> (Bradley, 1944)	12		6		15	3

<b>Total de especímenes por localidades</b>	80	60	953			
<b>Total de especímenes para <i>Aporus</i></b>	<b>1093</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>				<b>823</b>	<b>270</b>
<i>Epipompilus</i> n. sp.			1			1
<b>Total de especímenes por localidades</b>			<b>1</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Epipompilus</i></b>	<b>1</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>					<b>1</b>
<i>Psorthaspis connexa bugabensis</i> (Cameron, 1893)			3		1	2
<i>Psorthaspis laevifrons</i> (Cresson, 1869)			16			16
<i>Psorthaspis variegata impudica</i> (Cameron, 1893)	2				2	
<b>Total de especímenes por localidades</b>	<b>2</b>		<b>19</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Psorthaspis</i></b>	<b>21</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>				<b>3</b>	<b>18</b>
<i>Agenioideus accoleus</i> (Banks, 1947)			16			16
<b>Total de especímenes por localidades</b>			<b>16</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Agenioideus</i></b>	<b>16</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>					<b>16</b>
<i>Anoplius (Anopliodes) parsoni</i> (Banks, 1949)	5				5	
<i>Anoplius (Arachnophroctonus) americanus ambiguus</i> (Dahlbom, 1845)		1		1		
<i>Anoplius (Notiochaes) amethystinus amethystinus</i> (Fabricius, 1793)	13	2			15	
<i>Anoplius (Notiochaes) amethystinus exclusus</i> (Smith, 1873)	4				4	
<i>Anoplius (Notiochaes) lepidus lepidus</i> (Say, 1835)	10				10	
<b>Total de especímenes por localidades</b>	<b>32</b>	<b>3</b>	<b>6</b>			

<b>Total de especímenes para <i>Anoplius</i></b>	<b>35</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>			<b>1</b>	<b>34</b>	
<i>Aplochares imitator</i> (Smith, 1864)	1	1	11		1	11
<b>Total de especímenes por localidades</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>11</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Aplochares</i></b>	<b>13</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>				<b>1</b>	<b>11</b>
<i>Balboana auripennis</i> Banks, 1944		4	23			27
<i>Balboana pulchella</i> Evans, 1966			2		1	1
<i>Balboana</i> sp. 1			42			42
<b>Total de especímenes por localidades</b>		<b>4</b>	<b>67</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Balboana</i></b>	<b>71</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>				<b>1</b>	<b>70</b>
<i>Poecilopompilus badius</i> Evans, 1966		4	2			6
<i>Poecilopompilus flavopictus</i> (Smith, 1862)		5	2			7
<i>Poecilopompilus decedens</i> ? (Smith, 1873)	1	1	14			16
<b>Total de especímenes por localidades</b>	<b>1</b>	<b>10</b>	<b>18</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Poecilopompilus</i></b>	<b>29</b>					
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>					<b>29</b>
<i>Priochilus formosum hondurensense</i> Dreisbach, 1950	1			1		
<i>Priochilus gloriosum</i> (Cresson, 1869)		2	11		3	10
<i>Priochilus gracile</i> Evans, 1966		1		1		
<i>Priochilus regius</i> (Fabricius, 1804)	11	1	1		2	11
<i>Priochilus scrupulum</i> (Fox, 1897)	8	4	40		12	40
<i>Priochilus sericeifrons</i> (Fox), 1897	5		23		2	26
<i>Priochilus splendidulum</i> (Fabricius, 1804)	10	6	35		22	29
<i>Priochilus veraepacis</i> (Cameron, 1893)	1			1		
<b>Total de especímenes por localidades</b>	<b>36</b>	<b>14</b>	<b>110</b>			

<b>Total de especímenes para <i>Priochilus</i></b>	<b>160</b>				
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>		<b>3</b>	<b>41</b>	<b>116</b>
<i>Tachypompilus ferrugineus affinis</i> Banks, 1947	2	4		2	4
<b>Total de especímenes por localidades</b>	<b>2</b>	<b>4</b>			
<b>Total de especímenes para <i>Tachypompilus</i></b>	<b>6</b>				
	<b>Total por Técnica de Muestreo</b>			<b>2</b>	<b>4</b>
<b>Total de especímenes colectados en el PND = 2715</b>					

## CONCLUSIONES

Con este trabajo se determinó la biodiversidad de Pompilidae en el PND, registrándose un total de 25 géneros para esta región, lo que representa un 80.6% del total de géneros reportados para Panamá.

Se identificó un total de 92 especies, entre las cuales, la especie más abundante en los muestreos realizados en las tres localidades fue *Aporus innotatus* (Banks, 1925) (Cuadro 1).

Los muestreos manuales ayudaron a recolectar información biológica sobre el tipo de presa, comportamiento de anidación y ecología para algunas de las especies de Pompilidae (Cambra *et al.* 2004).

Se reconocieron especies nuevas para los géneros: *Ageniella*, *Caliadurgus*, *Dipogon*, *Minagenia*, *Mystacagenia*, *Balboana*, *Epipompilus*, *Notocyphus* y *Priocnemella*.

Se estableció que las técnicas de colecta aplicadas varían en efectividad dependiendo del hábitat en que suele encontrarse el individuo. La aplicación de platos amarillos fue una técnica de gran efectividad en la captura de especímenes pertenecientes a la subfamilia

Pompilinae; mientras que las trampas Malaise colectaron mucho más especímenes de Ceropalinae y Notocyphinae (Cuadro 1).

### AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Colin Vardy, Museo Británico de Historia Natural, Londres, por las identificaciones de los especímenes del género *Pepsis*; Diomedes Quintero Arias, Universidad de Panamá, por soporte logístico y económico para las giras de campo, además de valiosas sugerencias para mejorar el manuscrito; Annette Aiello, Smithsonian Tropical Research Institute, por comentarios y correcciones con el fin de mejorar la redacción del abstract; James Coronado, Alberto Mena, y Alonso Santos, Universidad de Panamá, por colaborar en las colectas de campo; Ángel Aguirre, Smithsonian Tropical Research Institute, por facilitar referencias de gran utilidad en la elaboración de este trabajo; a todo el personal de la Autoridad Nacional del Ambiente (ANAM) que colaboró con nosotros durante las giras de campo al PND.

### REFERENCIAS

Brothers, D. J. & A.T. Finnamore. T. 1993. Family Pompilidae, p. 202. En: Goulet, H. y J.T. Huber (eds.). *Hymenoptera of the World: An Identification Guide to Families*. Research Branch, Agriculture Canada, Publication 1984/E, Ottawa.

Cambra, R. A. 2005. Nuevos Registros de Avispas Apoidea y Vespoidea (Insecta: Hymenoptera) para Panamá. *Tecnociencia*, 7(2): 95-108.

Cambra, R. A., D. Quintero Arias, & R. J. Miranda. 2004. Presas, Comportamiento de Anidación y Nuevos Registros de Distribución en Pompílicos Neotropicales (Hymenoptera: Pompilidae). *Tecnociencia*, 4(1): 95-109.

Cambra, R. A. & R. Wahis. 2005. New Species of *Cryptocheilus* Panzer from Panama and Costa Rica (Hymenoptera: Pompilidae, Pepsinae). *Notes fauniques de Gembloux*, 56: 3-6.

Cambra, R. A. & D. Quintero Arias. 2009. Diversidad de avispas Vespoidea y Apoidea (Hymenoptera) de la Reserva Forestal La Tronosa. Págs. 82-86. En: C. Garibaldi (ed.), *Evaluación de la biodiversidad en la Reserva Forestal La Tronosa, provincia de Los Santos, Panamá. Resultados Finales 2005 – 2008*. Proyecto PROBIO-Universidad de Panamá, UP/ Agencia de Cooperación Internacional del Japón, JICA. 240 pp.

Cameron, P. 1888-1900. Insecta. Hymenoptera (Fossores). *Biologia Centrali-Americana*, 2: 1-413.

Corro, P. E. 2011. Biodiversidad de avispas cazadoras de arañas (Hymenoptera: Pompilidae) en el Parque Nacional Darién, República de Panamá, incluyendo clave genérica ilustrada para Panamá. Tesis de Licenciatura, Universidad de Panamá. 108 págs.

Evans, H. E. 1966. A revision of the Mexican and Central American spider wasps of the subfamily Pompilinae (Hymenoptera: Pompilidae). *Memoirs of the American Entomological Society* 20: 1-442.

Hanson, P. E. & M. S. Wasbauer. 2006. Familia Pompilidae. Págs. 594-606. En: Hanson, P.E. y Gauld, I. D. (eds.). Hymenoptera de la Región Neotropical. *Memoirs of the American Entomological Institute*, 77: 1-994.

Wasbauer, M. S. 1995. Pompilidae. Págs. 522-539. En: Hanson, P.E. y Gauld, I. D. (eds.) *The Hymenoptera of Costa Rica*. Oxford University Press. 893 págs.

*Recibido agosto de 2011, aceptado septiembre de 2011.*



**NUEVO REGISTRO PARA PANAMÁ DE *PELECITUS HELICINUS* (Molin, 1860) (NEMATODAS: FILARIOIDEA: ONCHOCERCIDAE) COMO PARÁSITO SUBCUTÁNEO DEL AVE *ARREMON AURANTIROSTRIS* (PASSERIFORMES: EMBERIZIDAE)**

**Oscar G. López Ch.<sup>1</sup>, Alonso Santos M.<sup>2</sup>, Diomedes Quintero A.<sup>3</sup>, Celestino Aguilar<sup>4</sup> y Matthew J. Miller<sup>5</sup>.**

<sup>1, 2, 4, 5</sup>Instituto Smithsonian de Investigaciones Tropicales, Laboratorio de Biología Molecular y Evolución, Panamá, República de Panamá. <sup>2, 3</sup>Museo de Invertebrados G. B. Fairchild, Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología, Universidad de Panamá, Panamá, República de Panamá.

e-mail: <sup>1</sup>LopezOG@si.edu, <sup>2</sup>santosmurgasa@gmail.com, <sup>4</sup>nemo\_cas@hotmail.com, <sup>3</sup>DQUINTER666@gmail.com, <sup>5</sup>millerma@si.edu

**RESUMEN**

Se reporta por primera vez para Panamá el nemátodo parasítico *Pelecitus helycinus* (Molin) en un gorrión piquinaraja (Orange-billed Sparrow) (*Arremon aurantirostris*, Emberizidae), de Aguas Claras, Provincia de Colón, encontrándose 27 nemátodos en el tejido subcutáneo de la articulación tibio-tarsal y dedos. A pesar que *P. helycinus* tiene una distribución cosmopolita en las Américas, éste es el primer reporte de *A. aurantirostris* como hospedero de este parásito y primera vez que se reporta el género *Pelecitus* para Panamá. Se presenta un listado de las aves que han sido registradas como hospederos de *P. helycinus* en la literatura consultada.

**PALABRAS CLAVES**

Nemátodo, ave, hospedero, Provincia de Colón, Aguas Claras.

