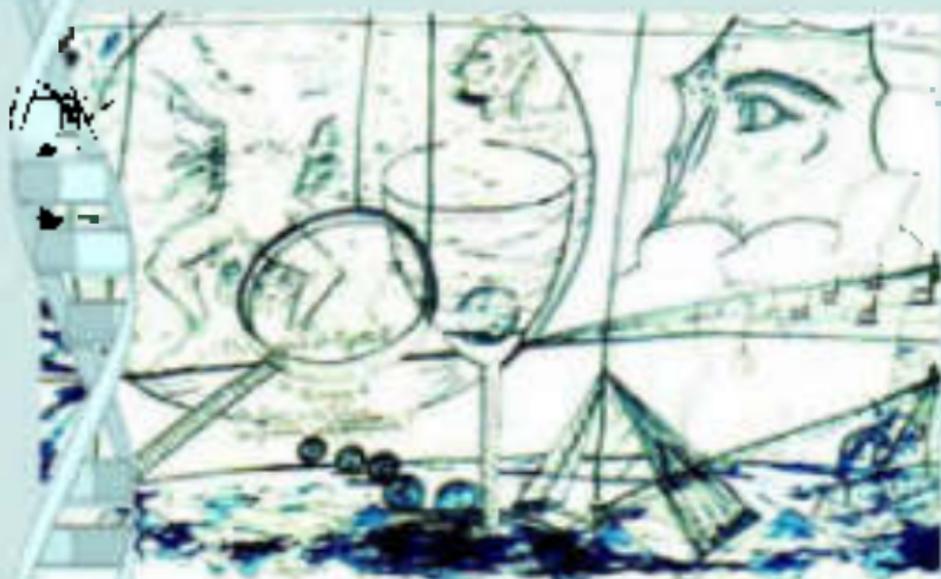


ISSN 1808-882



Biología-Química-Física
Matemática-Estadística

TECNOCIENCIA



Revista de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnológicas
Universidad de Panamá



SUCESIONES DE POTENCIAS ITERATIVAS GENERADAS POR a .

Jorge E. Hernández U. y Edith C. de Hernández

Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Escuela de Matemática.

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia la sucesión

$$x_n = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ a^{x_{n-1}} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

de potencias iterativas generadas por a , $a > 0$; así como el rango de solubilidad de la ecuación

$$x^{x^x} = b$$

Se establece que estos problemas están estrechamente ligados con el comportamiento de las funciones

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad \text{y} \quad h(x) = x^x$$

y con el antiguo problema de determinar las soluciones de la ecuación $x^y = y^x$. Finalmente, se estudia el comportamiento de la función

$$g(x) = x^{x^{x^x}}$$

se calcula su inversa y se construye su gráfica.

PALABRAS CLAVES

Sucesiones de potencias iterativas, pares de Bernoulli, pares de Euler.

ABSTRACT

In this paper we study the sequence

$$x_n = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ a^{x_{n-1}} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

of iterated exponentials by a , $a > 0$; as well as the range of solvability of the equations

$$x^{x^{x^{\dots}}} = b$$

We state that these two problems are closely related with the behavior of the functions

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad \text{and} \quad h(x) = x^x$$

and with the old problem of finding the solutions of the equation $x^y = y^x$. Finally, we study the behavior of the function

$$g(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$$

calculate its inverse and draw its graph.

KEYWORDS

Sequence of iterated exponentials, Bernoulli pair, Euler pair.

1. Los Orígenes

Dado un número real $a > 0$, se puede considerar la sucesión de potencias iteradas de a :

$$a, a^a, a^{a^a}, \dots$$

Si $a = 1$, entonces es evidente que esta sucesión es convergente; sin embargo, para $a = 2$ la sucesión es divergente.

Una pregunta natural es: ¿Para qué valores de a la sucesión de potencias iteradas de a es convergente? Este problema está relacionado directamente con la ecuación

$$x^{x^x} = b,$$

las funciones $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $h(x) = x^x$ y la ecuación $x^y = y^x$

la cual fue resuelta primeramente por Goldbach (Cho, 2001; Hurwitz, 1961, Sved, 1990). Realmente, la historia de este problema comienza con una carta de Daniel Bernoulli a Christian Goldbach fechada el 29 de junio de 1728 (Hurwitz, 1961). El final de esta carta dice:

Terminaré con un problema el cual encontré muy interesante y he resuelto. Aquí está: Encuentre dos números diferentes x e y tales que $x^y = y^x$. Hay sólo un caso cuando estos dos números son enteros, a saber $x = 2$, $y = 4$ (ya que $2^4 = 4^2$), pero uno puede encontrar una infinidad de números quebrados que satisfacen esta ecuación. Hay también otros tipos de cantidades de las cuales no diré nada.

Seis meses más tarde Goldbach le respondió a Bernoulli incluyendo en su respuesta una derivación de la solución x , y en forma paramétrica. Su argumento pudiera ser establecido como sigue:

Supongamos que $x^y = y^x$, $y > x > 0$; por lo tanto $y = sx$, para algún $s > 1$. Entonces

$$x^{sx} = (sx)^x$$

de donde

$$x^s = sx$$

por consiguiente

$$x^{s-1} = s$$

Así pues

$$\begin{cases} x = s^{\frac{1}{s-1}} \\ y = s^{\frac{s}{s-1}} \end{cases}, \quad \text{si } s > 1$$

Euler, sin el conocimiento de la comunicación entre Bernoulli y Goldbach (Cho, 2001; Slobin, 1931), usó la misma relación $y = sx$ y resolvió la ecuación $x^y = y^x$, $x \neq y$, sobre \mathbf{R}^+ y \mathbf{Z}^+ , presentando las soluciones racionales

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Las relaciones de Goldbach han sido redescubiertas por un número plural de autores entre los cuales se encuentran Euler, Eisenstein, Knoebel, Barrow, Länger, Sternheimer y Creutz (Cho, 2001; Sved, 1990, Hernández, 2004). Aparentemente, ninguno de estos matemáticos tenía conocimiento de la solución original de Goldbach.

Aunque en este momento el problema de Bernoulli pareciera no estar relacionado con la convergencia de las sucesiones de potencias iteradas, veremos que las soluciones del problema de Bernoulli nos darán la información para determinar la convergencia de estas sucesiones.

2. La función $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

La ecuación $x^y = y^x$ es equivalente a la ecuación $x^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{y}}$; por lo tanto, el estudio del comportamiento de la función $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ es primordial para determinar las soluciones de la ecuación $x^y = y^x$.

Consideremos la función

$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

como

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1 - \ln x}{x^2} \right], \quad x > 0$$

se tiene que

$$f'(x) = 0 \quad \text{sí y sólo sí, } x = e$$

Además

$$f'(x) > 0 \quad \text{sí } x \in (0, e)$$

y

$$f'(x) < 0 \quad \text{sí } x \in (e, \infty)$$

Por lo tanto,

- f es estrictamente creciente en el intervalo $(0, e)$.
- f es estrictamente decreciente en el intervalo (e, ∞) .
- f alcanza su valor máximo en $x = e$ y es

$$f(e) = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.444667861$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$
- $0 < f(x) \leq f(e) \approx e^{\frac{1}{e}}$, para todo $x \in (0, \infty)$

De los resultados anteriores, podemos extender continuamente f al intervalo $[0, \infty)$ de la siguiente manera

$$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ x^{\frac{1}{x}} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

y su gráfica es la siguiente



Note que

- f es continua en el intervalo $[0, \infty)$.
- f es inyectiva en el intervalo $[0, e]$ y en el intervalo $[e, \infty)$
- Si $0 < x < 1$ entonces $0 < f(x) < 1$.
- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(e) = e^{-\frac{1}{e}} \approx 1.444667861$
- Si $1 < x < e$ entonces $1 < f(x) < e^{-\frac{1}{e}}$
- Si $e < x < \infty$ entonces $1 < f(x) < e^{-\frac{1}{e}}$
- Para cada $x \in (1, e)$ existe un único $y \in (e, \infty)$ tal que $f(x) = f(y)$, y recíprocamente.

Así podemos afirmar que la ecuación $x^y = y^x$, $x \neq y$ (o equivalentemente $x^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{y}}$) no tiene solución para $0 < x < 1$ ó $0 < y < 1$; y para cada $x \in (1, e)$ existe un único $y \in (e, \infty)$ tal que $x^y = y^x$.

- Como 2 es el único entero positivo entre 1 y e , este análisis muestra que $x = 2$, $y = 4$ es la única solución entera positiva de la ecuación $x^y = y^x$.

3. Pares de Bernoulli

Recordemos que Goldbach presentó la siguiente solución paramétrica de la ecuación $x^y = y^x$:

$$x = s^{\frac{1}{s-1}} \quad y = s^{\frac{s}{s-1}} \quad s > 0, \quad s \neq 1$$

la cual permite construir soluciones (x, y) de esta ecuación, como por ejemplo:

s	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2	3	4
x	4	$\frac{27}{8}$	$\frac{64}{27}$	$\frac{9}{4}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$	2	$3^{\frac{1}{2}}$	$4^{\frac{1}{3}}$
y	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{256}{81}$	$\frac{27}{8}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$	4	$3^{\frac{3}{2}}$	$4^{\frac{4}{3}}$

Veamos que ocurre con las soluciones paramétricas cuando s se aproxima a 1. Para esto tomemos el límite cuando $s \rightarrow 1$ y hagamos la sustitución $s = t + 1$;

$$y = \lim_{s \rightarrow 1} s^{\frac{s}{s-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{t+1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (t+1)(t+1)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$x = \lim_{s \rightarrow 1} s^{\frac{1}{s-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{1}{t}} = e$$

Note que si $0 < s < 1$, entonces

$$e < x < \infty, \quad 0 < y < e$$

mientras que si $s > 1$, entonces

$$0 < x < e, \quad e < y < \infty.$$

La parametrización de Goldbach permite fácilmente caracterizar ciertas soluciones importantes. Por ejemplo, Euler fue el primero en determinar las soluciones racionales de la ecuación $x^y = y^x$, las cuales se obtienen tomando

$$s = \frac{m}{m+1} \quad \text{y} \quad s = \frac{n+1}{n}$$

Para $s = \frac{m}{m+1}$ se obtienen las soluciones:

$$x_m = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{1}{m+1}-1} = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{-(m+1)} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

$$y_m = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{\frac{m}{m+1}}{m+1}-1} = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{-m} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

Para $s = \frac{n+1}{n}$ se obtienen las soluciones:

$$x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$y_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{\frac{n+1}{n}}{n}-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Definición 1: Sean x , y dos números reales positivos y distintos, $x < y$. El conjunto $\{x, y\}$ es un **par de Bernoulli** si $x^y = y^x$.

- Si $\{x, y\}$ es un par de Bernoulli, entonces

$$1 < x < e < y$$

- $\{2, 4\}$ es el único par de Bernoulli formado por enteros
- Los únicos pares de Bernoulli racionales son de la forma

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\} \quad \text{para } n \in \mathbf{N}.$$

- Por la parametrización de Goldbach, los pares de Bernoulli son

$$\left\{ s^{\frac{1}{s-1}}, s^{\frac{s}{s-1}} \right\}, \quad \text{para } s > 1.$$

4. La Sucesión $a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$

Sea $a > 0$ un número fijo. Definamos recursivamente la sucesión

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$x_n = \begin{cases} a & \text{si } n=1 \\ a^{x_{n-1}} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Los términos de esta sucesión son

$$a, \quad a^a, \quad a^{a^a}, \quad \dots$$

El propósito de este trabajo es determinar los números a para los cuales esta sucesión converge, al igual que su límite. Para esto presentamos la siguiente notación

$$a^{[1]} = a, \quad a^{[2]} = a^a, \quad \dots, \quad a^{[n]} = a^{(a^{[n-1]})}$$

Así, la sucesión $a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$ se puede representar como

$$\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$$

Teorema 1: Sea $a > 0$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]} = b$, entonces

$$a^b = b, \quad a = b^{\frac{1}{b}} \quad \text{y} \quad a \leq e^{\frac{1}{e}}$$

Demostración:

Supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]} = b$$

entonces

$$\begin{aligned} a^b &= a^{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{(a^{[n]})} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n+1]}$$

$$= b$$

Así pues

$$a^b = b \quad y \quad a = b^{\frac{1}{b}}$$

Además, como $f(b) = a$, se tiene que

$$a \leq f(e) = e^e$$

Definamos ahora la función $g(x)$ por

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{[n]}$$

Si x es un elemento del dominio de g , entonces por el Teorema 1,

$$f(g(x)) = x.$$

y

$$\text{dom}(g) \subset \text{Rang}(f) = \left[0, e^{\frac{1}{e}} \right]$$

Por lo tanto, la sucesión

$$\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$$

diverge si $a > e^{\frac{1}{e}}$.

Teorema 2: Sea $1 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$ entonces la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Además, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]} = b$$

entonces $a = b^{\frac{1}{b}}$ y $1 < b \leq e$.

Demostración:

Si $0 < p < q$, entonces $a^p < a^q$. Por lo tanto,

$$1 < a, \quad a < a^a = a^{[2]}, \quad a^{[2]} = a^a < a^{a^{[2]}} = a^{[3]}, \dots$$

o sea

$$a^{[n-1]} < a^{[n]}, \quad \text{para todo } n \geq 1,$$

Luego $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente.

Por otro lado, como

se tiene que
$$1 < a \leq e^{\frac{1}{e}} < e$$

$$1 < a^{[2]} = a^a < a^e \leq \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e$$

igualmente,

$$1 < a^{[3]} = a^{a^{[2]}} < a^e < \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e$$

y en general,

$$1 < a^{[n]} < e, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Esto implica que $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente por el número e .

Por lo tanto, la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Así, por el teorema anterior, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]} = b$$

entonces $a = b^{\frac{1}{b}}$ y $1 < b \leq e$.

Observación: Si $b > e$ y $a = b^{\frac{1}{b}}$, entonces

$$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$$

Luego, por el teorema anterior, la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Pero $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]} \neq b$

ya que $b > e$. El límite de la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es el número c , $1 < c < e$, tal que $\frac{1}{c^c} = b^{\frac{1}{b}}$; o sea que $\{c, b\}$ es un par de Bernoulli.

Estudiemos ahora el comportamiento de la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$, cuando $0 < a < 1$. Note que en este caso, si $0 < p < q$, entonces $a^q < a^p$. Por lo tanto,

$$0 < a^{[1]} = a < a^a = a^{[2]} < 1$$

$$0 < a^{[1]} = a < a^{a^{[1]}} = a^{[3]} < a^a = a^{[2]} < 1$$

$$0 < a^{[1]} = a < a^{a^{[2]}} = a^{[3]} < a^{a^{[3]}} = a^{[4]} < a^a = a^{[2]} < 1$$

$$0 < a^{[1]} = a < a^{[3]} < a^{a^{[4]}} = a^{[5]} < a^{a^{[3]}} = a^{[4]} < a^{[2]} < 1$$

$$0 < a^{[1]} < a^{[3]} < a^{[5]} < a^{[6]} < a^{[4]} < a^{[2]} < 1$$

por un argumento inductivo se tiene que

$$0 < a^{[2n-1]} < a^{[2n+1]} < \dots < a^{[2n+2]} < a^{[2n]} < 1$$

para todo número natural n .

De lo anterior se tiene que la sucesión $\{a^{[2n-1]}\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada superiormente por los términos de la sucesión $\{a^{[2n]}\}_{n=1}^{\infty}$.

De igual manera, la sucesión $\{a^{[2n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y acotada inferiormente por los términos de la sucesión $\{a^{[2n-1]}\}_{n=1}^{\infty}$. Así, estas dos sucesiones son convergentes.

Denotemos

$$b_l = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[2n-1]}, \quad b_p = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[2n]}$$

Entonces

$$0 < b_i \leq b_p < 1$$

además, la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente si y sólo si $b_i = b_p$.