## **ABSTRACT**

We report the first Panamanian record of *Pelecitus helycinus*, a nematode, which was encountered as a parasite of the Orange-billed Sparrow (*Arremon aurantiirostris*, Emberizidae) in Aguas Claras, Colón Province, which is also a new record for this species as host of this *P. helycinus*. We extracted 27 nematodes from the subcutaneous tissue of the tibia-tarsal joint and fingers of *A. aurantiirostris*. A list of those birds that have been recorded as hosts of *P. helycinus* is given.

## **KEYWORDS**

Nematode, birds, host, Colon Province, Aguas Claras.

## **INTRODUCCION**

A pesar de que la ornitología de áreas neotropicales ha crecido mucho en las últimas décadas, nuestro conocimiento sobre las enfermedades y parásitos de aves neotropicales todavía está en sus inicios (Oniki *et al.*, 2002). La filariasis es una enfermedad común causada por los nematodos filarias y es muy poco estudiada en aves silvestres. El género *Pelecitus* (Nematoda: Filarioidea: Onchocercidae: Dirofiliariinae) comprende 16 especies, de las cuales la mayoría son parásitos de las aves (Bartlett & Greiner, 1986). Es la filaria más común en aves neotropicales, siendo reportado parasitando ampliamente 17 órdenes y 30 familias de aves. *Pelecitus*, como las demás filarias, son transmitidas a los hospederos vertebrados (principalmente aves, pero también mamíferos, anfibios y reptiles) por la picadura de dípteros hematófagos (Bartlett, 2008) o por piojos (Mallophaga) los cuales pueden servir como vectores de las microfilarias al hospedero definitivo (Bartlett & Anderson, 1987; Bartlett, 2008).

Los adultos de *Pelecitus* residen en el tejido subcutáneo, provocando la formación de masas típicas en las patas. Otras filarias han sido documentadas en psitácidos pero se desconoce su capacidad potencial de patogenicidad (Soto & Acosta, 2009). En general, su impacto a la salud de las aves silvestres neotropicales no se puede estimar, sin embargo, ha estado implicado como un riesgo para especies amenazadas en peligro de extinción. Además este año fue reportado un caso de filariasis ocular en un hombre en Brasil (CDC, 2011).

La sistemática de la *Dirofilaria* ha sido objeto de muchos estudios en los que se propone el uso de la morfología de adultos o de los hospederos infestados como criterios para resolver las relaciones en el grupo (Omar, 1992). *Pelecitus helycinus* fue originalmente descrita en el género *Spiroptera* por Molin (1860). Fue transferida y designada como especie tipo de *Pelecitus* por Railliet & Henry (1910), con especímenes colectados del ave *Xiphloena punicia*, Cotingidae, en Brasil (Oniki *et al.*, 2002).

En Panamá es nula la literatura sobre filariasis en aves. En el presente trabajo se identifica al nemátodo *Pelecitus helycinus* parasitando un gorrión piquinaranja capturado en la comunidad de Aguas Claras en la provincia de Colón, Panamá. Este es el primer reporte en Panamá de este parásito de aves, y la primera vez que se reporta al ave *Arremon aurantirostris* como hospedero de este parásito.

## **METODOLOGIA**

### **Area de Estudio y Colecta de Aves**

El Instituto Smithsonian de Investigaciones Tropicales (STRI), en colaboración con el Instituto Conmemorativo Gorgas de Estudios de la Salud y del Centro para el Control y Prevención de Enfermedades (CDC), desde el año 2010 desarrolla proyectos sobre enfermedades zoonóticas en seis comunidades de la República de Panamá. La comunidad de Aguas Claras, corregimiento de Santa Rosa, distrito de Colón, Provincia de Colón, forma parte de las zonas de estudio (Fig. 1).

Entre el 13 y 14 de marzo de 2010, capturamos aves silvestres en Aguas Claras con redes ornitológicas de nylon; una porción de las aves capturadas fueron sacrificadas y congeladas en el campo para su posterior transporte hacia los laboratorios de Instituto Smithsonian de Investigaciones Tropicales para prepararlas como voucher científico, como está aprobado por el Comité Institucional para el Cuidado y el Uso de Animales (IACUC- siglas en inglés, número de permiso 2007-03-03-15-07) y bajo el permiso de colecta SEA/AGO-10 otorgado por la Autoridad Nacional del Ambiente (ANAM).



Fig. 1. Representación geográfica de la Comunidad de Aguas Claras (simbolizada por el círculo amarillo), ubicada en la cuenca del canal de Panamá en la zona de amortiguamiento del Parque Nacional Soberanía.

### **Preparación e identificación de los nematodos**

Extraídos los nemátodos de las masas de tejido subcutáneo, se depositaron en viales con alcohol absoluto (Pinto & Noronha, 2003). Para la identificación del nemátodo se colocaron por 72 horas en creosota (Merck). Posteriormente se colocaron en portaobjetos de vidrio con Bálsamo de Canadá. Se identificaron los especímenes utilizando la revisión taxonómica de Bartlett & Greiner (1986). Después de identificados y rotulados, los especímenes fueron depositados en el Museo de Invertebrados G. B. Fairchild (MIUP) de la Universidad de Panamá.

## RESULTADOS

Durante la preparación taxidérmica del gorrión piquinaraja (Orange-billed Sparrow) *Arremon aurantirostris* (Emberizidae) se descubrieron especímenes de *Pelecitus helycinus* (Molin) (Fig. 2). En las patas del gorrión se observaron cuatro masas tisulares hinchadas y rojizas. Las dos masas más grandes se encontraron en los tobillos y las más pequeñas en dos dedos de la pata derecha (Fig. 3).

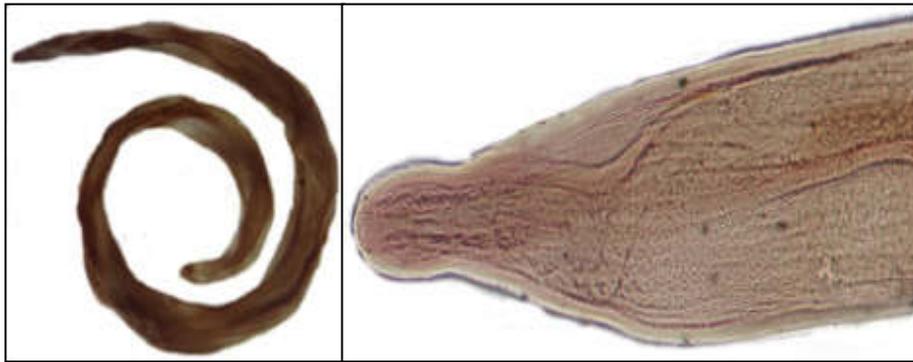


Fig. 2. Fotografía de *Pelecitus helycinus* (Molin, 1860) obtenida de un estéreo microscopio Leica M165C.

Con pinzas de punta fina se realizó una pequeña incisión en cada masa tisular, y ejerciendo presión sobre cada masa tisular, se extrajeron los nemátodos (Fig.3).

Se extrajeron 27 nemátodos, todos identificados como *P. helycinus* de las masas tisulares en patas y dedos de una hembra adulta de *Arremon aurantirostris*. Doce nemátodos se extrajeron de la articulación tibio-tarsal izquierda, nueve en la articulación tibio-tarsal derecha, y en los dedos de la pata derecha: tres en la almohadilla del dedo medio y tres en la almohadilla del dedo interior.

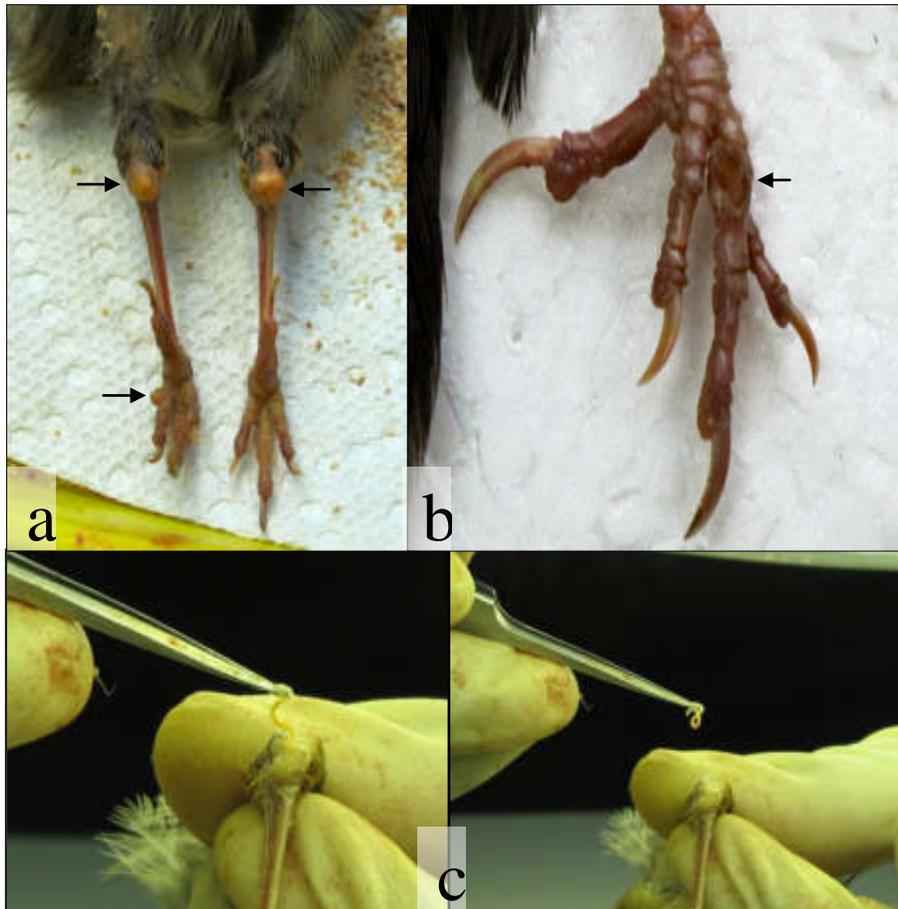


Fig. 3. a) Masas tisulares con los nemátodos. b) Dedo medio de la pata derecha después de la extracción de los nemátodos. c) Extracción de los nemátodos de una de las masas tisulares ubicada en el tobillo.

La hembra adulta hospedera, *A. aurantirostris* (Passeriformes: Emberizidae), poseía 100% de osificación de su cráneo y un peso de 29.6 g. Registrada con el número de STRIBC2810 de la colección de aves del Instituto Smithsonian de Investigaciones Tropicales (STRIBC) y colectada en las coordenadas 9°11.203'N y 79°41.480'W.

De tres especímenes hembras de *A. aurantiirostris* colectados en Aguas Claras, STRIBC2810 fue la única ave que se encontró parasitada. Adicionalmente, hemos examinado 46 especímenes (28 machos y 18 hembras) de esta especie en la STRIBC, y no hemos encontrado ningún espécimen adicional parasitado por nematodos en sus patas. Por lo tanto, la frecuencia de parasitismo que hemos determinado en *A. aurantiirostris* (49 especímenes examinados) es de solo 2%. Pero si tomamos en cuenta el total de aves colectadas en la comunidad de Aguas Claras y con la misma fecha, el porcentaje de infección baja a 1%.

Cuadro 1. Aves registradas como hospederos de *P. helcinus* desde 1995.

ESPECIES	AUTORES			
	Pinto & Noronha	Oniki <i>et al.</i> (2002)	Pinto <i>et al.</i> (1997)	Vicente <i>et al.</i> (1995)
<i>Claravis pretiosa</i> *		✓		
<i>Dryophila</i>		✓		
<i>Dryophila</i>		✓		
<i>Thamnophilus</i>		✓		
<i>Pyriglena</i>		✓		
<i>Conopophaga</i>		✓		
<i>Chiroxiphia</i>		✓		
<i>Myiarchus</i>		✓		
<i>Habia rubica</i> *		✓		
<i>Trichothraupis</i>		✓		
<i>Basileuterus</i>		✓		
<i>Tachyphonus rufus</i> *		✓		
<i>Cissopis leveriana</i>		✓		
<i>Cyanocorax</i>			✓	
<i>Pteroglossus</i>	✓			
<i>Amazona aestiva</i>				✓
<i>Anodorhynchus</i>				✓
<i>Conurus parvus</i>				✓
<i>Pionus maximiliani</i>				✓
*Especies que habitan en Panamá				

## DISCUSION

El conocimiento sobre la diversidad y distribución de nemátodos parásitos de aves silvestres en Panamá y en el resto del neotropico es casi nulo (Oniki *et al.*, 2002). No encontramos registro sobre parasitismo del género *Pelecitus* en Panamá en la literatura consultada, a pesar que éste género tiene una amplia distribución geográfica y una gran diversidad de aves hospederas. Por tal motivo, presentamos un cuadro con las especies de aves que han sido reportadas en la literatura como hospederos de *P. helycinus* desde 1995 (Cuadro 1). Del total de especies de aves citadas en el Cuadro 1, 15% son especies de aves que también se encuentran en Panamá.

Oniki *et al.* (2002) en 423 aves muestreadas de Brasil obtuvo resultados similares, con una baja frecuencia de parasitismo total, equivalente a un 5%. Oniki *et al.* (2002) reporta a *Claravis pretiosa* (Columbiformes: Columbidae) y *Habia rubica* (Passeriformes: Cardinalidae), dos especies que también habitan en Panamá, con 2% del total de parasitismo de aves de Brasil. Oniki *et al.* (2002) encontró a *P. helycinus* en 13 especies de aves, distribuidas en dos ordenes y 13 familias. Todas las especies de aves fueron registradas como nuevos hospederos para ese nemátodo y presentaron las mismas lesiones externas en las patas que observamos en el ave parasitada en Panamá. Barlett & Greiner (1986) manifiestan que éste nemátodo es de tipo generalista ya que no tiene un hospedero específico y parasita aves de diversas familias. Por lo general *Pelecitus* parasita especies de aves que se encuentran o habitan el sotobosque, pero también puede parasitar aves que se encuentran en el dosel del bosque (Vicente *et al.*, 1995). Dado esto, es importante nota que *Arremon arurantiirostris* es de hábitos de forrajeo, y frecuentemente se le encuentra en parejas, saltando y excavando el suelo, en el sotobosque tanto de bosques secundarios como en bosques más húmedos, de las tierras bajas de ambas vertientes de Panamá (Ridgely & Gwynne, 2005). Determinar la relación entre el comportamiento de las aves en el suelo y la infección de *Pelecitus* en aves silvestres neotropicales es materia en espera de futuros estudios.

Es muy poco lo que se conoce sobre el ciclo de vida de la mayoría de las especies de *Pelecitus* y los vectores que transmiten las microfilarias a los hospederos vertebrados. La mayoría de las hembras adultas vivíparas se localizaron en el tejido subcutáneo de tobillos y patas en aves. *Pelecitus fulicaeatrae*, al igual que *P. helycinus*, presenta una amplia diversidad de aves hospederas (Escudero *et al.*, 2007) y es la única especie que se ha demostrado utiliza a un Mallophaga como vector (Bartlett & Anderson, 1987). Otras especies de *Pelecitus* se han encontrado en las extremidades posteriores en mamíferos del orden Lagomorpha como *P. scapiceps* y *P. romeri* (Jiménez-Ruiz *et al.*, 2004). Lo más sorprendente es que se ha reportado el primer caso de patología humana por *Pelecitus*. La filaria, de aproximadamente 4.5 mm, se extrajo del tejido muscular del iris de un varón de 29 años en la región Amazónica de Brasil (Bain *et al.*, 2011).

Siendo *Pelecitus* un nematodo cosmopolita, falta mucho por conocer sobre su biología, distribución y afectaciones a sus diversos hospederos.

#### **AGRADECIMIENTOS**

Queremos agradecer al Lic. Benito Cisneros, Técnico Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología al igual que al Profesor Alberto Mena, Departamento de Microbiología, Escuela de Biología, Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología de la Universidad de Panamá, por la ayuda en la preparación y conservación de las placas de los parásitos.

#### **REFERENCIAS**

- André J. P. 2005. *Guide Pratique Des Maladies Des Oiseaux De Cages Et De Volieres* Ed. Medcom, París Pp. 195.
- Bain, O., D. Otranto, D. G. Diniz, J. N. dos Santos, N. P. de Oliveira, N. Pinto, I. Frota, R. Frota, L. Frota, F. Dantas, & E. F. Frota. 2011. Human intraocular filariasis caused by *Pelecitus* sp. Nematode, Brazil. *Emerging Infectious Diseases*, 17(5): 867-869.

Bartlett, C. M. 2008. Avian Filarioid Nematodes of the World. Chapter 26, *En: Parasitic Diseases of Wild Birds*. Atkinson, C. T., N. J. Thomas & D. B. Hunter, eds. Wiley-Blackwell Co.

Bartlett, C. M. & E. C. Greiner. 1986. A revision of *Pelecitus* Railliet & Henry, 1910 (Filarioidea, Dirofilarinae) and evidence for the “capture” by mammals of filarioids from birds. *Bulletin du Muséum National d’Histoire Naturelle*, 8: 47-99.

Bartlett, C. M. & R. C. Anderson. 1987. *Pelecitus fulicaeatrae* (Nematoda: Filarioidea) of coots (Gruiformes) and grebes (Podicipediformes): skin-inhabiting microfilariae and development in Mallophaga. *Canadian Journal of Zoology*, 65: 2803-2812.

Center for Disease Control and Prevention (CDC). 2011. Morbidity and Mortality. Weekly Report. 60 (29): 977-1008.

Escudero, G., J. Diaz, & J. Notamicola. 2007. New host and distribution records of *Pelecitus fulicaeatrae* (Diesing, 1861) (Nematoda, Onchocercidae). *Acta Parasitologica*, 52(4): 419-421.

Gandolfi, P. 2001. *Compendio Per La Scuola Di Specializzazione In Patologia Aviare*. Ed. Edagricole, Parma, Italia. Pp. 6.

Jiménez-Ruiz, F. A., S. L. Gardner, F. A. Cervantes & C. Lorenzo. 2004. A new species of *Pelecitus* (Filarioidea: Onchocercidae) from the endangered Tehuantepec Jackrabbit *Lepus flavigularis*. *The Journal of Parasitology*, 90(4): 803-807.

Koehsler, M., A. Soleiman, H. Aspöck, H. Auer & J. Walochnik. 2007. *Onchocerca jakutensis* Filariasis in Humans. *Emerging Infectious Diseases*, 13(11): 1749-1752.

Omar, B. B. 1992. Phylogenetic relationships among the genera of Dirofilarinae Sandground, 1921 (Nematoda: Onchocercidae). *Japanese Journal of Tropical Medicine and Hygiene*, 20: 261-270.

Oniki, Y., J. M. Kinsella & E. O. Willis. 2002. *Pelecitus helycinus* Railliet & Henry, 1910 (Filarioidea, Dirofilarinae) and Other Nematode Parasites of Brazilian Birds. *Memórias do Instituto Oswaldo Cruz*, 97(4): 597-598.

Pinto, R. M. & D. Noronha. 2003. Analysis of Brazilian species of *Pelecitus* Railliet & Henry (Nematoda, Filarioidea) with the establishment of new records. *Revista Brasileira de Zoologia*, 20(2): 361-364.

Railliet, A. & A. Henry. 1910. Nouvelles observations sur les Thélazies, nématodes parasites de l'oeil. *Comptes Rendus des Séances et Mémoires de la Société de Biologie*, 68: 783-785.

Ridgely, R. S. & J. A. Gwynne. 2005. Guía de las aves de Panamá incluyendo Costa Rica, Nicaragua y Honduras. Sociedad Audobon de Panamá y Asociación Nacional para la Conservación de la Naturaleza (ANCON).

Soto, C. J. & I. Acosta. 2009. Hallazgo de filarias en palomas. *Revista Electrónica de Veterinaria*, 10(7b): 1-8.

Vicente, J. J., H. O. Rodrigues, D. C. Gomes & R. M. Pinto. 1995. Nematóides do Brasil. Parte IV: Nematóides de aves. *Revista Brasileira de Zoologia*, 12 (Supl. 1): 1-273.

***Recibido mayo de 2011, aceptado septiembre de 2011.***



## **OPERADORES PROYECCIÓN EN ESPACIOS DE HILBERT**

**Daniel Vásquez**

Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología,  
Departamento de Matemática.  
email:dvasquez65 @ yahoo.com

### **RESUMEN**

El propósito de este trabajo es el desarrollo de la teoría de los operadores proyecciones en espacios con producto interno, el cual es un concepto de suma importancia en el estudio del Análisis Funcional. Se define el operador proyección en espacios normados y espacios con producto interno, se estudian sus propiedades topológicas, así como aquellas propiedades referentes a operaciones con proyecciones ortogonales.

### **PALABRAS CLAVES**

Ortogonalidad, suma directa, Operador proyección, proyección ortogonal, Espacio de Hilbert.

### **ABSTRACT**

The purpose of this work is the development of the theory of the projections operators in inner product spaces, which is a concept of extreme importance in the study of the Functional Analysis. The projection operator in normed spaces and inner product spaces are defined, their topological properties are studied, as well as those properties referring to operations with orthogonal projections.

### **KEYWORDS**

Orthogonality, direct sum, projections operators, orthogonal projections, Hilbert space.

## INTRODUCCIÓN

Las funciones lineales juegan un papel preponderante en el estudio del álgebra lineal. En los espacios normados, las funciones lineales más interesantes son las funciones lineales continuas u operadores lineales acotados. El objetivo de este trabajo es el estudio de un tipo particular de operadores lineales acotados, llamados operadores proyecciones los cuales son de gran importancia pues están relacionados con el comportamiento algebraico de los espacios y particularmente con la suma directa y el problema de la mejor aproximación.

### 1. Operadores proyecciones

**Definición 1.1:** Sean  $X$  un espacio vectorial con producto interno,  $x, y \in X$ . Decimos que  $x$  y  $y$  son ortogonales si

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Denotamos por  $A^\perp$  al conjunto

$$A^\perp = \{x \in X / \langle x, y \rangle = 0\}$$

llamado el anulador de  $A$ .