Por otro lado, como

$$a^{a^{[2n+1]}} = a^{[2n+2]} \quad \text{y} \quad a^{a^{[2n]}} = a^{[2n+1]}$$

Aplicando límite cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos

$$a^{b_i} = b_p \quad \text{y} \quad a^{b_p} = b_i$$

Por consiguiente

$$b_p^{\frac{1}{b_i}} = a = b_i^{\frac{1}{b_p}}$$

de donde

$$b_p^{b_p} = b_i^{b_i}$$

Esta identidad nos sugiere estudiar el comportamiento de la función

$$h: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x^x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Derivando la función h obtenemos

$$h'(x) = x^x [\ln x + 1]$$

luego

$$h'(x) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x = \frac{1}{e} = e^{-1} = 0.3678794412$$

Además

$$h'(x) < 0 \quad \text{para } x \in (0, e^{-1})$$

y

$$h'(x) > 0 \quad \text{para } x \in (e^{-1}, 1)$$

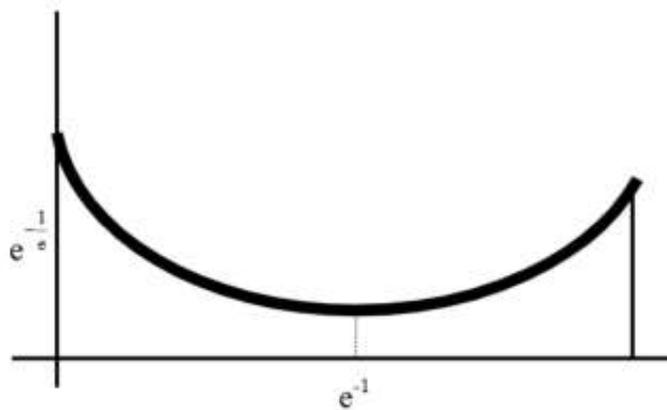
Por consiguiente

- $h(0) = h(1) = 1$
- f es estrictamente decreciente en el intervalo $(0, e^{-1})$.
- f es estrictamente creciente en el intervalo $(e^{-1}, 1)$.
- f alcanza su valor mínimo en $x = e^{-1}$ y es

$$h(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-\frac{1}{e}} \approx 0.692200627$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$.
- $e^{-\frac{1}{e}} \leq h(x) \leq 1$, para todo $x \in [0, 1]$

La gráfica de la función $h(x) = x^x$ es la siguiente



Note que la función h es dos a uno en el intervalo $[0, 1]$.

Del análisis de la gráfica de $h(x) = x^x$ y de los resultados anteriores se tiene que si $0 < a < 1$ y la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente, entonces $b_i < b_p$ y

$$0 < b_i < e^{-1} < b_p < 1$$

ya que $h(b_i) = h(b_p)$.

El problema de determinar la convergencia de la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$, con $0 < a < 1$, equivale a preguntarse que si $0 < c < d < 1$ y $c^{\frac{1}{d}} = d^{\frac{1}{c}} = a$, entonces puede darse el caso de que $c = b_i$ y $d = b_p$. En este sentido va dirigido el siguiente teorema.

Teorema 3: Sea $0 < a < 1$. Si $0 < c < d < 1$ y $a = c^{\frac{1}{d}} = d^{\frac{1}{c}}$ entonces

$$0 < a^{[2n-1]} < b_i \leq c < \frac{1}{e} < d \leq b_p < a^{[2n]} < 1$$

para cada natural n , y la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente.

Demostración:

Si $c \leq a < 1$, entonces como $\frac{1}{d} > 1$ se tiene que

$$a = c^{\frac{1}{d}} \leq a^{\frac{1}{d}} < a$$

lo que es una contradicción, por lo tanto $a < c$. De lo anterior se tiene que

$$d = a^c < a^a = a^{[2]}$$

luego de la gráfica de $h(x) = x^x$ se deduce que

$$a < c < \frac{1}{e} < d < a^{[2]}$$

Nuevamente, como $0 < a < 1$,

$$a^{[3]} < a^d = c < \frac{1}{e} < d = a^c < a^a = a^{[2]}$$

por lo tanto,

$$a^{[3]} < a^d = c < \frac{1}{e} < d = a^c < a^{[4]}$$

De igual manera,

$$a^{[5]} < a^d = c < \frac{1}{e} < d = a^c < a^{[4]}$$

Aplicando repetidamente este argumento obtenemos

$$0 < a^{[2n-1]} < c < \frac{1}{e} < d < a^{[2n]} < 1$$

por consiguiente,

$$0 < a^{[2n-1]} < b_l \leq c < \frac{1}{e} < d \leq b_p < a^{[2n]} < 1$$

y la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente.

Definición: El conjunto $\{c, d\}$ es un par de Euler si

$$0 < c < d < 1 \quad \text{y} \quad c^c = d^d$$

Ejemplo: $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$ es un par de Euler, ya que

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

En el siguiente teorema relacionamos los pares de Euler con los pares de Bernoulli

Teorema 4: El conjunto $\{c, d\}$ es un par de Euler si y sólo si

$\left\{\frac{1}{d}, \frac{1}{c}\right\}$ es un par de Bernoulli

Demostración:

Supongamos que $0 < c < d < 1$ y tomemos

$$x = \frac{1}{d}, \quad y = \frac{1}{c}$$

entonces $1 < x < y$, además

$$\begin{aligned} c^c = d^d &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{d}\right)^d = \left(\frac{1}{c}\right)^c \\ &\Leftrightarrow x^d = y^c \\ &\Leftrightarrow x^{\frac{1}{c}} = y^{\frac{1}{d}} \\ &\Leftrightarrow x^y = y^x. \end{aligned}$$

Observaciones:

1. Si $\{c, d\}$ es un par de Euler, entonces

$$0 < c < e < d < 1$$

2. Si $0 < a < 1$ y la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente, entonces $\{b_i, b_p\}$ es un par de Euler.

3. De los dos últimos teoremas se deduce que si $0 < a < 1$ y si existe un par de Euler $\{c, d\}$ tal que

$$c^{\frac{1}{d}} = d^{\frac{1}{c}} = a$$

entonces la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente.

Del teorema anterior y usando la representación paramétrica de Goldbach para las soluciones de la ecuación $x^y = y^x$, podemos concluir que los pares de Euler $\{c, d\}$ tienen la forma

$$c = c(s) = \frac{1}{\frac{s}{s-1}} = s^{\frac{s}{1-s}}, \quad d = d(s) = \frac{1}{\frac{1}{s-1}} = s^{\frac{1}{1-s}}, \quad s > 1$$

Si suponemos que $c^{\frac{1}{d}} = d^{\frac{1}{c}} = a$ entonces como

$$(c(s))^{c(s)} = (d(s))^{d(s)}$$

se tiene que

$$a = a(s) = (c(s))^{\frac{1}{d(s)}} = (d(s))^{\frac{1}{c(s)}}, \quad s > 1.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ diverge sobre el rango de la función $a(s)$, definida sobre el dominio $(1, \infty)$. Así que es importante determinar el rango de la función $a(s)$.

Consideremos las funciones

$$c: (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$c(s) = s^{\frac{x}{1-x}}$$

$$d: (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$d(s) = s^{\frac{1}{1-x}}$$

$$a: (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$a(s) = c(s)^{\frac{1}{d(s)}} = d(s)^{\frac{1}{c(s)}}$$

Aplicando la regla de L'Hopital (o analizando la gráfica de la función $h(x) = x^x$, ya que $h(c(s)) = h(d(s))$) obtenemos que:

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} c(s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} s^{\frac{x}{1-x}} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} d(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} s^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} c(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{\frac{x}{1-x}} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} d(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{\frac{1}{1-x}} = 1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} a(s) = \frac{1}{e^e} = e^{-e} \approx 0.65988$$

y

$$\lim_{s \rightarrow \infty} a(s) = 0$$

Además, como $c(s)$ y $d(s)$ son continuas en el intervalo $(1, \infty)$, se tiene que $a(s)$ es continua en el intervalo $(1, \infty)$.

Luego por el Teorema del Valor Intermedio, se tiene que

$$(0, e^{-e}) \subset \text{rang}(a(s)).$$

Nuestra tarea consiste entonces en determinar el rango de la función $a(s)$. Para esto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5: La función $a(s) = c(s)^{\frac{1}{d(s)}}$ es decreciente en el intervalo $(1, \infty)$.

Demostración:

Probemos que $a'(s) < 0$ para $s > 1$. En efecto,

$$a(s) = c(s)^{\frac{1}{d(s)}} = \left(s^{\frac{s}{1-s}} \right)^{\frac{1}{s^{1-s}}}$$

Como

$$d(s) = s^{\frac{1}{1-s}}$$

usando derivada logarítmica obtenemos que

$$\frac{d'(s)}{d(s)} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\ln s}{1-s} \right) = \frac{1}{s(s-1)^2} [s \ln s - (s-1)]$$

de donde

$$d'(s) = \frac{d(s)}{s(s-1)^2} [s \ln s - (s-1)]$$

Por otro lado, como

$$c(s) = s^{\frac{s}{1-s}} = \left(s^{\frac{1}{1-s}} \right)^s = (d(s))^s$$

se tiene que

$$a(s) = \left(s^{\frac{s}{1-s}} \right)^{\frac{1}{s^{1-s}}} = \left(s^{\frac{1}{1-s}} \right)^{\frac{s}{s^{1-s}}} = (d(s))^{\frac{s}{d(s)}}$$

Usando derivada logaritmica obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a'(s)}{a(s)} &= \frac{d}{d(s)} \left(\frac{s \ln(d(s))}{d(s)} \right) \\ &= \left[\frac{\ln(d(s))}{d(s)} + \frac{s d'(s)}{(d(s))^2} - \frac{s d'(s) \ln(d(s))}{(d(s))^2} \right] \end{aligned}$$

por consiguiente

$$a'(s) = \frac{a(s)}{(d(s))^2} [d(s) \ln(d(s)) + s d'(s) - s d'(s) \ln(d(s))]$$

reemplazando el valor de $d'(s)$ en esta ecuación obtenemos que

$$\begin{aligned} a'(s) &= \frac{a(s)}{(d(s))^2} \left[d(s) \ln(d(s)) + \frac{d(s)}{(s-1)^2} (s \ln s - (s-1)) - \frac{d(s) \ln(d(s))}{(s-1)^2} (s \ln s - (s-1)) \right] \\ &= \frac{a(s)}{(d(s))^2} \left[d(s) \ln(d(s)) + \frac{s d(s) \ln s}{(s-1)^2} - \frac{d(s)}{s-1} - \frac{s d(s) \ln(d(s)) \ln s}{(s-1)^2} + \frac{d(s) \ln(d(s))}{s-1} \right] \end{aligned}$$

pero como

$$\ln(d(s)) = \frac{\ln s}{1-s} = -\frac{\ln s}{s-1}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} a'(s) &= \frac{a(s)}{d(s)} \left[-\frac{\ln s}{s-1} + \frac{s \ln s}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{s \ln^2 s}{(s-1)^3} - \frac{\ln s}{(s-1)^2} \right] \\ &= \frac{a(s)}{(s-1)^3 d(s)} \left[-(s-1)^2 \ln s + s(s-1) \ln s - (s-1)^2 + s \ln^2 s - (s-1) \ln s \right] \\ &= \frac{a(s)}{(s-1)^3 d(s)} \left[-s^2 \ln s + 2s \ln s - \ln s + s^2 \ln s - s \ln s - (s-1)^2 + s \ln^2 s - s \ln s + \ln s \right] \\ &= \frac{a(s)}{(s-1)^3 d(s)} \left[s \ln^2 s - (s-1)^2 \right] \end{aligned}$$

O sea

$$a'(s) = \frac{a(s)}{(s-1)^3 d(s)} [s \ln^2 s - (s-1)^2]$$

Note que

$$\frac{a(s)}{(s-1)^3 d(s)} > 0, \quad \text{para } s > 1.$$

Definamos ahora la función

$$t: [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$t(s) = s \ln^2 s - (s-1)^2$$

Entonces

$$t'(s) = \ln^2 s + 2 \ln s - 2(s-1)$$

$$t''(s) = \frac{2 \ln s}{s} + \frac{2}{s} - 2$$

$$t'''(s) = -\frac{2 \ln s}{s^2}$$

Como $t'''(s) < 0$ para $t \in (1, \infty)$, se tiene que $t''(s)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[1, \infty)$. Pero como $t''(1) = 0$, $t''(s)$ es negativa en el intervalo $(1, \infty)$. Esto implica que la función $t'(s)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[1, \infty)$. Pero $t'(1) = 0$, lo que implica que $t'(s)$ es negativa en el intervalo $(1, \infty)$. Por consiguiente, la función $t(s)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[1, \infty)$. Finalmente, como $t(1) = 0$, se tiene que la función $t(s)$ es negativa en el intervalo $(1, \infty)$.

De todo lo anterior se deduce que la función $a'(s) < 0$ para todo $t \in (1, \infty)$. Por consiguiente, la función $a(s)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[1, \infty)$.

Observación: Como la función $a(s)$ es continua y estrictamente decreciente en el intervalo $(1, \infty)$, ella es inyectiva en este intervalo. Además como

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} a(s) = e^{-e}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} a(s) = 0$$

se tiene que

$$\text{rang}(a(s)) = (0, e^{-e})$$

y por lo tanto, la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente si $a \in (0, e^{-e})$.

Teorema 6: Sea $0 < a < 1$. La sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ converge si y sólo si $e^{-e} \leq a < 1$.

Demostración:

Supongamos que la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y que $0 < a < e^{-e}$. Entonces $a \in \text{rang}(a(s))$. Esto implica que existe un par de Euler $\{c(s), d(s)\}$ tal que

$$c(s)^{\frac{1}{d(s)}} = d(s)^{\frac{1}{c(s)}} = a(s) = a, \quad s > 1$$

Luego por el Teorema 3, la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente. Lo que es una contradicción. Así,

$$e^{-e} \leq a < 1.$$

Recíprocamente, supongamos que $e^{-e} \leq a < 1$ y supongamos que la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente. Entonces

$$0 < b_i = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[2n+1]} < \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[2n]} = b_p < 1$$

$$b_p^{\frac{1}{b_i}} = b_i^{\frac{1}{b_p}} = a$$

y $\{b_i, b_p\}$ es un par de Euler. Por lo tanto, existe un $s \in (1, \infty)$ tal que

$$b_i = c(s), \quad b_p = d(s) \quad \text{y} \quad a = a(s)$$

Esto implica que $a \in \text{rang}(a(s)) = (0, e^{-e})$, lo que es una contradicción. Así $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente.

Corolario 1: Si $e^{-e} \leq a < 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]} = b$ entonces

$$e^{-1} \leq b < 1.$$

Demostración:

Por Teorema 1 se tiene que

$$a^b = b \quad \text{y} \quad a = b^{\frac{1}{b}}$$

Luego, de la gráfica de la función $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ se tiene que $b < 1$. Además, como la gráfica de la función $f(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $[0, 1]$ y $f(e^{-1}) = e^{-e}$ se tiene que

$$e^{-1} \leq b < 1.$$

Corolario 2: Si $0 < a < e^{-e}$ y $a = b^{\frac{1}{b}}$ entonces existe un único par de Euler $\{b_i, b_p\}$ tal que

$$0 < b_i < b < e^{-1} < b_p < 1$$

y

$$a^{b_i} = b_i, \quad a^{b_p} = b_p$$

Demostración:

Como $0 < a < e^{-e}$, por el Teorema 6 la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente. Luego, por el Teorema 3

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[2n-1]} = b_i < e^{-1} < \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[2n]} = b_p < 1$$

además

$$b_p^{\frac{1}{b_i}} = b_i^{\frac{1}{b_p}} = a$$

y $\{b_i, b_p\}$ es un par de Euler. También, como $0 < a < e^{-e}$, de la gráfica de la función $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ se tiene que

$$0 < b < e^{-1} < b_p$$

Por otro lado, como $0 < a < 1$ y

$$a^b = b, \quad a^{b_p} = b_p, \quad b < b_p$$

se tiene que $b_i < b$. Por consiguiente,

$$0 < b_i < b < e^{-1} < b_p < 1.$$

Corolario 3: El dominio de la función

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{[n]}$$

es el intervalo $\left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}} \right]$ y

i. $f(g(a)) = a$ si $e^{-e} \leq a \leq e^{\frac{1}{e}}$

ii. $g(f(a)) = b$ si $e^{-1} \leq b \leq e$

Demostración:

Por los Teoremas 1, 2 y 6, la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ converge si y sólo si $e^{-e} \leq a \leq e^{\frac{1}{e}}$, por lo tanto

$$\text{dom}(g) = \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}} \right]$$

Además, por el Teorema 1,

$$f(g(a)) = a \quad \text{si} \quad e^{-e} \leq a \leq e^{\frac{1}{e}}$$

Por otro lado, supongamos que $e^{-1} \leq b \leq e$ y sea

$$a = f(b) = b^{\frac{1}{b}}$$

Entonces de la gráfica de la función $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ se tiene que

$$e^{-e} \leq a \leq e^{\frac{1}{e}}$$

Esto implica que $a \in \text{dom}(g)$. Sea

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]}$$

entonces por los Teoremas 1 y 2 y el Corolario 1 se tiene que

$$a = c^{\frac{1}{c}} \quad \text{y} \quad e^{-1} \leq c \leq e$$

Por lo tanto

$$f(b) = f(c) = a$$

Pero como $b \leq e$, de la gráfica de la función $f(x)$ se tiene que $b = c$.
Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]} = b.$$

De los resultados anteriores se tiene que las funciones

$$f: [e^{-1}, e] \rightarrow \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}} \right] \quad g: \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}} \right] \rightarrow [e^{-1}, e]$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{[n]}$$

son biyectivas, y además $g = f^{-1}$. Por lo cual se puede obtener la gráfica de la función g a partir de la gráfica de la función f .

CONCLUSIONES

Si $a > 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]} = b$, entonces $a = b^{\frac{1}{b}}$. Por lo tanto, la sucesión

$\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ diverge si $a > e^{\frac{1}{e}}$

La sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ converge si y sólo si $a \in \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}} \right]$.

La ecuación $x^{x^x} = b$ tiene solución si y sólo si $b \in [e^{-1}, e]$. En este caso

$$x = b^{\frac{1}{b}} \quad \text{y} \quad e^{-e} \leq x \leq e^{\frac{1}{e}}$$

Si $b > e$ y $a = b^{\frac{1}{b}}$ entonces $1 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$ la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, pero b no es su límite.

REFERENCIAS

Cho, Y. & K. Park. 2001. *Inverse Functions of $y = x^{\frac{1}{x}}$* , The American Mathematical Monthly 108, 963-967.

Hernández, J. E. & E. C. de Hernández. 2004. *Soluciones racionales de la ecuación $x^y = y^x$* ,

Hurwitz, S. 1961. *On the rational solutions of $mn = n^m$ with $m \neq n$* , The American Mathematical Monthly 74.

Knoebel, R. A. 1981. *Exponentials reiterated*, The American Mathematical Monthly 88, 235-252.

Langer, H. 1996. *An elementary proof of the convergence of iterated exponentials*, Elem. Math. 51. 75-77.

Slobin, H. L. 1931. *The solutions of $x^y = y^x$, $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$, and their graphical representation*, The American Mathematical Monthly 38, 444-447.

Sved, M. 1990. *On the rational solutions of $mn = n^m$* , Math magazine 63.

Recibido septiembre de 2010, aceptado octubre de 2011.



BIOLOGÍA DE *Trichogramma pretiosum* RILEY, 1879 (HIMENOPTERA: TRICHOGRAMMATIDAE), PARASITOIDE OÓFAGO DE *Anticarsia gemmatalis* HÜBNER, 1818 (LEPIDOPTERA, NOCTUIDAE), EN DIFERENTES TEMPERATURAS

¹Bruno Zachrisson y ²José Roberto Postali Parra

¹Instituto de Investigación Agropecuaria de Panamá, Centro de Investigación Agropecuaria Oriental "Dr. Alberto Perdomo".

e-mail:bruno.zachrissons@idiap.gob.pa

² Universidad de São Paulo, Escuela Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" - ESALQ, Piracicaba, São Paulo, Brasil

RESUMEN

La finalidad de este trabajo fue determinar el efecto de diferentes temperaturas (18 °C, 20 °C, 22 °C, 25 °C, 28 °C, 30 °C y 32 °C), sobre los parámetros biológicos y reproductivos de *Trichogramma pretiosum*, criado en huevos de *Anticarsia gemmatalis*. La duración del ciclo huevo-adulto, número de individuos por huevo y la longevidad de los adultos, fueron afectados por la temperatura. Sin embargo, la viabilidad "aparente" y la proporción sexual, se mantuvieron constantes dentro del rango de temperatura estudiado. Por esta razón se ha considerado la raza evaluada de *T. pretiosum* (Paraná Strain – L_{Pr}), como un agente promisorio de control biológico aplicado para *A. gemmatalis*, debido a la elevada capacidad de adaptación del parasitoide, a los diferentes agro-ecosistemas en donde se cultiva la soya (*Glycine max*).

PALABRAS CLAVES

Trichogramma pretiosum, Trichogrammatidae, Temperatura, *Anticarsia gemmatalis*, Soya, *Glycine max*.

ABSTRACT

The current study was carried out with the aim of determining the effect of the different temperatures (18 °C, 20 °C, 22 °C, 25 °C, 28 °C, 30 °C and 32°C), on different biological and reproductive parameters of *Trichogramma pretiosum* reared on *Anticarsia gemmatalis* eggs. Parameters like the egg-adult cycle, the number of individuals per egg and the longevity were affected by these temperatures. Nevertheless, viability and sexual proportion remained constant within the studied temperature range. Therefore, the *T. pretiosum* strain (Parana Strain – L_{Pr}) can be considered promising to be applied as biological control agent, with high adaptation to agricultural ecosystems, where soybean (*Glycine max*) is been cultivated.

KEYWORDS

Trichogramma pretiosum, Trichogrammatidae, Temperature, *Anticarsia gemmatalis*, Soybean, *Glycine max*.

INTRODUCCIÓN

El cultivo de soya (*Glycine max* L.), juega un papel preponderante en la alimentación humana y de animales, a nivel mundial. El efecto desfoliador causado por *Anticarsia gemmatalis*, todavía es considerado una de las principales limitantes en la producción de este cultivo, cuya distribución geográfica va desde el Sur de los Estados Unidos hasta Argentina (Avanci, 2004; King & Saunders, 1984; Turnipseed & Kogan, 1976). La presencia de *A. gemmatalis* puede causar 30% y 15%, de reducción de la superficie foliar durante la etapa vegetativa y reproductiva del cultivo, respectivamente, provocando pérdidas significativas en la producción (Gazzoni *et al.*, 1981; Panizzi *et al.*, 1977). A raíz de la rápida expansión de la soya en diferentes zonas geográficas destinadas a la producción de este rubro, con rangos de temperaturas variables, se sugirieron estrategias que integrarán diversos métodos de control considerados en los programas de manejo integrado de plagas (MIP), en donde el control biológico de plagas es una de las opciones más viables, inocuas para el hombre y al ambiente. Las especies de *Trichogramma*, son utilizadas ampliamente en programas de Control biológico aplicado, parasitando huevos de Lepidópteros (Avanci, 2004; Li, 1994; Parra *et al.*, 1987), producto de su amplia distribución geográfica, elevada eficiencia de control y facilidad de multiplicación masiva (Hassan, 1994; Parra & Zucchi, 2004). Por otro lado, las especies de *Trichogramma*, ya se han

colectado en más de 200 hospederos, pertenecientes a más de 70 familias y a 8 órdenes de insectos (Fonseca *et al.*, 2005; Hassan, 1994; Parra & Zucchi, 2004; Pereira *et al.*, 2004; Pratissoli & Parra, 2001). En el caso de *T. pretiosum*, existen registros de su utilización comercial, en Colombia y Estados Unidos (Li, 1994; Parra & Zucchi, 2004), entre otros países tropicales y sub tropicales. Índices elevados de parasitismo de *T. pretiosum*, fueron encontrados en huevos de *A. gemmatalis*, en el Valle de Cauca, en Colombia (Avanci, 2004; Foerster & Avanci, 1999; Garcia-Roa, 1991). Por otro lado, algunos investigadores evaluaron el potencial de control de *T. pretiosum* sobre *A. gemmatalis*, en condiciones de laboratorio, confirmando la adaptación del parasitoide al hospedero natural (Avanci, 2004; Frias *et al.*, 1994; Segade *et al.*, 1994). Sin embargo, no se ha estudiado su bioecología en huevos de *A. gemmatalis*, en condiciones controladas de temperatura, humedad relativa y fotofase.

Los parámetros biológicos y reproductivos de *T. pretiosum*, han sido estudiados en diferentes hospederos y temperaturas (Calvin *et al.*, 1984; Estevam *et al.*, 1987; Fonseca *et al.*, 2005; Grillé & Basso, 1994; Harrison *et al.*, 1985; Pereira *et al.*, 2004). La temperatura es conocida como el principal factor abiótico, que puede afectar los diversos aspectos biológicos del parasitoide, tales como la duración del ciclo, viabilidad, longevidad, fecundidad y proporción sexual (Bleicher & Parra, 1989; Calvin *et al.*, 1984; Fonseca *et al.*, 2005; Grillé & Basso, 1994; Harrison *et al.*, 1985; Pratissoli, 1995). Por lo que, en el presente trabajo, se determinó el efecto de diferentes temperaturas (18, 20, 22, 25, 28, 30 y 32°C) sobre los parámetros biológicos y reproductivos de *T. pretiosum*, criados en huevos de *A. gemmatalis*.

MATERIALES Y MÉTODOS

La raza (Paraná Strain - L_{Pr}) de *T. pretiosum* utilizada en el estudio, fue colectada en huevos de *A. gemmatalis*, en el cultivo de soya, específicamente en la localidad de Lapa, Paraná, Brasil. La misma fue mantenida y multiplicada, en condiciones de laboratorio, siguiendo la metodología establecida por Stein & Parra (1987) y Parra *et al.* (1989). Los huevos de *A. gemmatalis* se obtuvieron a partir de poblaciones de adultos, provenientes de la dieta artificial propuesta por Greene *et al.* (1976), la cual fue preparada de acuerdo a la metodología propuesta por Parra (1996).

La raza seleccionada de *T. pretiosum*, fue multiplicada de acuerdo a la metodología citada por Parra *et al.* (1989), utilizando huevos de *A. gemmatalis* como hospedero natural. Estos se retiraron del substrato de oviposición (papel "Bond"), de acuerdo a la metodología utilizada en este trabajo. Posteriormente, siguiendo la metodología citada por este autor, los huevos individualizados de *A. gemmatalis* se recogieron en un vaso químico cubierto en su interior con un tejido de "tul". Este procedimiento tuvo como finalidad, mantener la calidad de los huevos de la plaga, por lo que se mantuvo la humedad relativa próxima al punto de saturación, para evitar la resequeidad de estos.

Los huevos del hospedero natural, ya individualizados y debidamente conservados, fueron colocados en una lámina rectangular de plástico (5.0 cm x 1.5 cm), la cual fue previamente colocada en el congelador durante diez 10 minutos, lo que permitió la formación de una capa húmeda producto de la condensación del agua, posibilitando la fijación de los huevos sobre la superficie (Bleicher & Parra, 1989). Posteriormente, a este proceso, 50 huevos de *A. gemmatalis* fueron sometidos al parasitismo de *T. pretiosum* durante un período de cinco horas, en cámaras climatizadas con condiciones abióticas constantes (temperatura de 25°C, humedad relativa de (70±10)% y fotofase de 14 horas), transfiriéndolos posteriormente a cámaras climatizadas reguladas a las temperaturas seleccionadas (18 °C, 20 °C, 22 °C, 25 °C, 28 °C, 30 °C y 32°C).

Los parámetros biológicos estudiados, tales como la duración del ciclo de huevo-adulto, viabilidad "aparente", proporción de sexos, número de individuos por huevo y la longevidad de los adultos, fueron evaluados en las temperaturas estudiadas. La separación de sexos se basó en la caracterización propuesta por Bowen & Stern (1966), en donde la proporción de sexos se determinó por medio de la fórmula ($r.s. = \frac{\text{♀}}{\text{♀} + \text{♂}}$). La duración del ciclo (huevo-adulto), se registró por medio de observaciones diarias. El número de parasitoides por huevo, se determinó en función del número de adultos emergidos por huevo individualizados, en tubos de vidrio de 4.5 cm x 8.5 cm. La viabilidad "aparente", se calculó estableciendo la relación entre el número de huevos que presentaban orificio de salida, indicando que ocurrió el parasitismo y el número total de huevos parasitados; caracterizados por

la coloración oscura (Fig. 1), que deja en evidencia la necrosis de los tejidos embrionarios. La longevidad de los adultos, se determinó a través de la observación diaria, entre la emergencia y la muerte de los parasitoides.

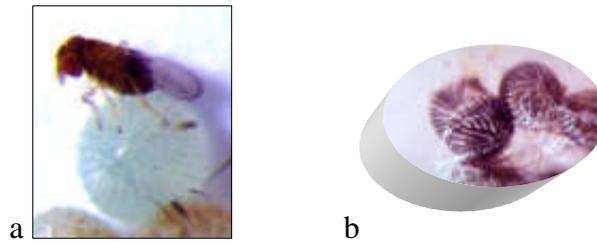


Fig. 1. *Trichogramma pretiosum* parasitando huevos de *Anticarsia gemmatalis* (a), Huevos de *Anticarsia gemmatalis* parasitados por *Trichogramma pretiosum* (b)

El diseño experimental utilizado fue el de tratamientos completos al azar, en donde los datos se sometieron a un análisis de varianza, y los promedios fueron comparados por medio de la prueba de Tukey, al nivel de 5% de probabilidad. Los datos de duración del ciclo huevo-adulto, número de parasitoides por huevo, proporción de sexos y la longevidad promedio de los adultos, fueron transformados por medio de la fórmula $\sqrt{(x + 0.5)}$. Por otro lado, los datos de viabilidad aparente fueron transformados por medio del modelo $\arcsin \sqrt{(x / 100)}$. Los datos de los parámetros biológicos y de viabilidad "aparente", que no presentaron distribución normal, fueron transformarlos por medio de los modelos $\sqrt{(x + 0.5)}$ y $\arcsin \sqrt{(x / 100)}$, respectivamente. Posteriormente, se compararon los datos biológicos y de viabilidad de *T. pretiosum*, desarrollados en huevos de *A. gemmatalis* en diferentes temperaturas (18 °C, 20 °C, 22 °C, 25 °C, 28 °C, 30 °C y 32 °C).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La duración media del desarrollo biológico (huevo-adulto) de *T. pretiosum*, sobre el hospedero natural, fue afectada directamente por la temperatura, ya que se observó el incremento de la velocidad de desarrollo, a medida que aumentaba la temperatura (Cuadro 1) (Calvin

et al., 1984; Harrison *et al.*, 1985; Bleicher & Parra, 1989; Fonseca *et al.*, 2005; Grillé & Basso, 1994; Pereira *et al.*, 2004; Pratissoli, 1995). Sin embargo, la duración del ciclo (huevo-adulto) de *T. pretiosum*, en las temperaturas de 30 °C y 32°C, fueron estadísticamente semejantes (Cuadro 1). Diversos autores confirman variaciones de este parámetro, en relación a la raza de *T. pretiosum* y al hospedero parasitado, entre otros factores (Butler Jr. & López, 1980; Calvin *et al.*, 1984; Fonseca *et al.*, 2005; Harrison *et al.*, 1985; Parra & Zucchi, 2004; Pereira *et al.*, 2004; Pratissoli, 1995).