**Definición 1.2:** Un espacio vectorial  $X$  es la suma directa de dos subespacios  $Y, Z$  de  $X$ , escrito

$$H = Y \oplus Z$$

si cada  $x \in X$  tiene una única representación

$$x = y + z \quad y \in Y, z \in Z.$$

**Teorema 1.1** Sea  $Y$  cualquier subespacio cerrado de un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces

$$H = Y \oplus Y^\perp$$

**Observación:** El espacio  $Y^\perp$  se llama el complemento ortogonal de  $Y$

**Definición 1.3:** Un operador lineal  $P: X \rightarrow X$  de un espacio vectorial en sí mismo es un **operador proyección** (algebraico) sobre  $X$  si  $P$  es idempotente, o sea que

$$P^2 = P \circ P = P.$$

En el siguiente teorema relacionamos los operadores proyecciones con la suma directa de un espacio vectorial.

**Teorema 1.2:** Sea  $X$  un espacio vectorial

a) Dado un operador proyección  $P: X \rightarrow X$  entonces

$$X = \text{Im}(P) \oplus N(P)$$

donde  $N(P) = \{x \in X: P(x) = 0\}$  es el núcleo de  $P$  y  $\text{Im}(P) = \{P(x): x \in X\}$  es la imagen de  $P$ .

b) Si  $X = M \oplus N$ , donde  $M$  y  $N$  son subespacios de  $X$ , entonces la función

$$\begin{aligned} P: X &\rightarrow X \\ P(x) &= m \end{aligned}$$

donde  $x = m+n$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$ , es un operador proyección. Además  $N(P) = N$ ,  $\text{Im}(P) = M$ .

**Demostración:**

a) Sea  $x \in X$ , entonces

b)

$$x = x + (P(x) - P(x)) = P(x) + (x - P(x)).$$

Note que

$$P(x - P(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$$

luego  $P(x) \in \text{Im}(P)$ ,  $x - P(x) \in N(P)$ . Por lo tanto

$$X = \text{Im}(P) + N(P).$$

Sea  $x \in \text{Im}(P) \cap N(P)$ , entonces existe un  $y \in X$  tal que  $x = P(y)$ ,  $x \in N(P)$ .

Por lo tanto

$$0 = P(x) = P(P(y)) = P(y) = x.$$

Así pues,

$$\text{Im}(P) \cap N(P) = \{0\}$$

y

$$X = \text{Im}(P) \oplus N(P)$$

b) Sean  $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces existen  $m_1, m_2 \in M, n_1, n_2 \in N$  tales que

$$x = m_1 + n_1, \quad y = m_2 + n_2$$

luego

$$x + y = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2), \quad m_1 + m_2 \in M, n_1 + n_2 \in N$$

y

$$\alpha x = \alpha m_1 + \alpha n_1, \quad \alpha m_1 \in M, \alpha n_1 \in N.$$

Por lo tanto,

$$P(x+y) = m_1 + m_2 = P(x) + P(y)$$

y

$$P(\alpha x) = \alpha m_1 = \alpha P(x).$$

Así pues  $P$  es un operador lineal.

Probemos que  $P$  es un operador idempotente. En efecto, es claro que para todo  $m \in M$ ,

$$P(m) = m.$$

Sea  $x = m + n \in X$  con  $m \in M, n \in N$ . Entonces

$$P^2(x) = P(P(x)) = P(m) = m = P(x)$$

Lo que implica que  $P^2 = P$ ; o sea que  $P$  es un operador proyección. Finalmente note que  $\text{Im}(P) = M$  y  $N(P) = N$  ya que  $X = M \oplus N$ .

**Teorema 1.3:** Sea  $X$  un espacio vectorial y  $P: X \rightarrow X$  un operador lineal.  $P$  es un operador proyección si y solo si  $I - P$  es un operador proyección, donde  $I: X \rightarrow X$  es el operador identidad sobre  $X$ .

**Demostración:**

Como

$$(I - P)^2 = (I - P)(I - P) = I - 2P + P^2$$

se tiene que  $(I - P)^2 = I - P$  si y solo si  $P^2 = P$ . Así pues  $I - P$  es un operador proyección si y solo si  $P$  es un operador proyección.

**Observación:** Si  $P: X \rightarrow X$  es un operador proyección entonces  

$$\text{Im}(I - P) = N(P) \quad \text{y} \quad N(I - P) = \text{Im}(P)$$

**Definición 1.4:** Sea  $X$  un espacio normado y  $P: X \rightarrow X$  un operador lineal.  $P$  es un **operador proyección** (topológico) sobre  $X$  si  $P$  es un operador idempotente continuo; o sea que  $P$  es un operador proyección continuo.

**Teorema 1.4:** Sea  $X$  un espacio normado y  $P: X \rightarrow X$  un operador proyección topológico. Entonces  $X = \text{Im}(P) \oplus N(P)$  y  $N(P)$ ,  $\text{Im}(P)$  son subespacios cerrados de  $X$ .

**Demostración:**

Por el Teorema 1.1(a) se tiene que

$$X = \text{Im}(P) \oplus N(P).$$

Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de elementos de  $N(P)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X,$$

entonces  $P(x_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Luego, como  $P$  es continuo

$$P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = 0.$$

Así pues  $x \in N(P)$  y  $N(P)$  es un subespacio cerrado de  $X$ .

Por otro lado, como por el Teorema 1.2,  $I - P$  es un operador proyección continuo, se tiene que  $\text{Im}(I - P) = N(P)$  es un subespacio cerrado de  $X$ .

**Teorema 1.5:** Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $M, N$  subespacios cerrados de  $X$  tales que  $X = M \oplus N$ . Entonces el operador lineal  $P: X \rightarrow X$  definido por

$$P(x) = m$$

donde  $x = m+n$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$ , es un operador proyección topológico.

**Demostración:**

En la parte (b) del Teorema 1.1 se probó que  $P$  es un operador proyección algebraico. Sólo nos resta probar que  $P$  es un operador lineal acotado. En efecto, definamos la función

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ \|x\|_1 &= \|m\| + \|n\| \end{aligned}$$

donde  $x=m+n$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$ . Es claro que  $\|\cdot\|_1$  es una norma sobre  $X$ . Probemos que  $(X, \|\cdot\|_1)$  es un espacio de Banach. En efecto, sea  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  una sucesión de Cauchy en  $(X, \|\cdot\|_1)$ , entonces existen dos sucesiones  $\{m_k\}_{k=1}^\infty$  y  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$  tales que

$$x_k = m_k + n_k, \quad m_k \in M, n_k \in N.$$

Como

$$\|m_k - m_i\| \leq \|x_k - x_i\|_1, \quad \|n_k - n_i\| \leq \|x_k - x_i\|_1$$

se tiene que  $\{m_k\}_{k=1}^\infty$  es una sucesión de Cauchy en  $M$  y  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$  es una sucesión de Cauchy en  $N$ . Como  $M$  y  $N$  son subespacios cerrados del espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  se tiene que  $(M, \|\cdot\|)$  y  $(N, \|\cdot\|)$  son espacios de Banach. Por lo tanto existen  $m \in M$  y  $n \in N$  tales que

$$\|m_k - m\|_{k \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \|n_k - n\|_{k \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

De lo anterior se tiene que

$$\|x_k - (m + n)\|_1 = \|m_k - m\|_1 + \|n_k - n\|_1 \rightarrow 0.$$

Por consiguiente, la sucesión  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  es convergente en  $(X, \|\cdot\|_1)$  y  $(X, \|\cdot\|_1)$  es un espacio de Banach.

Por otro lado, si  $x = m+n$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$ , entonces

$$\|P(x)\| = \|m\| \leq \|m\| + \|n\| = \|x\|_1.$$

Por lo tanto,  $P: (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$  es un operador lineal acotado.

Note que

$$\|x\| = \|m+n\| \leq \|m\| + \|n\| = \|x\|_1$$

para todo  $x = m+n \in X$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$ . Así pues  $(X, \|\cdot\|)$  y  $(X, \|\cdot\|_1)$  son completos y

$$\|x\| \leq \|x\|_1 \text{ para todo } x \in X.$$

Luego, por el Teorema de la Función Abierta, se tiene que las normas  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|_1$  son equivalentes.

De lo anterior se tiene que existe una constante  $\alpha > 0$ , tal que si  $x = m+n \in X$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$  entonces

$$\|P(x)\| = \|m\| \leq \|m\| + \|n\| = \|x\|_1 \leq \alpha \|x\|$$

lo que implica que la función

$$P: P: (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$$

es un operador lineal acotado. Por lo tanto,  $P$  es un operador proyección topológico.

**Observación:** Dado un espacio normado  $X$  y un subespacio cerrado  $M$  de  $X$ , si existe un subespacio cerrado  $N$  de  $X$  tal que  $X = M \oplus N$  entonces se dice que  $M$  es complementado en  $X$  y que  $N$  es un complemento topológico de  $M$  en  $X$ . Como habíamos. En términos de operadores proyecciones los Teoremas 1.3 y 1.4 nos dicen que un subespacio cerrado  $M$  de un espacio de Banach  $X$  es complementado en  $X$  si y solo si existe un operador proyección topológico  $P: X \rightarrow X$  tal que  $\text{Im}(P) = M$ .

**Definición 1.5:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $P: X \rightarrow X$  un operador proyección algebraico.  $P$  es una **proyección ortogonal** si

$$N(P) \perp \text{Im}(P).$$

El siguiente resultado caracteriza las proyecciones ortogonales.

**Teorema 1.6:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $P: X \rightarrow X$  un operador proyección.  $P$  es una proyección ortogonal si y solo si

$$\langle x, P(y) \rangle = \langle P(x), y \rangle$$

para todo  $x, y \in X$  (o sea que  $P$  es autoadjunto).

**Demostración:**

Supongamos primeramente que  $P: X \rightarrow X$  es una proyección ortogonal, entonces por el Teorema 2.1 (a) y la Definición 1.3 se tiene que

$$X = \text{Im}(P) \oplus N(P) \quad , \quad \text{Im}(P) \perp N(P).$$

Sea  $x, y \in X$ , entonces existen  $m_1, m_2 \in \text{Im}(P)$ ,  $n_1, n_2 \in N(P)$  tales que

$$x = m_1 + n_1, \quad y = m_2 + n_2, \quad P(x) = m_1, \quad P(y) = m_2$$

luego

$$\begin{aligned} \langle x, P(y) \rangle &= \langle m_1 + n_1, m_2 \rangle = \langle m_1, m_2 \rangle \\ \langle P(x), y \rangle &= \langle m_1, m_2 + n_2 \rangle = \langle m_1, m_2 \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\langle x, P(y) \rangle = \langle P(x), y \rangle$  para todo  $x, y \in X$ .

Recíprocamente, supongamos que

$$\langle x, P(y) \rangle = \langle P(x), y \rangle$$

para todo  $x, y \in X$ . Sea  $x \in \text{Im}(P)$ ,  $y \in N(P)$ , entonces

$$P(x) = x \quad \text{y} \quad P(y) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\langle x, y \rangle = \langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0.$$

Así pues  $\text{Im}(P) \perp N(P)$  y  $P$  es una proyección ortogonal.

**Teorema 1.7:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $P: X \rightarrow X$  una proyección ortogonal. Entonces  $P$  es un operador lineal acotado; es decir,  $P$  es un operador proyección topológico. Además, si  $P \neq 0$  entonces  $\|P\| = 1$ .

**Demostración:**

Como  $P$  es una proyección ortogonal,

$$X = \text{Im}(P) \oplus N(P), \quad \text{Im}(P) \perp N(P).$$

Sea  $x \in X$ , entonces existen  $m \in \text{Im}(P)$ ,  $n \in N(P)$  tales que

$$x = m + n, \quad P(x) = m, \quad \langle m, n \rangle = 0.$$

Luego, por el Teorema de Pitágoras

$$\|x\|^2 = \|P(x) + n\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|n\|^2$$

por tanto

$$\|P(x)\| \leq \|x\|$$

para todo  $x \in X$ . Así pues,  $P$  es un operador lineal acotado y  $\|P\| \leq 1$ .

Por otro lado, como para todo  $x \in \text{Im}(P)$ ,

$$\|P(x)\| = \|x\|$$

se tiene que  $\|P\| = 1$ , si  $P \neq 0$ .

**Corolario 1.1:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $P: X \rightarrow X$  una proyección ortogonal. Entonces  $\text{Im}(P)$  y  $N(P)$  son subespacios cerrados de  $X$ .

**Teorema 1.8:** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $P: H \rightarrow H$  una proyección ortogonal. Entonces

$$N(P) = (\text{Im}(P))^\perp, \quad \text{Im}(P) = (N(P))^\perp.$$

**Demostración:**

Como  $P$  es una proyección ortogonal, por el Teorema 1.1 (a)

$$H = \text{Im}(P) \oplus N(P), \quad \text{Im}(P) \perp N(P).$$

Por lo tanto,

$$N(P) \subset \text{Im}(P)^\perp.$$

Sea  $x \in \text{Im}(P)^\perp$ , entonces existen  $m \in \text{Im}(P)$ ,  $n \in N(P)$  tales que

$$x = m + n$$

luego,

$$m = x - n \in \text{Im}(P)^\perp$$

por lo tanto,

$$m \in \text{Im}(P) \cap \text{Im}(P)^\perp = \{0\}$$

de donde

$$m = 0 \quad \text{y} \quad x = n \in N(P).$$

Así pues,

$$\text{Im}(P)^\perp \subset N(P)$$

y

$$N(P) = \text{Im}(P)^\perp.$$

Finalmente, como por el Corolario 1.1,  $\text{Im}(P)$  y  $N(P)$  son subespacios cerrados de  $H$  y  $H$  es completo, se tiene que

$$N(P)^\perp = (\text{Im}(P)^\perp)^\perp = \text{Im}(P).$$

## 2. Operadores proyecciones en espacios de Hilbert

Como un espacio de Hilbert  $H$  puede ser representado como la suma directa de un subespacio cerrado  $Y$  de  $H$  y su complemento ortogonal  $Y^\perp$ ; esto es

$$H = Y \oplus Y^\perp$$

se tiene que para cada  $x \in H$  existe un único  $y \in Y$  tal que

$$x = y + z \quad (z \in Y^\perp). \quad (1)$$

De esta manera, la ecuación (1) define una función

$$P_Y: H \rightarrow Y \subset H \\ x \rightarrow y = P_Y(x)$$

donde

$$\|x - P_Y(x)\| = \inf \{\|x - y\| : y \in Y\} = d(x, Y)$$

$P_Y$  es llamada la proyección ortogonal o proyección de  $H$  sobre  $Y$ .

De igual manera,

$$P_{Y^\perp}: H \rightarrow Y^\perp \subset H \\ x \rightarrow y = P_{Y^\perp}(x)$$

es una proyección ortogonal de  $H$  sobre  $Y^\perp$ , cuyas propiedades son completamente similares a las propiedades de la proyección  $P_Y$ .

Note que en (1) podemos escribir

$$x = y + z = P_Y(x) + P_{Y^\perp}(x).$$

Luego

$$P_{Y^\perp} = I - P_Y$$

donde  $I: X \rightarrow X$  es la función identidad de  $X$ .

Si  $x \in Y$ , entonces  $P_Y(x) = x$ , ya que  $x$  es la mejor aproximación a sí mismo por elementos de  $Y$ . Por consiguiente,

$$P_Y|_Y = I_Y$$

donde  $I_Y: Y \rightarrow Y$  es la función identidad de  $Y$ .

Por otro lado,

$$x \in Y^\perp \Leftrightarrow x = P_{Y^\perp}(x) \Leftrightarrow P_Y(x) = 0$$

así

$$Y^\perp = \{x \in H: x \perp y\} = \{x \in H: P_Y(x) = 0\} = N(P_Y) = \text{Im}(P_{Y^\perp})$$

y

$$Y = \{x \in H: P(x) = x\} = \text{Im}(P_Y) = N(P_{Y^\perp})$$

A continuación resumimos las propiedades de los operadores proyecciones  $P_Y$  y  $P_{Y^\perp}$ .

**Propiedades:** Sea  $Y$  un subespacio cerrado del espacio de Hilbert  $H$ . Entonces:

a) Para todo  $x \in H$ ,

$$x = P_Y(x) + P_{Y^\perp}(x)$$

donde

$$\|x - P_Y(x)\| = \inf \{\|x - y\| : y \in Y\} = d(x, Y)$$

$$\|x - P_{Y^\perp}(x)\| = \inf \{\|x - z\| : z \in Y^\perp\} = d(x, Y^\perp).$$

Así pues,

$$I = P_Y + P_{Y^\perp}$$

donde  $I: X \rightarrow X$  es la función identidad de  $X$ .

b) Para todo  $x \in H$ ,

$$\|x\|^2 = \|P_Y(x)\|^2 + \|P_{Y^\perp}(x)\|^2$$

c) Para todo  $x \in H$ ,

$$\|P_Y(x)\| \leq \|x\|$$

y

$$\|P_Y(x)\| = \|x\| \text{ si y solo si } x \in Y$$

d)  $P_Y$  y  $P_{Y^\perp}$  son operadores lineales acotados y  $\|P_Y\| = 1$  si  $Y \neq \{0\}$

e)  $P_Y$  y  $P_{Y^\perp}$  son proyecciones ortogonales

f)  $P_Y$  es autoadjunto; es decir,  $\langle P_Y(x), y \rangle = \langle x, P_Y(y) \rangle$

para todo  $x, y \in H$ .

g) Para todo  $x \in H$ .  $\langle P_Y(x), x \rangle = \|P_Y(x)\|^2$

h)  $P_Y$  es no negativa; es decir,

$$\langle P_Y(x), x \rangle \geq 0$$

para todo  $x \in H$ .

En el siguiente teorema determinaremos la proyección ortogonal asociada a subespacios de dimensión finita de un espacio de Hilbert.

**Teorema 2.1:** Sea  $H$  un espacio de Hilbert,  $Y$  un subespacio de dimensión finita de  $H$  y  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  una base para  $Y$ . Entonces para cada  $x \in H$ ,

$$P_Y(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

donde los escalares  $\alpha_i$  son la única solución del sistema de ecuación

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle, \quad j=1, 2, \dots, n$$

En particular, si  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  una base ortonormal para  $Y$ , entonces

$$P_Y(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i$$

para todo  $x \in X$ .

**Demostración:**

Como  $Y$  es de dimensión finita, entonces  $Y$  es un subespacio cerrado de  $H$ . Luego

$$H = Y \oplus Y^\perp.$$

Sea  $x \in H$ . Como  $P_Y(x) \in Y$ , existen escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  tales que

$$P_Y(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

Ahora bien, como  $z = x - P_Y(x) \in Y^\perp$ , se tiene que

$$\langle x - P_Y(x), x_j \rangle = 0 \quad \text{para } j=1, 2, \dots, n$$

de donde

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, x_j \right\rangle = \langle x, x_j \rangle \quad j=1, 2, \dots, n$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Denotemos

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_2, x_1 \rangle & \dots & \langle x_n, x_1 \rangle \\ \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_1, x_n \rangle & \langle x_2, x_n \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}$$

$(G(x_1, x_2, \dots, x_n))$  es llamada **la matriz de Gram** de los vectores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Como

$$0 \leq \det(G(x_1, x_2, \dots, x_n)) \leq \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \dots \|x_n\|^2$$

manteniendo la igualdad en la izquierda (respectivamente a la derecha) si  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es un conjunto linealmente independiente (respectivamente ortogonal), se tiene que el sistema de ecuación

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t = \left( \langle x_1, x_1 \rangle \quad \langle x_2, x_1 \rangle \quad \dots \quad \langle x_n, x_1 \rangle \right)^t$$

tiene una única solución.

En particular, si  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es una base ortonormal de  $Y$ , entonces

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

de donde

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\langle x, x_1 \rangle, \langle x, x_2 \rangle, \dots, \langle x, x_n \rangle).$$

Así pues

$$\alpha_j = \langle x, x_j \rangle \quad j=1, 2, \dots, n$$

y

$$P_Y(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i.$$

El siguiente resultado es una extensión del teorema anterior.

**Teorema 2.1:** Sea  $H$  un espacio de Hilbert,  $Y$  un subespacio cerrado de  $H$  y  $M$  un subconjunto ortonormal total de  $Y$ . Entonces para todo  $x \in H$

$$P_Y(x) = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e = \sum_{e \in M_e} \langle x, e \rangle e$$

### 3. Propiedades del operador proyección en espacios de Hilbert

Los operadores proyecciones tienen propiedades relativamente simples y claras como acabamos de ver. A continuación estudiaremos otras propiedades referentes a operaciones con proyecciones. El siguiente teorema nos da condiciones para que el producto de dos proyecciones ortogonales sea una proyección ortogonal.

**Teorema 3.1:** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $P_1: H \rightarrow H$ ,  $P_2: H \rightarrow H$  operadores proyección. Entonces:

a)  $P = P_1 P_2$  es una proyección ortogonal en  $H$  si y solo si las proyecciones ortogonales  $P_1$  y  $P_2$  conmutan, esto es,  $P_1 P_2 = P_2 P_1$ . En este caso  $P$  proyecta  $H$  sobre  $Y = Y_1 \cap Y_2$ , donde  $Y_1 = \text{Im}(P_1)$ ,  $Y_2 = \text{Im}(P_2)$ ; es decir,

$$P_1 P_2 = P_{Y_1 \cap Y_2}$$

b) Dos subespacios cerrados  $Y$  y  $V$  de  $H$  son ortogonales si y solo si las correspondientes proyecciones satisfacen  $P_Y P_V = 0$ ,  $P_V P_Y = 0$

**Demostración.**

a) Supongamos que  $P_1$  y  $P_2$  conmutan. Probemos que  $P = P_1 P_2$  es autoadjunto e idempotente. En efecto, como  $P_1$  y  $P_2$  conmutan se tiene que

$$P^2 = (P_1 P_2)(P_1 P_2) = P_1^2 P_2^2 = P_1 P_2 = P$$

Por lo tanto  $P$  es idempotente; o sea que  $P$  es un operador proyección. Por otro lado, por el Teorema 1.5, para todo  $x, y \in H$

$$\begin{aligned} \langle P(x), y \rangle &= \langle (P_1 P_2)(x), y \rangle \\ &= \langle P_2(x), P_1(y) \rangle \\ &= \langle x, P_2 P_1(y) \rangle \\ &= \langle x, (P_1 P_2)(y) \rangle. \end{aligned}$$

Así pues  $P$  es un operador proyección autoadjunto. Luego por el Teorema 1.5  $P$  es una proyección ortogonal.