La viabilidad de *T. pretiosum*, criada en huevos de *A. gemmatalis*, no fue afectada por el rango de temperatura estudiado, observándose tasas de emergencia superiores a 86 % (Cuadro 1). La evaluación de la viabilidad “aparente”, a partir del oscurecimiento del huevo del hospedero, determina el parasitismo de este. Sin embargo, la muerte del parasitoide en el interior del hospedero, previo a la evaluación, puede enmascarar este resultado, razón por la cual se aplica el concepto de viabilidad “aparente”. Bleicher & Parra (1989) y Estevam *et al.* (1987), registraron resultados semejantes estadísticamente, a los observados en el presente trabajo, en relación a la viabilidad “aparente” (Cuadro 1). Estos autores, afirman que independientemente de la raza del parasitoide y del huésped parasitado, la temperatura no afecta la viabilidad de *T. pretiosum*.

La proporción de sexos de la raza estudiada de *T. pretiosum*, no fue afectada por la temperatura, presentando mayor proporción de hembras (Cuadro 1). Calvin *et al.* (1984); Bleicher & Parra (1989); Parra *et al.* (1988); Tironi (1992), confirmaron que la condición térmica no afecta la proporción de sexos de *T. galloi* Zucchi, *T. distinctum* Zucchi, *T. atopovirilia* Oatman & Platner y *T. pretiosum*, en diferentes hospederos. Sin embargo, la calidad del hospedero también puede influir en la proporción de sexos (Green *et al.*, 1982), como consecuencia de la competencia de individuos de ambos sexos por los recursos nutricionales limitados, encontrados en el interior del huevo (Parra & Zucchi, 2004; Vinson, 1997).

El número de parasitoides emergidos por huevo de *A. gemmatalis*, considerado en el rango de temperatura entre 18 °C y 30 °C, presentaron resultados estadísticamente semejantes (Cuadro 1). No

obstante, la reducción significativa del número de huevos de *T. pretiosum* ovipositados por huevo de *A. gemmatalis* a 32 °C, se puede atribuir a la influencia de la temperatura en el comportamiento del parasitoide, en cuanto a la evaluación del tamaño del hospedero (Schmidt & Smith, 1985; 1987). Además, Schmidt & Smith (1987) y Schmidt & Pak (1991), En este sentido, a mayores temperaturas el período de reconocimiento del hospedero decrece, reduciendo el número de parasitoides por huevo.

La longevidad media de las hembras de *T. pretiosum*, en huevos de *A. gemmatalis*, es inversamente proporcional al aumento de la temperatura (Cuadro 1) (Bueno *et al.*, 2010; Pratisoli *et al.*, 2004). Las temperaturas elevadas, superiores a 30 °C, promueve la actividad metabólica de las hembras de *T. pretiosum*, reduciendo su longevidad y por ende la tasa de parasitismo (Parra *et al.*, 1990; Bleicher & Parra, 1989; Gerling, 1972; Pratisoli 1995), aspecto que explica los resultados registrados. Algunos autores destacan la influencia de la temperatura, raza del parasitoide y el hospedero en donde fue criado, sobre este parámetro (Avanci, 2004; Bleicher & Parra, 1989; Calvin *et al.*, 1984; Pratisoli, 1995; Winckowska & Wiackowski, 1970).

Cuadro 1. Duración media del ciclo de vida (huevo-adulto), viabilidad "aparente", proporción de sexos, número de individuos por huevo y longevidad de las hembras de *Trichogramma pretiosum* (Paraná Strain – L_{Pr}), criada en huevos de *Anticarsia gemmatalis*, en diferentes temperaturas. Humedad Relativa de 70±10% e Fotofase de 14 horas.

Temperatura (°C)	Duración del ciclo (días) ¹	Intervalo de variación	Viabilidad "Aparente" (%)	Proporción de Sexos	Número de Individuos por huevo	Longevidad de las hembras (días)
18	23.76±0.22 f	21 --- 26	86±4.26 a	0.69 a	3.24±0.22 ab	9.90±1.22 a
20	15.52±0.08 e	15 --- 17	96±2.67 a	0.62 a	3.92±0.19 ab	8.27±1.66 ab
22	14.41±0.07 d	14 --- 15	96±2.67 a	0.72 a	3.79±0.19 a	8.74±0.62 ab
25	10.29±0.13 c	9 --- 12	90±4.47 a	0.67 a	3.71±0.17 a	8.36±0.72 ab
28	8.41±0.16 b	7 --- 10	88±4.42 a	0.71 a	3.74±0.24 a	6.18±0.58 ab
30	6.82±0.08 a	6 --- 8	90±5.37 a	0.62 a	3.41±0.18 ab	6.13±0.71 ab
32	7.12±0.09 a	6 --- 10	96±2.67 a	0.62 a	2.62±0.17 b	5.26±0.49 b

¹ Medias seguidas de la misma letra no difieren estadísticamente entre sí, según la prueba de Tukey al nivel de 5% de probabilidad.

La plasticidad que presenta la raza estudiada de *T. pretiosum*, cuya adaptación al rango de temperatura comprendido entre 20 °C y 30 °C, confirma su potencial como agente de control biológico de huevos de *A. gemmatalis*. Una vez que la raza de *T. pretiosum* evaluada, fue colectada en huevos de *A. gemmatalis*, en el municipio de Lapa, Paraná, Brasil, zona que presenta una variación de temperatura entre 28 °C y 32 °C, lo cual es característico en las diferentes zonas productoras de soya, en los agro ecosistemas tropicales y sub tropicales.

CONCLUSIONES

De acuerdo a los parámetros, duración del ciclo huevo a adulto, viabilidad "aparente", proporción de sexos, número de individuos por huevo y la longevidad de los adultos, el rango de temperatura más favorable para el desarrollo de la raza de *T. pretiosum* (Paraná Strain - L_{Pr}), esta entre 20 °C y 30 °C.

La raza de *T. pretiosum* (Paraná Strain - L_{Pr}) evaluada, es un agente potencial de control biológico para huevos de *A. gemmatalis*, adaptadas a zonas tropicales y sub tropicales destinadas al cultivo de soya.

REFERENCIAS

Avanci, M.R.F. 2004. Especies de *Trichogramma* Westwood (Hymenoptera: Trichogrammatidae) que ocorrem em ovos de *Anticarsia gemmatalis* Hübner (Lepidóptera: Noctuidae), no sudeste do Paraná. Curitiba, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, 116 p.

Bleicher, E. & J.R.P. Parra. 1989. Espécies de *Trichogramma* parasitóides de *Alabama argillacea*. I. Biología de tres populações. Pesquisa Agropecuária Brasileira 25: 215 - 219.

Bowen, W.R. & V.M. Stern. 1996. Effect of the temperature on the production of males and sexual mosaics in a uniparenteral race of *Trichogramma semifumatum* (Hymenoptera: Trichogrammatidae). Annals of the Entomological Society of America 59: 823 - 834.

Bueno, R.C.O.F., A.F. Bueno, J.R.P. Parra, S.S. Vieira & L.J. Oliveira. 2010. Biological characteristics and parasitism capacity of *Trichogramma pretiosum* Riley (Hymenoptera, Trichogrammatidae) on eggs of *Spodoptera frugiperda* (J.E. Smith) (Lepidoptera, Noctuidae). *Revista Brasileira de Entomología* 54: 322-327.

Butler, Jr., G.D. & J.D. López. 1980. *Trichogramma pretiosum*: Development in two hosts in relation to constant and fluctuating temperatures. *Annals of the Entomological Society of America* 73: 671-673.

Calvin, D.D., M.C. Knapp, S.M. Welch, F.L. Poston & R.J. Elzinga. 1984. Impact of environmental factors on *Trichogramma pretiosum* reared on southwestern corn borer eggs. *Environmental Entomology* 13: 774 - 780.

Estevam, R.C., E.M. Diaz, J.R.P. Parra, P.R. Forti & R.A. Zucchi. 1987. Exigências térmicas de *Trichogramma pretiosum* Riley, 1879 em *Heliothis virescens* (Fabr., 1871) e *Anagasta kuehniella* (Zeller, 1879). *In: Congresso Brasileiro de Entomologia*, 11., Campinas, 1987. Resumos. Campinas, SEB, p. 255.

Foerster, L.A. & M.R.F. Avanci. 1999. Egg parasitoid of *Anticarsia gemmatalis* Hübner (Lepidoptera: Noctuidae) in soybean. *Anais da Sociedade Entomológica do Brasil* 28: 545-548.

Fonseca, F.L., A. Kovaleski, J. Foresti & R. Ringerberg. 2005. Desenvolvimento e exigências térmicas de *Trichogramma pretiosum* Riley (Hymenoptera: Trichogrammatidae) em ovos de *Bonagota cranaodes* (Meyrick) (Lepidoptera: Tortricidae). *Neotropical Entomology* 34: 945-949.

Frías, E.A., S.M. Ovruski & S.B. Popich. 1994. Parasitóides de huevos de lepidópteros noctuides encontrados en cultivos de soja y su evaluación como agentes de control. *Revista de Investigación CIRPON* 9: 29-35.

Garcia-Roa, F. 1991. Effectiveness of *Trichogramma* spp. in biological control programs in the Cauca Valley, Colombia. *In: International*

Symposium on *Trichogramma* and other egg parasitoids, 3., San Antonio, 1990. Paris, INRA, p. 197 - 200 (Les Colloques de INRA, 56).

Gazzoni, D.L., E.B. Oliveira, I.C. Corso, B.S.C. Ferreira, G.L. Villas Bôas, F. Moscardi & A.R. Panizzi. 1981. Manejo de pragas da soja. Londrina: EMBRAPA/CNPSO, 44 p.

Gerling, D. 1972. The development biology of *Telenomus remus* Nixon (Hymenoptera: Scelionidae). Bulletin of Entomological Research 61: 385-388.

Greene, R.F., N.C. Leppla & W.A. Dickerson. 1976. Velvetbean caterpillar a rearing procedure and artificial medium. Journal of Economic Entomology 69: 487- 488.

Green, R.F. & G. Gordh, B.A. Hawkins. 1982. Precise sex ratios in highly inbred parasitic wasps. American Naturalist 120: 633 - 665.

Grillé, G. & C. Basso. 1994. Biology, thermal requirements and performance of *Trichogramma pretiosum* Riley and *T. galloi* Zucchi under laboratory conditions. In: International Symposium on *Trichogramma* and other egg parasitoids, 4., El Cairo, 1994. Paris, INRA. p.79-82. (Les colloques INRA, 73)

Harrison, W.W., E.G. King & J.D. Ouzts. 1985. Development of *Trichogramma exiguum* and *T. pretiosum* at five temperature regimes. Environmental Entomology 14: 118 -121.

Hassan, S.A. 1994. Strategies to select *Trichogramma* species for use in biological control, 55-68 p. In: Wajnberg, E.; Hassan, S. A. (eds.). Biological control with egg parasitoids. Wallingford, CAB International.

King, A.B.S. & J.L. Saunders. 1984. Las plagas invertebradas de cultivos anuales en America Central. Londres, Overseas Development Administration Press. 182 p.

Li, L.Y. 1994. Worldwide use of *Trichogramma* for biological control on different crops: A survey. 37-54 p. In: Wajnberg, E.; Hassan, S.A.

(eds.). Biological control with egg parasitoids. Wallingford, CAB International,

Panizzi, A.R., B.S. Correa, D.L. Gazzoni, E.B. Oliveira, G. Newman & S.G. Turnipseed. 1977. Insetos da soja no Brasil. Londrina, EMBRAPA/CNPS. 20 p.

Parra, J.R.P. 1996. Técnicas de criação de insetos para programas de controle biológico. Piracicaba, FEALQ, 137 p.

Parra, J.R.P., R.A. Zucchi & S. Silveira Neto. 1987. Biological control of pests through egg parasitoids of the genera *Trichogramma* and/or *Trichogrammatoidea*. Memórias do Instituto Oswaldo Cruz 82: 153-160.

Parra, J.R.P., R.A. Zucchi & S. Silveira Neto. 1988. Perspectives of biological control using *Trichogramma* and/or *Trichogrammatoidea* in the state of São Paulo (Brazil). In: International Symposium on *Trichogramma* and other egg parasitoids, 2., Guangzhou, 1986. Paris, INRA. p.79-82. (Les colloques INRA, 43).

Parra, J.R.P., J.R.S. Lopes, H.J.P.O. Serra & Salles Junior. 1989. Metodologia de criação de *Anagasta kuehniella* (Zeller, 1879) para produção massal de *Trichogramma* spp. Anais da Sociedade Entomológica do Brasil 18: 403-415.

Parra, J.R.P., R.A. Zucchi & S. Silveira Neto. 1990. Biology and thermal requirements of *Trichogramma galloi* Zucchi and *T. distinctum* on two alternative hosts. In: International Symposium on *Trichogramma* and other egg parasitoids, 2., San Antonio, 1990. Paris, INRA. 1990. p.81-84. (Les colloques INRA, 56).

Parra, J.R.P. & R.A. Zucchi. 2004. *Trichogramma* in Brasil: Feasibility of use after twenty years of research. Neotropical Entomology 33: 271-281.

Pereira, F., R. Barros, D. Pratissoli & J.R.P. Parra. 2004. Biologia e exigências térmicas de *Trichogramma pretiosum* Riley e *T. exiguum* Pinto & Platner (Hymenoptera: Trichogrammatidae) criados em ovos

de *Plutella xylostella* (L.) (Lepidoptera: Plutellidae). Neotropical Entomology 33: 231-236.

Pratissoli, D. 1995. Bioecología de *Trichogramma pretiosum* Riley, 1879, nas traças do tomateiro, *Scrobipalpuloides absoluta* (Meyrick, 1917) e *Phthorimaea operculella* (Zeller, 1873). Piracicaba, Tese de Doutorado. Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, 130 p.

Pratissoli, D. & J.R.P. Parra. 2001. Seleção de linhagens de *Trichogramma pretiosum* Riley (Hymenoptera: Trichogrammatidae) para o controle das traças do tomateiro *Tuta absoluta* (Meyrick) e *Phthorimaea operculella* (Zeller) (Lepidoptera: Gelechiidae). Neotropical Entomology 30: 277-282.

Pratissoli, D., F. Pereira, R. Barros, J.R.P. Parra & C.L.T. Pereira. 2004. Parasitismo de *Trichogramma pretiosum* em ovos da traça-das-crucíferas sob diferentes temperaturas. Horticultura Brasileira 22: 754-757.

Schmidt, J.M. & G.A. Pak. 1991. The effect of temperature on progeny allocation and short interval timing in a parasitoid wasp. Physiological Entomology 16: 345-353.

Schmidt, J.M. & J.J.B. Smith. 1985. Host volume measurement by the parasitoid wasp *Trichogramma minutum*: The role of curvature and surface area. Entomologia Experimentalis et Applicata 39: 213-221.

Schmidt, J.M. & J.J.B. Smith. 1987. The measurement of exposed host volume by the parasitoid wasp *Trichogramma minutum* and the effect of wasp size. Canadian Journal of Entomology 65: 2837-2845.

Segade, G., Y. Botto & E. Imysa. 1994. Tabla de vida de *Trichogramma pretiosum* (Hymenoptera: Trichogrammatidae) sobre *Anticarsia gemmatalis* (Lepidoptera: Noctuidae). In: Simpósio de Controle Biológico, 4., Gramado, 1994. Resumos. Pelotas, EMBRAPA. p. 207.