Recíprocamente, supongamos que  $P = P_1 P_2: H \rightarrow H$  es una proyección ortogonal, luego por el Teorema 1.5

$$P^* = P$$

donde  $P^*$  es la adjunta de  $P$ . Por lo tanto,

$$P_1 P_2 = P = P^* = (P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1$$

ya que  $P_1$  y  $P_2$  son autoadjuntos. Así pues,  $P_1$  y  $P_2$  conmutan.

Finalmente, como  $P = P_1 P_2 = P_2 P_1$ , para todo  $x \in H$  se tiene que

$$P(x) = P_1(P(x)) = P_2(P(x))$$

por lo tanto,

$$P(x) \in \text{Im}(P_1) \text{ y } P(x) \in \text{Im}(P_2)$$

o sea que

$$P(x) \in \text{Im}(P_1) \cap \text{Im}(P_2) = Y.$$

Si  $y \in Y$  entonces

$$y \in \text{Im}(P_1) \text{ , } y \in \text{Im}(P_2)$$

por lo tanto,

$$P_1(y) = y \text{ , } P_2(y) = y$$

y

$$P(y) = (P_1 P_2)(y) = P_1(P_2(y)) = P_1(y) = y.$$

Así pues  $P$  proyecta  $H$  sobre  $Y = Y_1 \cap Y_2$ ; es decir,

$$\text{Im}(P) = \text{Im}(P_1) \cap \text{Im}(P_2)$$

b) Supongamos primeramente que  $Y \perp V$ , entonces

$$Y \cap V = \{0\} \text{ , } V \subset Y^\perp \text{ , } Y \subset V^\perp.$$

Además

$$\text{Im}(P_Y) = Y \text{ , } N(P_Y) = Y^\perp \text{ , } \text{Im}(P_V) = V \text{ , } N(P_V) = V^\perp$$

por lo tanto,

$$V \subset N(P_Y) \text{ y } Y \subset N(P_V).$$

Luego, para todo  $x \in H$ ,

$$(P_Y P_V)(x) = P_Y(P_V(x)) = 0 \text{ , } (P_V P_Y)(x) = P_V(P_Y(x)) = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que  $P_Y P_V = 0$ . Sean  $y \in Y$ ,  $v \in V$ , entonces,

$$\langle y, v \rangle = \langle P_Y(y), P_V(v) \rangle = \langle (P_V P_Y)(y), v \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$$

por lo tanto,  $Y \perp V$ .

**Definición 3.1:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $P, Q$  dos proyecciones ortogonales sobre  $X$ .  $P$  y  $Q$  son **ortogonales** si y solo si  $PQ = 0$ ; o sea  $(PQ)(x) = 0$  para todo  $x \in X$ .

**Teorema 3.2:** Sean  $P_1$  y  $P_2$  proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces:

a) La suma  $P=P_1+P_2$  es una proyección ortogonal en  $H$  si y solo si  $Y_1=Im(P_1)$  y  $Y_2=Im(P_2)$  son ortogonales, es decir, si  $P_1$  y  $P_2$  son ortogonales.

b) Si  $P = P_1+P_2$  es una proyección ortogonal entonces  $P$  proyecta  $H$  sobre  $Y_1 \oplus Y_2$ , es decir,

$$P=P_{Y_1 \oplus Y_2}$$

El siguiente teorema generaliza el teorema anterior a  $n$  proyecciones ortogonales.

**Teorema 3.3:** Sean  $P_1, P_2, \dots, P_n$  proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces

a) La suma  $P_1+P_2+\dots+P_n$  es una proyección ortogonal en  $H$  si y solo si  $Y_1=Im(P_1)$ ,  $Y_2=Im(P_2)$ , ...,  $Y_n = Im(P_n)$  son ortogonales entre si; es decir,  $Y_i \perp Y_j$  para  $i \neq j$

b) Si  $P=P_1+P_2+\dots+P_n$  es una proyección ortogonal entonces,  $P$  proyecta  $H$  sobre  $Y=Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n$ , es decir,

$$P=P_{Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n}$$

**Demostración:**

a) Si  $Y_i=Im(P_i)$ ,  $i=1,2,\dots,n$  son ortogonales en pares entonces, por el Teorema 3.2  $P_j P_k = P_k P_j = 0$ . Así

$$P_j P_k + P_k P_j = 0 \text{ con } j \neq k.$$

Demostremos por inducción que  $P=P_1+P_2+\dots+P_n$  es una proyección ortogonal en  $H$ . En efecto, como vimos en el Teorema 2.11  $P=P_1+P_2$  es una proyección ortogonal en  $H$ . Supongamos que  $P_1+P_2+\dots+P_{n-1}$  es una proyección ortogonal en  $H$  (hipótesis de inducción). Luego

$$P^2 = (P_1+P_2+\dots+P_{n-1}+P_n)^2$$

$$\begin{aligned}
&= [(P_1+P_2+\dots+P_{n-1})+P_n]^2 \\
&= (P_1+P_2+\dots+P_{n-1})^2 + P_n^2 + (P_1+P_2+\dots+P_{n-1})P_n \\
&\quad + P_n(P_1+P_2+\dots+P_{n-1}) \\
&= P_1+P_2+\dots+P_{n-1} + P_n \text{ pues } P_jP_k+P_kP_j=0 \text{ con } j \neq k \\
&= P.
\end{aligned}$$

De esta forma  $P = P_1+P_2+\dots+P_n$  es idempotente. Por otro lado, como  $P_1, P_2, \dots, P_n$  son autoadjuntos también lo es su suma; es decir  $P$  es autoadjunto. Así por el Teorema 1.5  $P$  es una proyección ortogonal.

Recíprocamente, si  $P = P_1+P_2+\dots+P_n$  es una proyección ortogonal entonces

$$\|Px\|^2 = \langle P^2x, x \rangle = \langle Px, x \rangle \quad \text{y} \quad \|P_kx\|^2 = \langle P_kx, x \rangle.$$

De aquí, para todo  $x$  y para todo  $1 \leq j, k \leq n; j \neq k$

$$\begin{aligned}
\|P_jx\|^2 + \|P_kx\|^2 &\leq \|P_1x\|^2 + \|P_2x\|^2 + \dots + \|P_nx\|^2 \\
&= \langle P_1x, x \rangle + \langle P_2x, x \rangle + \dots + \langle P_nx, x \rangle \\
&= \langle P_1x + P_2x + \dots + P_nx, x \rangle \\
&= \langle Px, x \rangle \\
&= \|Px\|^2 \\
&\leq \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Para cada  $x = P_jy$  tenemos que

$$P_jx = P_j^2y = P_jy$$

y además

$$\begin{aligned}
\|P_jy\|^2 + \|P_kP_jy\|^2 &= \|P_j^2y\|^2 + \|P_kP_jy\|^2 \\
&= \|P_jx\|^2 + \|P_kx\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 = \|P_jy\|^2.
\end{aligned}$$

De esta forma

$$P_kP_jy = 0, \quad y \in H$$

esto es

$$P_kP_j = 0.$$

De igual forma se prueba que  $P_jP_k=0$ . Luego, por la parte (b) del Teorema 3.1 se tiene que

$$Y_j \perp Y_k, \quad j \neq k$$

b) Determinemos el subespacio cerrado  $Y \subset H$  en el cual  $P$  proyecta  $H$ . Como  $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$  para cada  $x \in H$  tenemos:

$$y = Px = P_1x + P_2x + \dots + P_nx.$$

Aquí  $P_jx \in Y_j$ ,  $j=1,2,\dots,n$ ; por lo tanto  $y \in Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n$ . Así que  $Y \subset Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n$ .

Ahora mostraremos que  $Y \supset Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n$ . En efecto, sea  $v \in Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n$ . Entonces  $v = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ , donde  $y_i \in Y_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ .

Aplicando  $P$  a  $v$  obtenemos:

$$\begin{aligned} Pv &= P_1(y_1 + y_2 + \dots + y_n) + P_2(y_1 + y_2 + \dots + y_n) + \dots + P_n(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P_i(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P_i(y_1) + \sum_{i=1}^n P_i(y_2) + \dots + \sum_{i=1}^n P_i(y_n) \\ &= P_1(y_1) + P_2(y_2) + \dots + P_n(y_n) \quad \text{pues } Y_i \perp Y_j \quad i \neq j \\ &= y_1 + y_2 + \dots + y_n \\ &= v \end{aligned}$$

por consiguiente  $v \in Y$  y así  $Y \supset Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n$ . De esta forma

$$Y = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n.$$

**Corolario 3.1:** Sean  $P_1, P_2, \dots, P_n$  proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert  $H$ . Si  $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$  es una proyección ortogonal, entonces

$$\|P_1(x)\|^2 + \|P_2(x)\|^2 + \dots + \|P_n(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

para todo  $x \in H$ .

**Observación:** El opuesto de un operador proyección no es un operador proyección. En efecto si  $P(x)$  es un operador proyección entonces el operador  $Q(x) = -P(x)$  no es una proyección ortogonal puesto que  $Q^2(x) = P^2(x) = P(x) \neq Q(x)$ . Así  $Q$  no es idempotente, si  $P \neq 0$ .

El siguiente teorema se refiere a la relación de orden parcial en el conjunto de todas las proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert, definida por:

$$P_1 \leq P_2 \text{ si y solo si } \|P_1(x)\|^2 = \langle P_1(x), x \rangle \leq \langle P_2(x), x \rangle = \|P_2(x)\|^2.$$

**Teorema 3.4:** Sean  $P_1$  y  $P_2$  proyecciones ortogonales definidas en un espacio de Hilbert  $H$ ,  $Y_1 = \text{Im}(P_1)$  y  $Y_2 = \text{Im}(P_2)$  los subespacios en los cuales  $H$  es proyectado por  $P_1$  y  $P_2$  y  $N(P_1)$  y  $N(P_2)$  los núcleos de estas proyecciones ortogonales, respectivamente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1)  $P_2 P_1 = P_1 P_2 = P_1$
- (2)  $Y_1 \subset Y_2$
- (3)  $N(P_2) \subset N(P_1)$
- (4)  $\|P_1 x\| \leq \|P_2 x\|$  para todo  $x \in H$
- (5)  $P_1 \leq P_2$

Como una aplicación del teorema anterior tenemos el siguiente resultado en el que se trata la diferencia de proyecciones.