Stein, C.P. & J.R.P. Parra. 1987. Uso da radiação para inviabilizar ovos de *Anagasta kuehniella* (Zeller, 1879) visando estudos com *Trichogramma* spp. Anais da Sociedade Entomológica do Brasil 16: 229-231.

Tironi, P. 1992. Aspectos bioecológicos de *Trichogramma pretiosum* Riley, 1879 e *Trichogramma atopovirilia* Oatman & Platner, 1983 (Hym.: Tichogrammatidae), como agentes de controle biológico de *Helicoverpa zea* (Boddie, 1850) (Lep.: Noctuidae). Lavras, Dissertação de Mestrado, Escola Superior de Agricultura de Lavras, 74 p.

Turnipseed, S.G. & M. Kogan. 1976. Soybean entomology. Annual Review of Entomology 21: 247-82.

Vinson, S.B. 1997. The behavior and physiology of *Trichogramma* in host selection and utilization, 19-25 p. In: J.R.P. Parra & R.A. Zucchi (eds.). Curso de Controle Biológico com *Trichogramma*. Piracicaba, FEALQ, 324p.

Wiackowska, Y. & S. Wiackowski. La biología y aprovechamiento de las especies de *Trichogramma* en la protección de plantas. Revista Cubana de Ciencias Agrícolas 4: 1-42.

Recibido junio de 2011, aceptado noviembre de 2011.



METRIZACIONES Y ALGUNAS PROPIEDADES DE LA TOPOLOGÍA DE FÜRSTENBERG

Jaime J. Gutiérrez G. y Eric A. Acevedo S.

Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología,
Departamento de Matemática.

e-mail: jgutierrez @ matematicas.net, eric.acevedo@ utp.ac.pa

RESUMEN

Fürstenberg, (Acevedo, 2002) definió una particular topología τ sobre el anillo de los números enteros Z que le permitió dar una hermosa prueba de la infinitud de los números primos. Fürstenberg también señaló que el espacio topológico (Z, τ) es metrizable. Nuestro objetivo es examinar las metrizaciones conocidas del espacio de Fürstenberg y establecer algunos resultados al respecto.

PALABRAS CLAVES

Topología de Fürstenberg, Métrica, Teorema de Metrización de Urysohn.

ABSTRACT

Fürstenberg (Acevedo, 2002) defined a particular topology τ on the ring of integer numbers to give a beautiful proof of the infinitude of the prime numbers. Fürstenberg too indicated that the topological space (Z, τ) is metrizable. The aim of this work is to examine the known metrizations of the Fürstenberg's space and establish some results about it.

KEYWORDS

Fürstenberg's topology, metric, Urysohn's metrization theorem.

INTRODUCCIÓN

La primera y más conocida prueba de la infinitud de los números primos es debida a Euclides. Algunos autores identifican este resultado con la denominación: El Teorema de Euclides. Se han presentado algunas demostraciones alternativas que refuerzan la creencia sobre la armonía y la unidad de la Matemática. Una discusión detallada sobre algunas de estas demostraciones se encuentra en (Ribbenboim, 1996).

En su famoso artículo "*On the infinitude of primes*" (Fürstenberg, 1955), Fürstenberg presenta una prueba topológica del Teorema de Euclides, la simplicidad de la demostración es inspiradora, sin embargo resulta importante discutir su profundidad. En este artículo estudiamos la Topología de Fürstenberg a través de las metrificaciones conocidas.

Denominaciones y notaciones.

Denotamos por \mathbb{N} al conjunto de los números naturales, por \mathbb{Z} al conjunto de los números enteros, por P al conjunto de los primos y por \mathbb{Q}^+ al conjunto de los números racionales no negativos. Para indicar, que en \mathbb{Z} , d es un divisor de n escribiremos $d|n$, en caso contrario $d \nmid n$. En un espacio métrico (X, d) denotaremos por $B(a, r)$ y llamaremos la bola centrada en $a \in X$ y radio r al conjunto $\{x \in X: d(a, x) < r\}$.

La Topología de Fürstenberg.

Para cada $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, definimos:

$$S(a, b) = a\mathbb{Z} + b = \{an + b: n \in \mathbb{Z}\}$$

La familia de subconjuntos $\beta = \{S(a, b) / (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}\}$ es base de una única topología τ sobre \mathbb{Z} , que llamamos la topología de Fürstenberg. El espacio topológico (\mathbb{Z}, τ) tiene las siguientes propiedades.

- Todo abierto no vacío de (\mathbb{Z}, τ) es infinito, pues todos los abiertos de la base β son infinitos.
- (\mathbb{Z}, τ) es desconexo. En efecto, \mathbb{Z} se puede expresar como unión finita de abiertos disjuntos de la siguiente forma: Para $a \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{i=0}^{a-1} S(a, i)$$

- De la propiedad anterior, se obtiene que (\mathbb{Z}, τ) es totalmente desconexo. (Lovas & Mezö, 2010).
- Para $a \in \mathbb{N}^*$ y $0 \leq b < a : S(a, b)$ es cerrado en (\mathbb{Z}, τ) , pues,

$$S(a, b) = \mathbb{Z} - \bigcup_{0 \leq i < a, i \neq b} S(a, i)$$

- Los abiertos de la base β también son cerrados, pues se pueden expresar de la forma $S(a, b)$, con $a \in \mathbb{N}^*$ y $0 \leq b < a$.
- El espacio (\mathbb{Z}, τ) es de Hausdorff (ó T_2). En efecto, si a y b son enteros distintos y k un entero positivo que no divide a $a - b$ entonces $a \in S(k, a)$, $b \in S(k, b)$ y $S(k, a) \cap S(k, b) = \emptyset$.
- El espacio (\mathbb{Z}, τ) es cero dimensional, pues posee una base formada por conjuntos que son tanto abiertos como cerrados.

La infinitud de los números primos.

Sobre las propiedades del espacio (\mathbb{Z}, τ) , Fürstenberg dio la siguiente demostración de la infinitud de los números primos.

Como todo entero n con $|n| > 1$, posee, por lo menos, un divisor primo; podemos asegurar que el conjunto $\{1, -1\}$ es cerrado en (\mathbb{Z}, τ) , ya que su complemento es abierto.

$$\mathbb{Z} - \{1, -1\} = \bigcup_{p \in P} S(p, 0)$$

Si el conjunto de los números primos fuese finito, $\mathbb{Z} - \{1, -1\}$ sería una unión finita de cerrados y por lo tanto cerrado. Esto implicaría que el conjunto $\{1, -1\}$ es abierto y por lo tanto infinito, lo que es absurdo.

Metrizabilidad del Espacio de Fürstenberg

Fürstenberg también aseveró que el espacio (Z, τ) es metrizable. Este resultado se puede establecer como una aplicación del Teorema de Metrización de Urysohn. (Acevedo, 2002).

Recordemos las siguientes definiciones:

Un espacio topológico es regular, o T_3 , si dados un cerrado F de la topología y un punto x que no pertenece a F , existen un abierto U que contiene a x y un abierto V que contiene a F tales que $U \cap V = \emptyset$.

Un espacio topológico es segundo contable, si admite una base contable.

El Teorema de Metrización de Urysohn establece condiciones suficientes para que un espacio topológico sea metrizable.

Teorema 1. (Urysohn). Todo espacio topológico regular y segundo contable es metrizable.

Demostración: Ver (Acevedo, 2002).

Para establecer la metrizabilidad de (Z, τ) basta notar que es segundo contable, pues evidentemente β es una base contable de la topología de Fürstenberg y es regular porque β es una base formada de conjuntos que son tanto abiertos como cerrados.

Como consecuencia del Teorema de Urysohn obtenemos que:

Teorema 2. El espacio (Z, τ) es metrizable.

La prueba de Urysohn descansa sobre el hecho de que un espacio topológico con las propiedades enunciadas en el teorema se puede identificar con un subespacio del cubo de Hilbert. Demostrar que un espacio topológico es metrizable y determinar explícitamente una métrica que induzca la topología son dos tareas distintas. En nuestro caso, el problema natural es definir una métrica sobre Z cuya topología inducida sea precisamente la topología de Fürstenberg.

Los autores de este artículo hemos encontrado en la literatura sólo dos métricas que en efecto inducen sobre Z la topología de Fürstenberg. En (Lovas & Mezö, 2010), consideran, en primera instancia, la aplicación $\|\cdot\|_1: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ definida por $\|0\|_1 = 0$ y para $n \neq 0$, $\|n\|_1 = 1/k$, donde k es el único entero positivo tal que $1, 2, \dots, k$ son divisores de n y $k+1$ no divide a n . La aplicación $\|\cdot\|_1$ tiene las siguientes propiedades:

Teorema 2. Para todo $n, m \in \mathbb{Z}$:

- a) $\|n\|_1 = \|-n\|_1$.
- b) $\|n\|_1 = 0$ si y sólo si $n = 0$.
- c) $\|n\|_1 = 1$ si y sólo si n es impar.
- d) $\|n!\|_1 \leq \frac{1}{n}$
- e) Si $\|n\|_1 < \frac{1}{m}$ entonces $m|n$.
- f) $\|nm\|_1 \leq \min\{\|n\|_1, \|m\|_1\}$.
- g) n es par si y sólo si $\|n\|_1 \leq \frac{1}{2}$

Un resultado fácil de probar, pero muy importante, es el siguiente teorema.

Teorema 3. Dados n, m enteros se tiene:

$$\|n + m\| \leq \max\{\|n\|, \|m\|\}.$$

Prueba. Lo propuesto es evidente si $n = 0$ ó $m = 0$. Sean r y s enteros positivos tales que $\|n\| = 1/r$ y $\|m\| = 1/s$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $r \leq s$, por lo tanto $\max\{\|n\|, \|m\|\} = \|n\|$. Tenemos que $1, 2, \dots, r$ son divisores de n y m por lo tanto $\|n + m\| \leq \frac{1}{r} = \|n\| = \max\{\|n\|, \|m\|\}$.

A partir de la aplicación $\|\cdot\|_1$, se define

$$\begin{aligned} d_1: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Q}^+ \\ (n, m) &\rightarrow d_1(n, m) = \|n - m\| \end{aligned}$$

Teorema 4. (\mathbb{Z}, d_1) es un espacio métrico y d_1 es invariante por traslación.

Prueba. Es inmediato que para $n, m \in \mathbb{Z}$ se tiene $d_1(n, m) = 0$ si y sólo si $n = m$ y que $d_1(n, m) = d_1(m, n)$. La desigualdad triangular se establece aplicando el Teorema 2, si $k, m, n \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$d_1(k, n) = \|k - n\|_1 = \|(k - m) + (m - n)\|_1 \leq \max\{\|k - m\|_1, \|m - n\|_1\}$$

Por lo tanto: $d_1(k, n) \leq d_1(k, m) + d_1(m, n)$. Además,

$$d_1(k + m, n + m) = \|(k + m) - (n + m)\|_1 = \|k - n\|_1 = d_1(k, n)$$

En realidad, hemos demostrado que (\mathbb{Z}, d_1) es un espacio ultramétrico.

A continuación un resultado central de estas notas.

Teorema 5. Con la función distancia d_1 , (\mathbb{Z}, d_1) es un espacio métrico y la topología inducida por d_1 es τ , la topología de Fürstenberg.

Prueba. Supongamos que A es un abierto, no vacío, en (\mathbb{Z}, d_1) y sea $a \in A$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$. Consideremos $m \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{m} < r$ y $b = m!$. Tenemos que $\|b\|_1 = \|m!\|_1 \leq \frac{1}{m}$ y $S(b, a)$ es un abierto de τ incluido en A , pues si $n \in \mathbb{N}$: $d_1(a + bn, a) = \|a + bn - a\|_1 = \|bn\|_1 \leq \|b\|_1 = \|m!\|_1 \leq \frac{1}{m} < r$. Por lo $a \in S(b, a) \subseteq B(a, r) \subseteq A$ y hemos probado que A es un abierto de τ .

Por otro lado, sea A un abierto de τ . Sean $a \in A$ y $b \in \mathbb{N}$ tal que $S(b, a) \subseteq A$. Tomamos $r = \frac{1}{b}$ y consideremos $B(a, r)$. Afirmamos que $B(a, r) \subseteq A$. En efecto, si $m \in B(a, r)$ se tiene que $d_1(m, a) = \|m - a\|_1 < r = \frac{1}{b}$. Por lo tanto b es un divisor de $m - a$ y podemos escribir $m = a + bn$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que $a \in B(a, r) \subseteq S(b, a) \subseteq A$ y que A es abierto en (\mathbb{Z}, d_1) .

El código, en Mathematica, presentado a continuación nos permite calcular valores de la función $\| \cdot \|_2$ y por lo tanto de d_1 .

```
g[n_] := (c = Divisors[n];
d = Length[c]; h = Table[-i + c[[i]], {i, 1, d}];
For[i = 1, i < d, If[h[[i]] > 0, Break[]]; i ++]; 1/(i - 1))
```

La segunda de las metrificaciones conocidas fue propuesta por J. Ferry en Science Forum Index. En este caso se considera la aplicación

$$\| \cdot \|_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}^+$$

$$n \rightarrow \|n\|_2 = \sum_{\substack{d|n \\ d \geq 1}} 2^{-d}$$

Nótese que $\|0\|_2 = 0$ y que para $n \neq 0$ se tiene

$$\|n\|_2 = 1 - \sum_{\substack{d|n \\ d \geq 1}} 2^{-d}$$

Presentamos las propiedades básicas de la aplicación $\| \cdot \|_2$ en el siguiente teorema.

Teorema 6. Para todo $n, m \in \mathbb{Z}$:

- a) $\|n\|_2 = \|-n\|_2$.
- b) $\|n\|_2 = 0$ si y sólo si $n = 0$.
- c) $\|n\|_2 \leq \frac{1}{2}$.
- d) $\|nm\|_2 \leq \min\{\|n\|_2, \|m\|_2\}$.
- e) $\|n\|_2 \leq \frac{1}{4}$ si y sólo si n es par.
- f) $\|n!\|_2 < 2^{-n}$.
- g) Si $\|n\|_2 < 2^{-m}$, entonces $m|n$.

La distancia d_2 se define para todo $n, m \in \mathbb{N}$ por $d_2(n, m) = \|n - m\|_2$.

En efecto, tenemos:

Teorema 7. (\mathbb{Z}, d_2) es un espacio métrico y d_2 es invariante por traslación.

Prueba. Es inmediato que para $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}$ se tiene $d_2(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{n} = \mathbf{m}$ y que $d_2(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = d_2(\mathbf{m}, \mathbf{n})$. La invariancia por traslación de d_2 es evidente. Nos falta por demostrar la desigualdad triangular. Para tal fin, mostraremos que si $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}$ entonces $\|\mathbf{n} + \mathbf{m}\|_2 \leq \|\mathbf{n}\|_2 + \|\mathbf{m}\|_2$. La desigualdad es obvia si $\mathbf{n} = \mathbf{m} = \mathbf{0}$. Dado un entero r denotamos por D_r al conjunto de los divisores positivos de r . Hacemos:

$$\begin{aligned} A_1 &= D_n \cap (D_m)^c \cap (D_{n+m})^c \\ A_2 &= (D_n)^c \cap D_m \cap (D_{n+m})^c \\ A_3 &= (D_n)^c \cap (D_m)^c \cap D_{n+m} \\ A_4 &= (D_n)^c \cap (D_m)^c \cap (D_{n+m})^c \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} (D_n)^c &= A_2 \cup A_3 \cup A_4 \\ (D_m)^c &= A_1 \cup A_3 \cup A_4 \\ (D_{n+m})^c &= A_1 \cup A_2 \cup A_4 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{n} + \mathbf{m}\|_2 &= \sum_{d \in (D_{n+m})^c} 2^{-d} \\ &\leq \sum_{d \in (D_n)^c} 2^{-d} + \sum_{d \in (D_m)^c} 2^{-d} = \|\mathbf{n}\|_2 + \|\mathbf{m}\|_2 \end{aligned}$$

Nótese que d_2 , a diferencia de d_1 no es una ultramétrica.

Por ejemplo

$$\|5\|_2 = \frac{15}{32} > \max\{\|2\|_2, \|3\|_2\} = \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\}.$$

A continuación un código en Mathematica para calcular valores de las funciones $\|\cdot\|_2$ y d_2 .

$$f[\mathbf{n}_.] := (\mathbf{a} = \text{Divisors}[\mathbf{n}]; \mathbf{b} = \text{Length}[\mathbf{a}]; 1 - \sum_{j=1}^{\mathbf{b}} 2^{-\mathbf{a}[[j]]})$$

Teorema 8. Con la función distancia d_2 , (\mathbb{Z}, d_2) es un espacio métrico y la topología inducida por d_1 es τ , la topología de Fürstenberg.

Prueba. Supongamos que A es un abierto, no vacío, en (\mathbb{Z}, d_2) y sea $\mathbf{a} \in A$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \subseteq A$. Tomemos $\mathbf{m} \in \mathbb{N}$ con

$$\sum_{i=\mathbf{m}+1}^{\infty} 2^{-i} < r \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \mathbf{m}!$$

Resulta que $S(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ es un abierto de τ incluido en A , pues si $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$:

$$d_2(\mathbf{a} + \mathbf{bn}, \mathbf{a}) = \|\mathbf{a} + \mathbf{bn} - \mathbf{a}\|_2 = \|\mathbf{bn}\|_2 \leq \|\mathbf{b}\|_2 = \|\mathbf{m}!\|_2.$$

Además, si $d \nmid \mathbf{m}!$ se tiene que $d \geq \mathbf{b} + 1$, por lo tanto

$$\|\mathbf{m}!\|_2 = \sum_{\substack{d \mid \mathbf{m}! \\ d \geq 1}} 2^{-d} < \sum_{i=\mathbf{b}+1}^{\infty} 2^{-i} < r$$

Esto prueba que $\mathbf{a} \in S(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \subseteq B(\mathbf{a}, r) \subseteq A$ y que A es un abierto de τ .

Por otro lado, sea A un abierto de τ . Sean $\mathbf{a} \in A$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{N}$ tal que $S(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \subseteq A$. Tomamos $r = \frac{1}{2^{\mathbf{b}}}$ y consideremos $B(\mathbf{a}, r)$. Afirmamos que $B(\mathbf{a}, r) \subseteq A$. En efecto, si $\mathbf{m} \in B(\mathbf{a}, r)$ se tiene que $d_2(\mathbf{m}, \mathbf{a}) = \|\mathbf{m} - \mathbf{a}\|_2 < r = \frac{1}{2^{\mathbf{b}}}$. Por lo tanto \mathbf{b} es un divisor de $\mathbf{m} - \mathbf{a}$ y podemos

escribir $m = a + bn$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que $a \in B(a, r) \subseteq S(b, a) \subseteq A$ y que A es abierto en (\mathbb{Z}, d_2) .

Corolario 1. Las métricas d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

Recordemos que dos métricas d y D sobre un conjunto X son métricamente equivalentes si existen constantes positivas α y β tales que para todo $x, y \in X$ se tiene que $\alpha d(x, y) \leq D(x, y) \leq \beta d(x, y)$. Es conocido que distancias métricamente equivalentes son topológicamente equivalentes, pero en general la equivalencia topológica no implica la equivalencia métrica. De forma natural nos hemos preguntado sobre la equivalencia métrica de las distancias d_1 y d_2 aquí estudiadas. Algunos “evidencias numéricas” nos inclinan a pensar que las distancias d_1 y d_2 no son métricamente equivalentes. Al respecto, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 9. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$\|n\|_2 \leq \frac{1}{2} \|n\|_1.$$

Prueba. Sea $n \in \mathbb{Z}$. La desigualdad propuesta se cumple evidentemente para $n = 0$. Supongamos que $n \neq 0$ y que $\|n\|_1 = \frac{1}{k}$. Entonces $1, 2, \dots, k$ son divisores de n y Por lo tanto

$$\|n\|_2 = 1 - \sum_{\substack{d|n \\ d \geq 1}} 2^{-d} \leq 1 - \sum_{j=1}^k 2^{-j} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \|n\|_1$$

Teorema 10. El espacio (\mathbb{Z}, d_1) es totalmente acotado

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$ y p un primo impar tal que $\frac{1}{p-1} < \varepsilon$. Para cada entero r con $0 \leq j < (p-1)!$, consideramos $B_j = B(j, \varepsilon)$. Aseguramos que

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{j=0}^{(p-1)!-1} B_j$$

En efecto, sea $m \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene que

$$m = q(p-1)! + j \text{ con } 0 \leq j < (p-1)!$$

Por lo tanto,

$$d_1(m, j) = \|m - j\|_1 = \|q(p-1)!\|_1 \leq \|(p-1)!\|_1 = \frac{1}{p-1} < \varepsilon.$$

Esto prueba que $m \in B_j$ y con esto queda establecido el enunciado del teorema.

Nuestro siguiente objetivo es establecer la no compacidad del espacio de Fürstenberg. Para tal fin, necesitamos algunas nociones teórico-numéricas.

Dado un entero positivo m , decimos que $n \in \mathbb{Z}$ es un residuo cuadrático módulo m si la congruencia $x^2 \equiv n \pmod{m}$ admite solución. Nótese que si $m|n$ entonces n es un residuo cuadrático módulo m . Si p es un número primo y $n \in \mathbb{Z}$, denotamos por $\left(\frac{n}{p}\right)$ al símbolo de Legendre de n con respecto a p y lo definimos

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \nmid n \text{ y } n \text{ es un residuo cuadrático módulo } p. \\ 0 & \text{si } p|n \\ -1 & \text{si } p \nmid n \text{ y } n \text{ es un residuo cuadrático módulo } p. \end{cases}$$

Aplicaremos las siguientes propiedades del símbolo de Legendre,

- $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$
- Si $m, n \in \mathbb{Z}$, $\left(\frac{mn}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right) \left(\frac{n}{p}\right)$
- Si $p \nmid n$, $\left(\frac{n^2}{p}\right) = 1$.
- Si $m, n \in \mathbb{Z}$ son tales que $m \equiv n \pmod{p}$ entonces $\left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{n}{p}\right)$.

Ahora, enunciamos a manera de lema dos resultados de utilidad para nuestro fin.

Lema 1. Sea m un entero no nulo, entonces existe un primo impar p tal que $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$.

Prueba. Tomemos $n = 4m - 1$, se tiene que n es impar y $|n| > 1$. Escogemos un primo impar p divisor de n y nos queda que $p \nmid (n + 1)$ y

$$1 = \left(\frac{n + 1}{p}\right) = \left(\frac{4m}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right).$$

Lema 2. Sean p_1, p_2, \dots, p_k primos impares distintos. Entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\left(\frac{m}{p_1}\right) = \left(\frac{m}{p_2}\right) = \dots = \left(\frac{m}{p_k}\right) = -1$$

Prueba. Para cada p_i escogemos $a_i \in \mathbb{Z}$ tal que $\left(\frac{a_i}{p_i}\right) = -1$. Consideramos el sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{p_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{p_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_k \pmod{p_k} \end{cases}$$

Por el teorema chino de los restos, el sistema admite una solución $m \in \mathbb{Z}$. Para $i = 1, 2, \dots, k$ se tiene

$$\left(\frac{m}{p_i}\right) = \left(\frac{a_i}{p_i}\right) = -1.$$

Teorema 11. El espacio (\mathbb{Z}, τ) de Fürstenberg no es compacto.

Prueba. Sea P^* el conjunto de los primos impares, para $p \in P^*$ consideramos el abierto

$$A_p = \bigcup_{0 \leq a < p} S(p, a^2)$$

A_p es el conjunto de los residuos cuadráticos módulo p . Por el lema 1, la familia $\{A_p\}_{p \in P^*}$ es un cubrimiento abierto de \mathbb{Z} y por el lema 2 este cubrimiento no admite sub-cubrimientos finitos.

Como consecuencia de los dos teoremas anteriores, tenemos

Corolario 2. El espacio (\mathbb{Z}, d_1) no es completo.

CONCLUSIONES

Luego del estudio de las conocidas metrificaciones del espacio de Fürstenberg hemos establecido que éstas son topológicamente equivalentes, sin embargo la equivalencia métrica no ha sido establecida ni refutada.

El hecho de que d_1 sea una ultramétrica, a diferencia de d_2 , nos inclina a pensar que no es posible la equivalencia métrica de las distancias, pero esto no representa un paso significativo.

Hemos probado que el espacio de Fürstenberg es totalmente acotado, no compacto y no completo.

Toda vez que \mathbb{Z} es un anillo topológico con respecto a la suma y multiplicación usual y la topología, sería interesante estudiar la completación correspondiente siguiendo las ideas dadas en (Baker, 2010).

REFERENCIAS

Acevedo, E. 2002. *Metrización de Espacios Topológicos según el Teorema de Uryshon*. Tesis para optar por el grado de Licenciado en Matemática. Universidad de Panamá.

Furstenberg, H. 1955. *On the infinitude of primes*, American Mathematical Monthly. Vol. 62(5), pp.353.

Ribenboim, P. 1996. *The New Book of Prime Number Records*, 3rd ed., Springer-Verlag, New York.

Lovas, R.L. & I. Mezö. 2010. *On an exotic topology of the integers* http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1008/1008.0713v1.pdf

Science Forum Index,

<http://www.groupsrv.com/science/about483222.html>.

Broughan, K. 2003. *Adic Topologies for the Rational Integers*, Canad. J. Math. Vol. 55 (4), pp. 711.723.

Broughan, K. & F. Luca. 2010. *On the Fürstenberg closure of a class of binary*. Journal of Number Theory. Vol. 130(5), pp. 696-706.

Baker, A. 2010. *An introduction to p-adic numbers and p-adic Analysis*. <http://www.maths.gla.ac.uk/~ajb/dvi-ps/padicnotes.pdf>.

Recibido septiembre de 2010, aceptado diciembre de 2011.



CARACTERIZACIÓN DE LA PÁTINA PROTECTORA DEL ACERO PATINABLE ASTM A709 HPS 70W DEL PUENTE CENTENARIO

Juan A. Jaén¹, Olga Adames², Josefina Iglesias³ y Cecilio Hernández³

¹Universidad de Panamá, Edificio de Laboratorios Científicos-VIP, Lab. Nº 105, Depto. de Química Física, ²Universidad de Panamá, Escuela de Química, ³Universidad Tecnológica de Panamá, Laboratorio de Análisis Industriales y Ciencias Ambientales.

RESUMEN

La pátina del acero ASTM A709 HPS 70W de los marcos delta del Puente Centenario fue analizada con espectroscopia de infrarrojo de transformada de Fourier (FTIR), difracción de rayos X y espectroscopia Mössbauer. En general, la pátina está constituida por goethita (α -FeOOH), lepidocrocita (γ -FeOOH), una fase espinela de magnetita no estequiométrica ($\text{Fe}_{3-x}\text{O}_4$) y/o maghemita (γ - Fe_2O_3) y hematita (α - Fe_2O_3). La hematita, que no es un producto de corrosión usual en corrosión atmosférica, es un óxido muy estable. Con FTIR se identifica también feroxihita (δ -FeOOH). Una proporción importante, cerca de 50%, es goethita con tamaño de partículas menores a 15 nm. Se concluye que la pátina tiene una composición y características que la hacen protectora contra la corrosión. Se recomienda mantener un programa preventivo de inspección, particularmente de la humedad y acumulación de agua y herrumbre.

PALABRAS CLAVES

Pátina, acero de alto rendimiento, oxihidróxidos y óxidos de hierro, superparamagnetismo, espectroscopia de infrarrojo de transformada de Fourier, difracción de rayos X, espectroscopia Mössbauer.

ABSTRACT

The patina of the HPS 70W steel ASTM A709 used in the delta frames of Centennial Bridge was analyzed using Fourier transform infrared spectroscopy, X-ray diffraction and

Mössbauer spectroscopy. In general, the patina is formed by goethite (α -FeOOH), lepidocrocite (γ -FeOOH), a spinel phase consisting of non-stoichiometric magnetite ($\text{Fe}_{3-x}\text{O}_4$) and/or maghemite (γ - Fe_2O_3) and hematite (α - Fe_2O_3). Hematite, which is not a usual corrosion product in atmospheric corrosion, is a very stable oxide. FTIR also identified ferroxhyte (δ '-FeOOH). A significant proportion, about 50%, is goethite with particle sizes below 15 nm. It is concluded that the patina, due to its composition and characteristics, is protective against corrosion. We recommend keeping a preventive inspection, particularly of moisture and standing water and rust.

KEYWORDS

Patina, High Performance Steel (HPS), iron oxyhydroxides and oxides, superparamagnetism, Fourier transform infrared spectroscopy, X ray diffraction, Mössbauer spectroscopy.

INTRODUCCIÓN

El puente Centenario es un Puente atirantado con diseño en arpa, que cruza el icónico Canal de Panamá por el Corte Culebra, cerca de las esclusas de Pedro Miguel. Es el segundo puente permanente en cruzar el Canal de Panamá, el primero fue el Puente de las Américas. Miedzybrodzki (2009) analizó críticamente el Puente Centenario desde las perspectivas de sus antecedentes, la profundidad estética y presenta consideraciones sobre su construcción, desempeño, durabilidad y los efectos de la actividad sísmica. En cuanto a la durabilidad de los cables tirantes señala que, dados sus propósitos estructurales primarios y la exposición a un entorno muy húmedo, se protegen de la corrosión usando alambres galvanizados por inmersión en caliente, que son subsecuentemente extruidos en polietileno. Con estas tecnologías, se espera que los cables tirantes tengan una vida útil de 50 años o más (Mehrabi *et al.*, 2010). Los cables individuales que se deterioren pueden ser cambiados con relativa facilidad dada la suficiente redundancia como para eliminar temporalmente y sustituir a los cables actuales de forma segura.

El Puente Centenario tiene una estructura que consta de un único plano de cables, anclados en una viga cajón continua que soporta las fuerzas de tráfico a través del puente. La viga se suspende del plano central de cables, un cable cada 6 m, sobre marcos de acero en forma de delta ("delta frames") hechos con un acero de alto rendimiento (HPS) ASTM A709, Grado HPS-70W. Existen anclajes prefabricados unidos

a los marcos en forma de delta que sirvieron al postensado de los cables principales. Los aceros HPS pertenecen al grupo de aceros de alta resistencia y baja aleación (HSLA). Tienen bajo contenido de carbono (0.11%) y poseen esfuerzos de fluencia que van desde 485 MPa a 900 MPa, con excelente ductilidad, tenacidad, soldabilidad y resistencia a la corrosión, son excelentes en la construcción de puentes (MacDougall *et al.*, 2004; Azizinamini *et al.*, 2004; Kayser *et al.*, 2006). Aunque el uso de aceros de alta resistencia para la construcción de puentes en Japón se remonta a la década de 1960 (Miki *et al.*, 2002), no es sino hasta 1992 (AASHTO, 2003) cuando se inició un esfuerzo cooperativo entre la Administración Federal de Carreteras (FHWA), la Marina de los EE.UU., y el American Iron and Steel Institute (AISI) para el desarrollo y fabricación de aceros HPS. El primero en fabricarse, tres años más tarde, fue un HPS de grado 485 MPa, con especificación ASTM A709 grado HPS 485, que en lo sucesivo se denominó HPS 70W. La denominación “W” significa que estos son aceros patinables (“weathering steels”), i.e. capaces de formar una pátina, barrera estable, adherente y protectora contra la corrosión. La adición de Cu, Cr y Ni estabiliza la capa de óxido que se forma cuando se expone a ciclos húmedo y seco, limitando el acceso del oxígeno, la humedad y los contaminantes. Los aceros HPS 70W cumplen con los requisitos de composición para ser usados en la condición sin pintar, dadas por la norma ASTM G101 (ASTM, 1997). Estos índices sugieren que el acero HPS 70W debe tener mejor resistencia a la corrosión que un 50W, aunque esto todavía no se ha comprobado experimentalmente (AASHTO, 2003). Al igual que con otros aceros expuestos a la intemperie, potencialmente se espera un incremento en las tasas de corrosión atmosférica en ambientes continuamente húmedos o agentes corrosivos.