**Teorema 3.5:** Sean  $P_1$  y  $P_2$  proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces:

- (a) La diferencia  $P = P_1 - P_2$  es una proyección ortogonal en  $H$  si y solo si  $Y_1 \subset Y_2$  donde  $Y_1 = \text{Im}(P_1)$  y  $Y_2 = \text{Im}(P_2)$
- (b) Si  $P = P_1 - P_2$  es una proyección ortogonal entonces,  $P$  proyecta  $H$  sobre  $Y$  donde  $Y$  es el complemento ortogonal de  $Y_1$  en  $Y_2$ ; es decir,

$$P = P_{Y_1^\perp \cap Y_2}$$

**Corolario 3.2:** Sean  $R$  y  $K$  subespacios cerrados del espacio de Hilbert  $H$  y sean  $P_R$  y  $P_K$  las correspondientes proyecciones ortogonales sobre  $H$  de estos subespacios. Entonces  $P = P_R - P_K$  es una proyección ortogonal sobre  $H$  si y solo si  $P_R \leq P_K$ .

De los Teoremas 2.13 y 2.14 podemos derivar un resultado básico acerca de la convergencia de una sucesión monótona creciente de proyecciones ortogonales.

**Teorema 3.6:** Sea  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión monótona creciente de proyecciones ortogonales definidas en un espacio de Hilbert  $H$ .

Entonces:

(a)  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge fuertemente a una proyección ortogonal; es decir,  $P_n x \rightarrow P x$  para cada  $x \in H$ , y el operador límite es una proyección ortogonal definida en  $H$ .

(b)  $P$  proyecta  $H$  sobre  $\text{Im}(P) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Im}(P_n)}$

(c)  $N(P) = \bigcap_{n=1}^{\infty} N(P_n)$

Si la sucesión de proyecciones ortogonales  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$  en el espacio de Hilbert no es monótona creciente todavía se puede probar que su límite es una proyección ortogonal, si se supone que la sucesión  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge al operador lineal  $P$  en norma, lo que precisamos en el siguiente teorema.

**Teorema 3.7:** Sea  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de proyecciones ortogonales en el espacio de Hilbert  $H$  y supongamos que la sucesión  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge al operador lineal acotado  $P: H \rightarrow H$  en norma; o sea,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - P\| = 0.$$

Entonces  $P$  es una proyección ortogonal en  $H$ .

**Demostración.**

Como para todo  $x \in X$

$$\|(P_n - P)(x)\| \leq \|P_n - P\| \|x\|$$

se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = P(x).$$

Ahora bien, como cada  $P_n$  es una proyección ortogonal, se tiene que

$$\langle P_n(x), y \rangle = \langle x, P_n(y) \rangle.$$

Aplicando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  obtenemos que

$$\langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle, \quad x, y \in H.$$

Por consiguiente  $P$  es autoadjunto.

Por otro lado, para todo  $x \in H$

$$P_n(x) = P_n^2(x)$$

luego, como  $P$  es un operador lineal acotado

$$\begin{aligned} P^2(x) &= P(P(x)) \\ &= P(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(P_n(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(P_n(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^2(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \\ &= P(x) \end{aligned}$$

Así pues  $P$  es un operador proyección autoadjunto. Luego, por el Teorema 2.5  $P$  es una proyección ortogonal.

Terminamos esta sección con un ejemplo, en el cual se ilustra el concepto de proyección ortogonal.

### **Ejemplo**

Considere el espacio

$$X = C([-1, 1], \mathbb{R}) = \{f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua}\}$$

con el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

Calcular la proyección ortogonal  $P_{\mathcal{P}_2}$  sobre el espacio

$\mathcal{P}_2 = \{ p \in X / p \text{ es un polinomio de grado a lo sumo igual a } 2 \}$   
evaluada en el vector  $q(x) = x^3 \in X$ .

**Solución:**

Aplicado el proceso de Gramm-Schmidt a la sucesión

$$\{q_n\}_{n=0}^{\infty} = \{x^n\}_{n=0}^{\infty}$$

se obtiene la sucesión ortonormal  $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ , dada por

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), \sqrt{\frac{75}{8}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right), \dots$$

Luego,

$$\langle x^3, e_0 \rangle = \left\langle x^3, \sqrt{\frac{1}{2}} \right\rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{2}} x^3 dx = 0$$

$$\langle x^3, e_1 \rangle = \left\langle x^3, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} x^4 dx = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

y

$$\langle x^3, e_2 \rangle = \left\langle x^3, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\rangle = \sqrt{\frac{45}{8}} \int_{-1}^1 \left(x^5 - \frac{1}{3}x^3\right) dx = 0.$$

Luego, resulta que

$$\mathcal{P}_2 = [1, x, x^2] = [q_0, q_1, q_2] = [e_0, e_1, e_2]$$

Como  $\{e_0, e_1, e_2\}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{P}_2$ , resulta que la proyección ortogonal  $P_{\mathcal{P}_2}$  evaluada en el vector  $q(x) = x^3$  es

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{P}_2}(x^3) &= \langle x^3, e_0 \rangle e_0 + \langle x^3, e_1 \rangle e_1 + \langle x^3, e_2 \rangle e_2 \\ &= \frac{2}{5} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{3}{2}} x \\ &= \frac{3}{5} x. \end{aligned}$$

## REFERENCIAS

- G. Bachman & L. Narici. 1996. Functional Analysis, Academic University Press, Cambridge.
- Berberian, S. K. 1998. Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer-Verlag.
- Deutsch, F. 2001. Best Approximation in Inner Product Spaces, Springer-Verlag, New York,.
- Kreyszig, E. 1978. Introductory to Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York.
- Rakocevic, V. 2000. On the Norm of Idempotent Operators in Hilbert Space, Amer. Math Monthly. 107, pag 748-750.
- Rudin, W. 1973. Functional Analysis, Mc Graw Hill, New York.
- Sunder, V. S. 1998. Functional Analysis, Birkhauser, Cambridge.
- Vidad, I. 1964. On Idempotent Operators in Hilbert Space, Publ. Inst. Math. 4, pag. 157-163.

*Recibido septiembre de 2010, aceptado octubre de 2011.*



## SOLUCIONES RACIONALES DE LA ECUACIÓN $X^Y = Y^X$

**Jorge E. Hernández, Edith C. de Hernández**

Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario De Veraguas, Departamento de Matemática.

### RESUMEN

En el presente trabajo estudiamos la ecuación diofantina  $m^n = n^m$  con  $m \neq n$ , probando que las únicas soluciones enteras de esta ecuación son (2, 4) y (4, 2). Posteriormente determinamos la forma de todas las soluciones racionales de la ecuación  $x^y = y^x$  con  $x \neq y$ , y probamos que estas soluciones son únicas. También presentamos los intervalos donde se encuentran las soluciones racionales positivos de la ecuación  $x^y = y^x$ .

### PALABRAS CLAVES

Ecuación diofantina, soluciones racionales.

### ABSTRACT

In this paper we study the diophantine equation  $m^n = n^m$  with  $m \neq n$ , proving that the only integer solutions of this equation are (2, 4) and (4, 2). Then we determine the shape of all the rational solutions of the equation  $x^y = y^x$  with  $x \neq y$ , and prove that these solutions are unique. We also present the intervals where are the positive rational solutions of the equation  $x^y = y^x$ .

### KEYWORDS

Diophantine equation, rational solutions

## INTRODUCCIÓN

Para los que sustentan que el orden de los términos no afecta el resultado, es tentado afirmar que

$$x^y = y^x$$

Sin embargo, con el simple ejemplo  $x = 2$ ,  $y = 3$  se prueba que

$$x^y \neq y^x$$

Pero para las personas de mentes inquietas e interesados en investigar los alcances de la matemática, el problema no termina ahí. La pregunta que nos haríamos ahora es la siguiente,

¿Para que valores positivos de  $x$ ,  $y$  se tiene que

$$x^y = y^x?$$

Obviamente, si  $x = y$ , entonces  $x^y = y^x$ . Así que existen infinitas soluciones a esta pregunta.

Pero que ocurre si agregamos la restricción  $x \neq y$ . Aún en este caso existe una solución entera positiva sencilla, a saber

$$x = 2, \quad y = 4$$

¿Existirán otras soluciones enteras positivas de la ecuación  $x^y = y^x$ . ¿Qué podemos decir a cerca de las soluciones racionales positivas de esta ecuación? ¿Dónde se encuentran estas soluciones racionales y que forma tienen; además, cómo se comportan? Estas son preguntas que cualquier profesional de la matemática debe hacerse e incorporarla, de alguna manera, en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Aparentemente, la primera referencia que tenemos a esta pregunta se encuentra en una carta de D. Bernoulli a C. Goldbach, fechada el 29 de junio de 1728 (Hurtwitz, 1961; Knoebel, 1981; Slobin, 1931). Bernoulli afirma sin demostrar que la ecuación  $x^y = y^x$ ,  $x \neq y$  tiene una solución entera positiva, pero infinitas soluciones racionales.

La primera persona en escribir en detalles acerca de la ecuación

$$x^y = y^x, \quad x \neq y$$

fue Euler (Cho & Park, 2001; Langer, 1996). Euler usó la sustitución  $y = xt$  y resolvió la ecuación sobre  $\mathbf{R}^+$  y  $\mathbf{Z}^+$ , y presentó las soluciones racionales

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

El objetivo de este trabajo es encontrar todas las soluciones enteras positivas de la ecuación

$$(1) \quad x^y = y^x, \quad x \neq y$$

además utilizar la sustitución indica por Euler (Cho & Park, 2001; Sved, 1990) para determinar la forma de las soluciones racionales de la ecuación (1) y probar la unicidad de estas soluciones racionales.

## 1. SOLUCIONES ENTERAS POSITIVAS

Supongamos que  $(x, y)$  es una solución entera positiva de la ecuación (1), entonces

$$x^y = y^x$$

Como la ecuación (1) es simétrica en  $x, y$  (o sea que si  $(x, y)$  es solución de la ecuación (1) entonces  $(y, x)$  es también solución de la ecuación (1)), sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $x < y$ .