Este trabajo tiene como objetivo establecer las características protectoras de la pátina del acero ASTM A709, grado HPS 70W del Puente Centenario, mediante la determinación espectroscópica de la naturaleza y composición de fases. La caracterización de la pátina se realizó con espectroscopia de infrarrojo de transformada de Fourier (FTIR), difracción de rayos X (XRD) y espectroscopia Mössbauer (EM), y se correlacionó con las propiedades protectoras de la pátina.

PARTE EXPERIMENTAL

Muestras de la pátina de los marcos delta en distintos puntos, según se indica en la Figura 1, fueron proporcionadas por personal de la Universidad Tecnológica de Panamá. Los productos se separaron mecánicamente por raspado. El polvo fue molido en mortero de ágata y luego caracterizado espectroscópicamente. Los difractogramas se obtuvieron en el Instituto de Materiales de la Universidad Autónoma de México (UNAM) con difractómetro Bruker D8 Advance con detector de ángulo Vantek 2000. Los espectros IR se realizaron en un espectrómetro de transformada de Fourier Nicolet Avatar 360 FTIR spectrometer. La resolución de los espectros fue de 4 cm^{-1} . Los espectros Mössbauer se registraron con un espectrómetro convencional de aceleración constante, con una fuente de $^{57}\text{Co}(\text{Rh})$ de 10 mCi (370 MBq). Las medidas a bajas temperaturas se realizaron usando un criostato de ciclo cerrado CCS 850 Janis. Los desplazamientos isoméricos se reportan respecto al centroide del $\alpha\text{-Fe}$ a temperatura ambiente. Las evaluaciones se realizaron con el programa Recoil, utilizando líneas de Voigt para los espectros a 298 K y líneas lorentzianas para los espectros obtenidos a 80 K.



Fig. 1. Ubicación de los puntos de muestreo en el Puente Centenario. La denominación este u oeste se refieren al lado de muestreo, en dirección a Panamá Este o Panamá Oeste. Foto de (Miedzybrodzki, 2009).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El acero de alto rendimiento (HPS) ASTM A709, Grado HPS-70W, usado en los marcos delta del Puente Centenario, fue tratado en fabrica para alcanzar una pátina estable antes del suministro para su instalación. En la Figura 2 se presenta una vista de los marcos delta instalados.



Fig. 2. Marcos con forma de delta (“delta frames”) del Puente Centenario.

Para obtener una identificación básica de los óxidos presentes en la pátina, se registraron los patrones de difracción de rayos X en polvo de muestras seleccionadas, que se muestran en la Figura 3. Los difractogramas se obtuvieron en el rango angular de $4-80^\circ$. Aunque la

relación de intensidad de los picos detectados varia, los patrones de rayos X de difracción tenían características similares. El análisis de fases indica que los compuestos cristalinos mayoritarios en las herrumbres provenientes de la pátina del Puente Centenario son los polimorfos de oxihidróxidos férricos goethita (α -FeOOH) y la lepidocrocita (γ -FeOOH), y los óxidos hematita α -Fe₂O₃, magnetita (Fe₃O₄) y/o maghemita (γ -Fe₂O₃).

Las líneas de reflexión de los óxidos magnetita y maghemita están muy próximas entre sí, ambos tiene una estructura cúbica con parámetros de red muy similares, por lo que resulta difícil distinguirlas por esta técnica (Cornell & Schwertmann, 1996). Por espectroscopia infrarroja no se observaron las bandas relativas a la maghemita y si se observaron, aunque bastante ensachadas, las bandas características de la magnetita. Por su parte, espectroscopia la Mössbauer evidenció la presencia de magnetita no estequiométrica. La fórmula química de la magnetita no estequiométrica se puede escribir como Fe_{3-x}O₄, en la que x puede variar, en principio, entre cero (magnetita estequiométrica) y 1/3 (maghemita) (Coey & Morrish, 1971). Ambos compuestos estructuralmente son espinelas inversas ferrimagnéticas. Durante la corrosión atmosférica de aceros, estas espinelas se obtienen como magnetita no estequiométrica (Fe_{3-x}O₄), o en forma totalmente oxidada como maghemita; y en ocasiones como partículas finas paramagnéticas, dependiendo de las condiciones (ambientales o químicas). De este modo, es quizás conveniente interpretar las líneas de reflexión observadas en los difractogramas como magnetita no estequiométrica.

La presencia de α -FeOOH y γ -FeOOH se logró detectar como picos anchos y débiles a través de los picos de mayor intensidad para las fases. Varios picos o no se lograban detectar, o bien se superponen con picos de otras fases presentes. Aunque varias líneas de difracción eran anchas, no se detecta de manera significativa dispersión amorfa. Por lo tanto, las fases de goethita y lepidocrocita no están bien cristalizadas o tienen tamaño pequeño, que se puede calcular mediante un análisis de Rietveld.

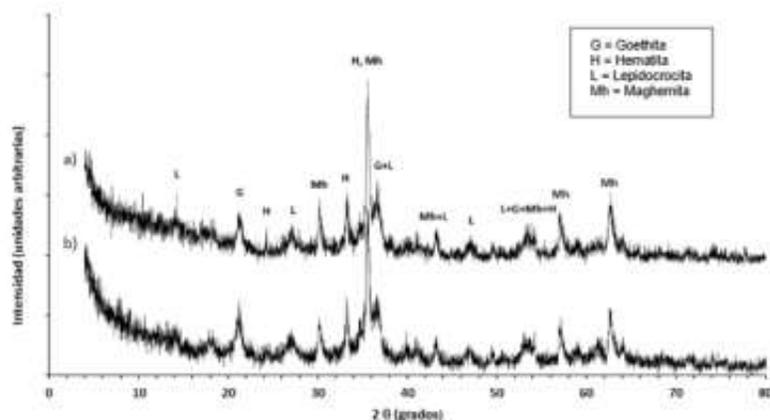


Fig. 3. Difractogramas de Rayos X de las muestras de pátina a) Este out 22 y b) Este ind 14.

Es conveniente llamar la atención sobre la presencia de hematita ($\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$). Este es un óxido termodinámicamente muy estable (Cornell & Schwertmann, 1996), que ha sido poco reportado como producto de corrosión atmosférica. De la amplia literatura consultada, sólo hemos conocido del reporte de Antunes et al. (2003) quienes observaron por DRX la presencia de hematita en la atmósfera industrial de Cubatão, Brasil, y también en el sitio industrial de Bilbao (De la Fuente *et al.*, 2011). De esta forma, parece poco probable que la hematita presente en la patina sea el resultado de la exposición atmosférica del acero HPS 70W, más bien debe ser el resultado del tratamiento que se realizó en fábrica para obtener de manera acelerada las características protectoras contra la corrosión. Proponemos que la hematita formada en la pátina es el resultado de transformaciones de otros óxidos, como por ejemplo akaganeita (Knese *et al.*, 1999; Goñi-Elizalde *et al.*, 1987), goethita (Knese *et al.*, 1999) o ferrihidrita (Johnston & Lewis, 1983; Cudennec & Lecerf, 2006; Schwertmann *et al.*, 1999). De hecho, la exposición a atmósferas altamente contaminadas por SO_2 es necesaria para la formación natural de la pátina en los aceros patinables. Los trabajos de Gancedo (Gancedo *et al.*, 1988; Marco *et al.*, 1989; Marco *et al.*, 1990; Davalos *et al.*, 1991; Davalos *et al.*, 1991) nos indican que uno de los principales productos de la interacción de los aceros patinables con atmósferas de SO_2 es la ferrihidrita, precursor de la hematita.

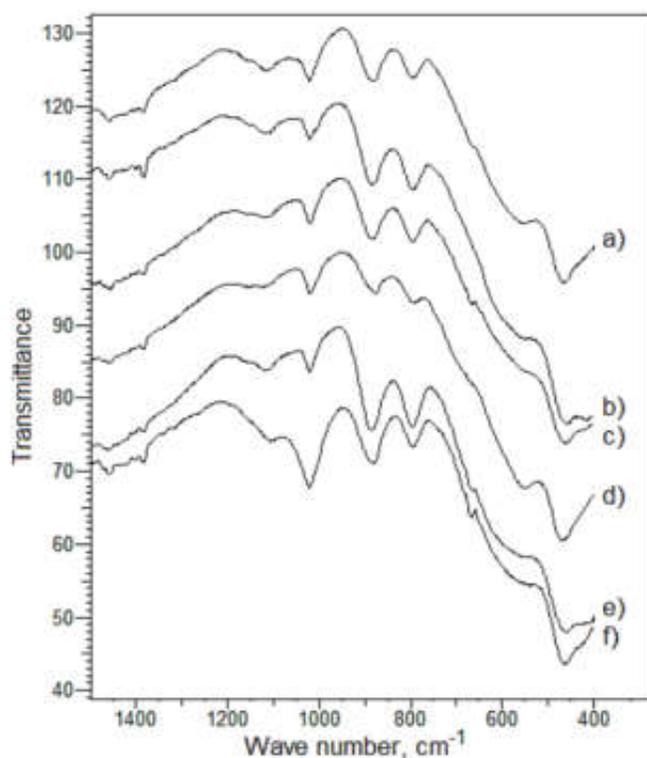


Fig. 4. Espectros de infrarrojo (FTIR) de muestras de pátina de a) Este out 22, b) Oeste ind 15, c) Oeste out 15, d) Oeste platina 15, e) Este out 14 y f) Este ind 14.

Diversas formas de óxido pueden ser fácilmente identificados vía espectroscopia infrarrojo a partir de los patrones característicos de fases estándar proporcionados en la literatura (Raman & Kuban, 1988; Raman *et al.*, 1991; Cornell & Schwertmann, 1996; Lair *et al.*, 2006; Kahani & Jafari, 2009). Este método tiene la ventaja de poder caracterizar ambos tipos de compuestos, cristalinos y amorfos. En la Figura 4 se presentan los distintos espectros de FT-IR de las muestras de pátina. Se observa la presencia de lepidocrocita, que se identifica por su pico de absorción característico de la banda de deformación Fe-OH a 1020 cm^{-1} . No se observa la banda de ancha de flexión Fe-OH, de mediana intensidad, a 1152 cm^{-1} . En su lugar, el espectro exhibe un pico bien definido a 1110 cm^{-1} , lo que se interpreta como una contribución de la fase feroxihita (δ' -FeOOH). Esta fase ha sido

reportada ocasionalmente como producto de corrosión atmosférica (Ocampo *et al.*, 2006; De Souza Jr. *et al.*, 2002; Li *et al.*, 2008). La superposición de las líneas de difracción de la feroxihita y la maghemita dificultan su observación en los difractogramas de Rayos X. La banda intensa a 1110 cm^{-1} de la muestra Este ind 14, particularmente, está muy ensanchada lo que sugiere una baja cristalinidad para esta fase. Algo similar ocurre con los diferentes picos característicos de la banda de deformación Fe-OH de la goethita. Esta observación, y el corrimiento de la banda de flexión Fe-OH nos sugiere una interpretación alterna, pero de alguna forma equivalente, de considerar estas fases como óxidos hidratados u oxihidróxidos de hierro (III) de baja cristalinidad. Las bandas de deformación de la goethita a 890 cm^{-1} y a 798 cm^{-1} se observan con toda claridad.

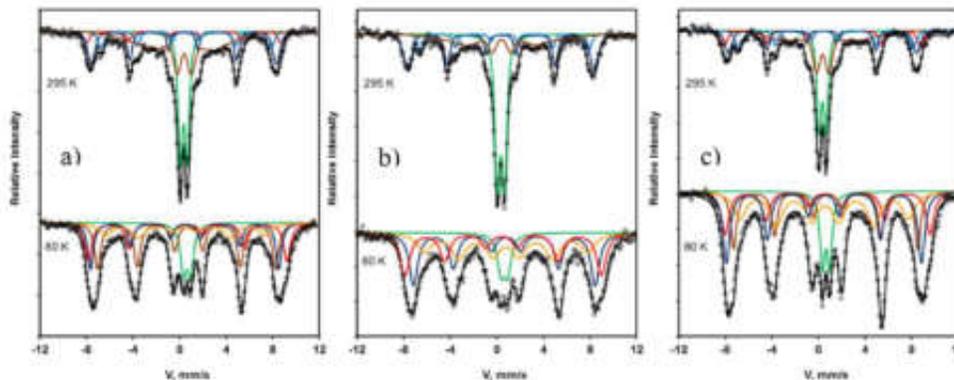


Fig. 5. Espectros Mössbauer a 295 K y 80 K de muestras de pátina a) Este ind 14, b) Oeste out 15 y c) Este out 22.

Las bandas fuertes y anchas, que se observan como un hombro centrado en 560 cm^{-1} , se pueden atribuir a magnetita. El espectro FT-IR de la mayor parte de las distintas muestras de pátina mostró una fuerte absorción a 467 cm^{-1} . La muestra Oeste Platina 15 exhibió además un pico a 551 cm^{-1} , que se puede relacionar con la fase $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$. Sin embargo, las bandas de IR a 551 cm^{-1} y 467 cm^{-1} no pueden ser atribuidas a la hematita sólo sobre la base de mediciones FT-IR. En esta región del espectro IR ($400\text{-}600\text{ cm}^{-1}$) también hay una fuerte influencia de las frecuencias de vibración de enlaces Fe-O procedentes de magnetita, ferrihidrita o lepidocrocita. Los patrones

de difracción de rayos X de los productos de corrosión de las muestras Este out 14 y Este out 22 mostraron que la hematita era un componente importante.

Un doblete y varios sextetos caracterizan los espectros Mössbauer a temperatura de laboratorio de las muestras de pátina, tal como se indica en la Figura 5. El doblete es indicativo de la presencia de lepidocrocita y/o óxidos superparamagnéticos, principalmente de goethita. Los sextetos se relacionan con una fase espinela de magnetita no estequiométrica ($\text{Fe}_{3-x}\text{O}_4$) y/o maghemita ($\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$) y hematita ($\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$). Los componentes magnéticos de la magnetita no estequiométrica se distinguen por sus dos sextetos a temperatura ambiente, que corresponden a Fe^{3+} en sitios tetrahédricos, y el otro a $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}^{3+}$ en sitios octahédricos.

El ajuste a de los espectros mostró que la lepidocrocita a 80 K tenía como parámetros hiperfinos un $\delta \approx 0.47$ mm/s, un $\Delta \approx 0.61$ mm/s, con una anchura de línea aproximada Γ de 0.31 mm/s. La hematita se ajustó a la baja temperatura como un sexteto con $\delta \approx 0.50$ mm/s, $2\epsilon \approx 0.16$ mm/s y un campo hiperfino $H \approx 53.0$ T; la fase de espinela también se ajustó como un sexteto de $\delta \approx 0.50$ mm/s, $2\epsilon \approx -0.06$ mm/s y un campo hiperfino $H \approx 49.8$ T. El ajuste a 80 K de la goethita se realizó con dos sextetos, aunque un ajuste con una distribución hubiese sido más conveniente; los parámetros de ajuste para el primer sitio fueron $\delta \approx 0.52$ mm/s, $2\epsilon \approx -0.16$ mm/s, $H \approx 47.7$ T y $\Gamma = 0.31$ mm/s; para el segundo sexteto, bastante ancho, $\delta \approx 0.52$ mm/s, $2\epsilon \approx -0.02$ mm/s, $H \approx 43.5$ T y $\Gamma = 0.66$ mm/s. El campo hiperfino medio se correlaciona con el volumen de la partícula mediante

$$H = H_0 \left[1 - \frac{k_B T}{2KV} \right] \quad (\text{Mørup, 1990}), \text{ donde } H_0, k_B, T, K \text{ y } V \text{ son el}$$

campo magnético de saturación del volumen de la muestra, la constante de Boltzmann, la temperatura la constante de anisotropía magnética y el volumen, respectivamente. Para H_0 se puede usar el valor de 49.8 T, que corresponde al campo hiperfino a 77 K de la goethita con tamaño de partícula de unos 200 nm (De Grave & Vandenberghe, 1986). Usando el valor reportado de $K \approx 1 \times 10^3 \text{ J/m}^3$ para goethita en policristalina en polvo (Murad, 1987), se calcula un valor de tamaño de partículas de 14 nm para la goethita de mayor

tamaño y de 10 nm para la goethita de distribución ancha de tamaño de partícula y menor campo.