Obviamente, de la ecuación (1) se tiene que si  $p$  es un número primo, entonces

$p$  divide a  $x$ , si y sólo si,  $p$  divide a  $y$

o sea que  $x, y$  tienen los mismos divisores primos. Así, podemos escribir

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \\ y &= p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} \end{aligned}$$

donde  $p_1, p_2, \dots, p_k$  son los distintos números primos que dividen a  $x$ ; y por lo tanto a  $y$ . Luego, como  $(x, y)$  es una solución de la ecuación (1) se tiene que

$$\left( p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \right)^y = \left( p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} \right)^x$$

o sea

$$p_1^{\alpha_1 y} p_2^{\alpha_2 y} \dots p_k^{\alpha_k y} = p_1^{\beta_1 x} p_2^{\beta_2 x} \dots p_k^{\beta_k x}$$

Por ser  $p_1, p_2, \dots, p_k$  números primos y por la unicidad de la representación de un número entero positivo como potencia de números primos, se tiene que

$$\alpha_1 y = \beta_1 x, \quad \alpha_2 y = \beta_2 x, \quad \dots, \quad \alpha_k y = \beta_k x$$

Luego como  $x < y$ ,

$$\alpha_1 < \beta_1, \quad \alpha_2 < \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_k < \beta_k$$

De (2) se tiene que  $x$  divide a  $y$ , esto es, existen un entero positivo  $k$  tal que  $y = kx$ . Así, la ecuación (1) se transforma en

$$(3) \quad x^{kx} = (kx)^x \quad k > 1$$

por lo tanto

$$x^k = kx$$

ó

$$(4) \quad x^{k-1} = k, \quad k > 1$$

Como  $k > 1$ , se tiene que  $x^{k-1} > 1$ . Por lo tanto  $x > 1$ , o sea,  $x \geq 2$ . Ahora bien si  $k > 2$  y  $x \geq 2$ , entonces

$$x^{k-1} \geq 2^{k-1} > k$$

Así pues

$$x^{k-1} > k \quad \text{para todo } k > 2$$

lo que contradice la ecuación (4).

Si  $k = 2$ , entonces de (4) se tiene que

$$2 = x^{2-1} = x$$

y por lo tanto,

$$y = kx = 2(2) = 4$$

De todo lo anterior se tiene que la única solución entera positiva de (1) es:

$$(x, y) = (2, 4) \quad \text{con } x < y.$$

Obviamente, por simetría (4, 2) también es una solución de la ecuación (1).

## 2. SOLUCIONES RACIONALES POSITIVAS

Supondremos ahora que  $x$ ,  $y$  son números reales positivos y denotaremos

$$t = \frac{y}{x}$$

por lo tanto,

$$y = tx, \quad t > 0, t \neq 1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1) tenemos que

$$x^{tx} = (tx)^x$$

o sea

$$(x^t)^x = (xt)^x$$

y

$$x^t = tx$$

de donde

$$x = t^{\frac{1}{t-1}}$$

y por lo tanto,

$$y = tx = t^{1+\frac{1}{t-1}} = t^{\frac{1}{t-1}}$$

Así las soluciones de la ecuación (1) tienen la forma

$$(5) \quad (x, y) = \left( t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{1}{t-1}} \right)$$

Por otro lado, de la ecuación (1) se tiene que

$$x^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$$

Consideremos la función  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$f(u) = u^{\frac{1}{u}}.$$

Como

$$f'(u) = u^{\frac{1}{u}} \left[ \frac{1 - \ln u}{u^2} \right]$$

Se tiene que

$$f'(u) = 0 \quad \text{si y sólo si, } u = e.$$

Además

$$f'(u) > 0 \quad \text{si } u \in (0, e)$$

y

$$f'(u) < 0 \quad \text{si } u \in (e, \infty)$$

por lo tanto,

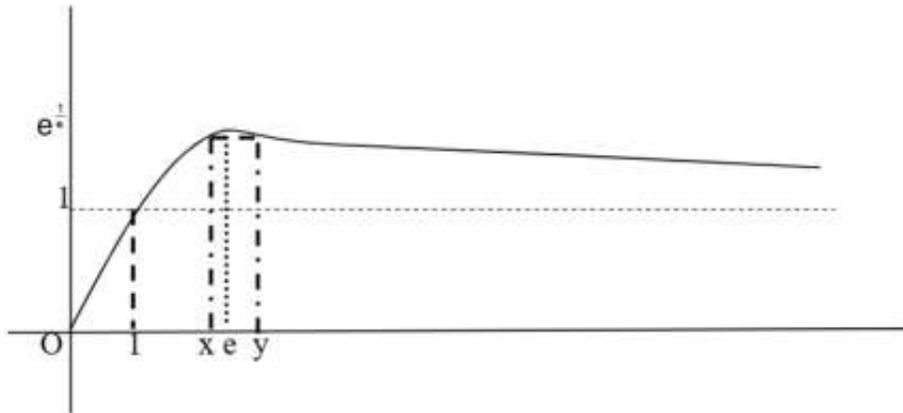
$f$  es estrictamente creciente en el intervalo  $(0, e)$

$f$  es estrictamente decreciente en el intervalo  $(e, \infty)$

$f$  alcanza su valor máximo en  $u = e$ .

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} u^{\frac{1}{u}} = 1.$$

Gráfica de  $f(u) = u^{\frac{1}{n}}$



Por los cálculos anteriores y de la gráfica se puede observar que para  $x$  en el intervalo  $(1, e)$  existe exactamente una  $y$  en el intervalo  $(e, \infty)$  tal que  $(x, y)$  es solución de la ecuación (1). Note además que  $f$  es creciente en el intervalo  $(0, 1)$  y

$$\begin{aligned} 0 < f(u) < 1 & \quad \text{si } 0 < u < 1 \\ 1 < f(u) < e^{\frac{1}{n}} & \quad \text{si } 1 < u < e \\ 1 < f(u) < e^{\frac{1}{n}} & \quad \text{si } e < u < \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto no existe solución  $(x, y)$  de la ecuación (1) tal que  $0 < x < 1$  ó  $0 < y < 1$ .

Si en (5) tomamos  $t = 1 + \frac{1}{n}$ , obtenemos el siguiente conjunto de soluciones racionales

$$(6) \quad \begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ y_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

que son, exactamente, las soluciones racionales de la ecuación (1) dadas por Euler.

Observemos que cuando  $n$  tiende a  $\infty$ ,  $t$  tiende a uno. Además, la sucesión  $\{x_n\}$  es creciente, la sucesión  $\{y_n\}$  es de decreciente y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Es oportuno preguntarnos ahora si existen soluciones racionales de la ecuación (1) diferentes de las soluciones  $(x_n, y_n)$ . Para responder a esta pregunta necesitaremos el siguiente resultado el cual se basa en el Teorema Fundamental de la Aritmética

**Propiedad:** Sean  $a, b, m, n$  números enteros tales que

$$(a, b) = (m, n) = 1, \quad b \neq 0, \quad n \neq 0$$

El número

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{a}{b}}$$

es racional si y sólo si  $m, n$  son potencias  $|b|$ -ésimas de enteros.

Supongamos que  $x, y$  son soluciones racionales positivas de (1), entonces  $x \neq y$ . Por simetría podemos suponer que  $x < y$ . Luego  $t = \frac{y}{x}$  es un número racional y  $t > 1$ . Sean  $p, q$  números enteros positivos tales que

$$t = \frac{p}{q}, \quad (p, q) = 1, \quad q < p.$$

Entonces existe un número entero positivo  $d$  tal que

$$t = \frac{p}{q} = \frac{q+d}{q}$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{t-1} = \frac{1}{\frac{q+d}{q}-1} = \frac{q}{d}$$

$$\frac{t}{t-1} = \frac{\frac{q+d}{q}}{\frac{q+d}{q}-1} = \frac{q+d}{d} = \frac{q}{d} + 1$$

Luego por la representación (5) tenemos que

$$(7) \quad x = t^{\frac{1}{t-1}} = \left(\frac{q+d}{q}\right)^{\frac{q}{d}}$$

$$y = t^{\frac{t}{t-1}} = \left(\frac{q+d}{q}\right)^{\frac{q}{d}+1}$$

y  $(x, y)$  es una solución racional de la ecuación (1).

Note que

$$(d, q) = (q, q+d) = (q, q+d) = (p, q) = 1$$

Por lo tanto

$$(d, q) = (q+d, q) = 1$$

y

$$\left(\frac{q+d}{q}\right)^{\frac{q}{d}} \text{ es racional}$$

Por la propiedad anterior se tiene que  $q+d$  y  $q$  son potencias  $d$ -ésimas de enteros positivos.

Si  $d=1$ , entonces tomando  $q=n$  obtenemos de (7) que

$$x = \left(\frac{q+d}{q}\right)^{\frac{q}{d}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$y = \left(\frac{q+d}{q}\right)^{\frac{d}{q+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

que son las soluciones racionales de (1) dadas en (6).

Supongamos que  $d > 1$ . Como  $q + d$  y  $q$  son potencias  $d$ -ésima de enteros positivos, existen enteros positivos  $a, b$  tales que  $a < b$  y

$$q = a^d, \quad q + d = b^d$$

Luego

$$b^d - a^d = d$$

Pero por otro lado

$$\begin{aligned} b^d - a^d &\geq (a+1)^d - a^d \\ &\geq a^d + da + 1 - a^d \\ &\geq 1 + da \\ &\geq 1 + d > d \end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Así  $d = 1$  y las únicas soluciones racionales positivas de la ecuación (1) están dadas por (6); o sea,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Finalmente, podemos observar que en las soluciones dadas en (6), se tiene que  $x_n < y_n$ , ya que  $n$  es un entero positivo. Si permitimos que  $n$  sea negativo; o sea,

$$n = -m, \quad \text{con } m \in \mathbf{N}$$

entonces

$$x_{-m} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m,$$

$$y_{-m} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m+1} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^{m-1} = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1}$$

Así  $(x_{-m}, y_{-m}) = (y_{m-1}, x_{m-1})$  es una solución racional positiva de (1), la cual ya estaba dada en (6).

Con esto hemos dado respuesta a todas las preguntas sobre la solución de la ecuación (1). Sin embargo podemos hacernos muchas otras preguntas en esta dirección, como muestra presentamos la siguiente interrogante,

**Pregunta:** ¿Qué podemos decir de las solución racional positiva de la ecuación  $x^y = y^{2x}$ ?

Note que esta ecuación no es simétrica. Sin embargo dejamos el siguiente resultado el cual debe ser probado.

**Teorema:** Si  $(x, y)$  es una solución racional positiva de la ecuación

$$x^y = y^{2x}$$

Entonces

a.  $x = \left(2 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad y = \left(2 + \frac{2}{n}\right)^{n+1}, \quad \text{para } n \in \mathbf{Z}, n \neq 0, n \neq -1$

ó

b.  $(x, y) = (1, 1), (2, 16) \text{ ó } \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{128}, \left(\frac{4}{5}\right)^{125}\right)$

## REFERENCIAS

Cho, Y. & K. Park. 2001. Inverse Functions of  $y = x^{\frac{1}{x}}$ , The American Mathematical Monthly 108, 963-67.

Hurwitz, S. 1961. On the rational solutions to  $m^n = n^m$  with  $m \neq n$ , The American Mathematical Monthly 74.

Knoebel, R. A. 1981. Exponentials reiterated, The American Mathematical Monthly 88235-52.

Langer, H. 1996. An elementary proof of the convergence of iterated exponentials, Elem. Math. 5175-77.

Slobin, H. L. 1931. The solutions of  $x^y = y^x$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $x \neq y$ , and their graphical representation, The American Mathematical Monthly 38) 444-47.

Sved, M. 1990. On the rational solutions to  $m^n = n^m$ , Math Magazine 63.

*Recibido septiembre de 2010, aceptado octubre de 2011.*