Cuadro 1. Análisis Mössbauer de la abundancia relativa de las distintas fases en las muestras de pátina.

Muestra	α -FeOOH (m) ^a	α -FeOOH (s) ^b	α -FeOOH total	γ -FeOOH	γ -Fe ₂ O ₃ / Fe ₃ O ₄	α -Fe ₂ O ₃
14 Este out	30.2	24.4	54.6	7.2	19.5	18.7
14 Este ind	30.6	16.4	47.0	11.3	20.1	21.6
15 Oeste platina	18.8	29.2	48.0	10.6	28.0	13.4
15 Oeste out	22.1	9.5	31.6	8.8	31.5	28.1
15 Oeste ind	27.6	22.9	50.5	8.3	25.7	15.5
22 Este out	30.6	17.0	47.6	9.3	25.8	17.3

t.p. = tamaño de partícula

^a α -FeOOH (m) goethita magnética (t.p. \geq 15 nm) que exhibe sexteto a 295 K.

^b α -FeOOH (s) goethita superparamagnética (15 nm \geq t.p. \geq 8 nm) que exhibe doblete a 295 K y sexteto magnético a 80 K.

El Cuadro 1 resume los resultados del análisis de la abundancia relativa de las distintas fases a partir de los ajustes Mössbauer a 80 K. Los datos a temperatura ambiente se usaron para distinguir los tamaños de partícula de la goethita. Las partículas de α -FeOOH con tamaño $>$ 15 nm son magnéticas a 298 K, mientras que aquellas de tamaño $<$ 15 nm son superparamagnéticas y exhiben un doblete a temperatura ambiente y un sexteto magnético a 80 K (Cook, 2005). El componente que hemos atribuido a goethita de tamaño \geq 15 nm tiene una estructura magnética colapsada a 295 K debido a la relajación superparamagnética, lo que indica que su tamaño de partícula debe estar cerca de los 15 nm, en armonía con el resultado de los cálculos basados en espectros obtenidos a 77 K. El espectro Mössbauer de α -FeOOH superparamagnético con partículas $<$ 8 nm sigue siendo un doblete a 80 K (Oh *et al.*, 1999; Oh *et al.*, 1999; Cook, 2005). Una proporción importante, cerca del 50%, es goethita con tamaño de partículas menores a 15 nm. Aunque en este trabajo no se puede confirmar la sustitución del cromo (y otros elementos) en la goethita, es razonable concebir la formación de fases del tipo (Cr_xFe_{1-x}) OOH que se conoce hacen que la herrumbre sea de grano fino y compacta

(Yamashita *et al.*, 1994; Cook *et al.*, 1999; Balasubramanian *et al.*, 2002; Kimura *et al.*, 2005; Kihira & Kimura, 2011). Las otras fases también pueden tener incluidos los microaleantes, lo que una vez más no se puede diferenciar mediante las técnicas usadas. No obstante, en ciertas muestras observamos evidencias claras de superparamagnetismo en las fases de espinela y hematita, resultado que será discutido en un trabajo posterior, en el que se examinará la naturaleza de los constituyentes de la patina, y otros aspectos, comparados con los productos de corrosión atmosférica de aceros al carbono y aceros patinables expuestos en distintas atmósferas, en exteriores e interiores.

La tasa de corrosión de un acero en cualquier entorno depende de la composición de la capa de óxido, en nuestro caso la pátina, que puede contener α -FeOOH, β -FeOOH, γ -FeOOH, magnetita y óxidos amorfos. En especial, es muy crítico la razón (α_m/γ^*), en donde α_m y γ^* son las cantidades de α -FeOOH cristalino, y el total de γ -FeOOH, β -FeOOH y los óxidos tipo espinela, respectivamente (Yamashita *et al.*, 1994; Kamimura *et al.*, 2006). Básicamente lo que hace este índice de habilidad protectora de las herrumbres es comparar las proporciones de los óxidos activos electroquímicamente, con aquellos inactivos (Stratmann *et al.*, 1983; Stratmann & Steckel, 1990; Stratmann & Steckel, 1990; Stratmann & Steckel, 1990). La razón α_m/γ^* , que define el índice, debe ser mayor que 0.5 para que la herrumbre sea protectora. En la pátina de los aceros del HPS 70W no se detecta la presencia de akaganeita (β -FeOOH), pero si la hematita α -Fe₂O₃, un óxido que no se incluye en los índices de habilidad protectora, que además es el óxido de hierro más estable. De esta forma, dada la naturaleza de los óxidos y sus tamaños de partícula, se concluye que la pátina del acero de los marcos delta del Puente Centenario es protectora, y no se espera un deterioro importante del mismo, i.e. la tasa de corrosión debe ser inferior a 10 $\mu\text{m}/\text{y}$. No obstante, la presencia de importantes cantidades de la fase espinela de magnetita no estequiométrica y/o maghemita en la pátina llama la atención. Las condiciones de alta humedad, o bien ciclos húmedo-seco con alta humedad resultan en la formación de gruesas capas de herrumbre y su eventual descascaramiento. Estas fases de la herrumbre no adherente se generan a través de procesos electroquímicos con formación de ambos, magnetita y maghemita

(Nasrazadani & Raman, 1993), tal como se reporta en la literatura para explicar severos problemas de corrosión en puentes construidos con aceros patinables (Raman *et al.*, 1986; Cook, 2005). En el caso de las cajas del Puente Centenario, el ambiente está completamente cerrado, excepto por algunas pocas aberturas, que permiten una circulación de aire limitada, y se tiene mucha humedad y altas temperaturas. Al momento del muestreo la humedad relativa era 75% y la temperatura 27 °C solamente. Se puede esperar un aumento de la humedad relativa en las noches, a medida que la temperatura disminuye y la humedad se condensa. A pesar de tener una humedad relativa alta durante la mayor parte del día, se presume una baja corrosión por la ausencia de ciclos húmedo-seco. Se sugiere un programa de inspección periódica, registrar el comportamiento de la humedad relativa y rastrear en búsqueda de sitios en los que se pueda acumular agua y herrumbre.

CONCLUSIONES

En el acero ASTM A709 HPS 70W de los marcos delta del Puente Centenario se identifican los óxidos y oxihidróxidos goethita (α -FeOOH), lepidocrocita (γ -FeOOH), una fase espinela de magnetita no estequiométrica ($\text{Fe}_{3-x}\text{O}_4$) y/o maghemita (γ - Fe_2O_3) y hematita (α - Fe_2O_3). Por FTIR se observa feroxihita (δ' -FeOOH), o bien óxidos hidratados u oxihidróxidos de hierro (III) de baja cristalinidad.

Una proporción importante de estas fases es nanoparticulado. El tamaño de las partículas de goethita está ampliamente distribuido, con partículas superparamagnéticas de aproximadamente 14 nm y una distribución muy ancha centrada en partículas de 10 nm. No se descarta la presencia de partículas con tamaños menores que 8 nm.

La pátina de estos aceros es protectora, por lo que la tasa de corrosión es muy baja, inferior a 10 $\mu\text{m}/\text{y}$. Se espera buen comportamiento durante la vida útil del puente, sin necesidad de mayores servicios de mantenimiento, pero sí de inspecciones rutinarias.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo de SENACYT por su ayuda financiera a través del proyecto FID06-227, 2006 y del Convenio UTP-MOP sobre durabilidad y comportamiento del acero del Puente Centenario.

REFERENCIAS

AASHTO. 2003. Guide Specification for Highway Bridge Fabrication with HPS 70W (HPS 485W) Steel, 2nd Edition. Washington, D.C.: American Association of State Highway and Transportation Officials.

Antunes, R.A., I. Costa & D.L. Araújo de Faria. 2003. Characterization of Corrosion Products Formed on Steels in the First Months of Atmospheric Exposure. *Materials Research*, 6(3), 403-08.

ASTM. 1997. G101-97, Standard Guide for Estimating the Atmospheric Corrosion Resistance of Low-Alloy Steels". ASTM International, Philadelphia, PA.

Azizinamini Barth, K. & C. Rubeiz. 2004. High Performance Steel: Research Front—Historical of Research Activities. *J. Bridge Eng.*, 9(3), 212-17.

Balasubramanian, R., D.C. Cook & M. Yamashita. 2002. Magnetic relaxation in nano-phase chromium substituted goethite. *Hyp. Interact.*, 139, 167-73.

Coey, J.M.D. & A.H. Morrish. 1971. A Mössbauer study of conduction in magnetite. *J. Physique*, 32, C1-271-273.

Cook, D. 2005. Spectroscopic identification of protective and non-protective corrosion coatings on steel structures in marine environments. *Corros. Sci.*, 47, 2550-70.

Cook, D.C., S.J. Oh, R. Balasubramanian & M. Yamashita. 1999. The role of goethite in the formation of the protective corrosion layer on steels. *Hyp. Interact.*, 59-70.

Cornell, R.M. & U. Schwertmann. 1996. *The Iron Oxides, Structure, Properties, Occurrence and Uses*. Weinheim FRG: VCH Verlagsgesellschaft.

Cudennec, Y. & A. Lecerf. 2006. The transformation of ferrihydrite into goethite or hematite, revisited. *J. Solid State Chem.*, 179(3), 716-22.

Davalos, J., M. Gracia, J.F. Marco & J.R. Gancedo. 1991. Corrosion of weathering steel and iron under wet—dry cycling conditions: influence of the rise of temperature during the dry period. *Hyp. Interact.*, 69, 871-74.

Davalos, J., J.F. Marco, M. Gracia & J.R. Gancedo. 1991. The corrosion products of weathering steel and pure iron in simulated wet-dry cycles. *Hyp. Interact.*, 66, 63-70.

De Grave, E. & R.E. Vandenberghe. 1986. ^{57}Fe Mössbauer effect study of well crystallized goethite ($\alpha\text{-FeOOH}$). *Hyp. Interact.*, 28, 643-46.

De la Fuente, D. et al., 2011. Long-term atmospheric corrosion of mild steel. *Corros. Sci.*, 53, 604-17.

De Souza Jr., P.A., M.C.S. Demacêdo, R.S. De Queiro & G.K. Klingelhöfer. 2002. Atmospheric Corrosion Investigation in Industrial, Marine and Rural Environments in South-East Brazil. *Hyp. Interact.*, 139/140, 183-91.

Gancedo, J.R., M. Gracia, J.E. Marco & J. Palacios. 1988. Comparative Mössbauer and SEM study of the corrosion reaction of iron and weathering steel in SO_2 -polluted atmospheres. *Hyp. Interact.*, 41, 637-40.

Goñi-Elizalde, S., M.E. Garcia-Clavel & M.I. Tejedor-Tejedor. 1987. Mechanism of akaganeite-hematite transformation via solution. *Reactivity of Solids*, 3(1-2), 139-154 doi:10.1016/0168-7336(87)80024-4.

Johnston, J.H. & D.G. Lewis. 1983. A detailed study of the transformation of ferrihydrite to hematite in an aqueous medium at 92°C. *Geochim. Cosmochim. Acta*, 47(11), 1823-31.

Kahani, S.A. & M. Jafari. 2009. A new method for preparation of magnetite from iron oxyhydroxide or iron oxide and ferrous salt in aqueous solution. *J. Magn. Magn. Mater.*, 321, 1951-54.

Kamimura, T. et al., 2006. Composition and protective ability of rust layer formed on weathering steel exposed to various environments. *Corros. Sci.*, 48, 2799-812.

Kayser, C.R., S.M. ASCE, J.A. Swanson & D.G. Linzell. 2006. Characterization of Material Properties of HPS-485W (70 W) TMCP for Bridge Girder Applications. *J. Bridge Eng.*, 11(1), 99-108.

Kihira, H. & M. Kimura. 2011. Advancements of Weathering Steel Technologies in Japan. *Corrosion*, 67(9), 095002-1-095002-13.

Kimura, M. et al., 2005. Control of $\text{Fe}(\text{O},\text{OH})_6$ nano-network structures of rust for high atmospheric-corrosion resistance. *Corros. Sci.*, 47, 2499-509.

Knese, K., P. Wartewig, C. Michalk & S. Fischer. 1999. Mössbauer effect study of the $\beta\text{-FeOOH}$ to $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ phase transformation. *Hyp. Interact.*, 94, 1999-2004.

Lair, V., H. Antony, L. Legrand & A. Chaussé. 2006. Electrochemical reduction of ferric corrosion products and evaluation of galvanic coupling with iron. *Corros. Sci.*, 48, 2050-63.

Li, Q.X., Z.Y. Wang, W. Han & E.H. Han. 2008. Characterization of the rust formed on weathering steel exposed to Qinghai salt lake atmosphere. *Corros. Sci.*, 50, 365-71.

MacDougall, C., R.G. Driver R.G. & G.Y. Grondin. 2004. A State-of-the-Art Review of High Performance Steel for Bridge Design. In Proc., 11th Colloquium on the Advancement of Research., 2004. Ministry of Transportation Québec.

Marco, J.F., J. Dávalos, J.R. Gancedo & M. Gracia. 1989. Mössbauer study of the corrosion behavior of pure iron and weathering steel under a wet-dry cycle. *Hyp. Interact.*, 46, 453-59.

Marco, J.F., J. Dávalos, M. Gracia & J.R. Gancedo. 1990. The corrosion of weathering steel by SO₂ polluted atmospheres at its very early stages. *Hyp. Interact.*, 57, 1991-96.

Mehrabi, A.B., C.A. Ligozio, A.T. Ciolko & S.T. Wyatt. 2010. Evaluation, Rehabilitation Planning, and Stay-Cable Replacement Design for the Hale Boggs Bridge in Luling, Louisiana. *J. Bridge Eng.*, 15(4), 364-72.

Miedzybrodzki, R. 2009. A critical analysis of the Second Bridge across the Panama Canal: the Centennial Bridge. In *Proceedings of Bridge Engineering 2 Conference*. Bath, 2009. University of Bath, UK.

Miki, C., K. Homma & T. Tominaga. 2002. High strength and high performance steels and their use in bridge structures. *J. Constr. Steel Res.*, 58, 3-20.

Mørup, S. 1990. Mössbauer effect in small particles. *Hyp. Interact.*, 60, 959-74.

Murad, E. & J.H. Johnston. 1987. *Mössbauer Spectroscopy Applied to Inorganic Chemistry*. New York: Plenum Press. p.526.

Nasrazadani, S. & A. Raman. 1993. Formation and Transformation of Magnetite (Fe₃O₄) on Steel Surfaces Under Continuous and Cyclic Water Fog Testing. *Corrosion*, 49(4), 294-99.

Ocampo, L.M. et al., 2006. Influence of Cu and Ni on the morphology and composition of the rust layer of steels exposed to industrial environment. *Hyp. Interact.*, 167, 739-46.

Oh, S.J., D.C. Cook, S.-J. Kwon & H.E. Townsend. 1999. Studying the atmospheric corrosion behavior of weathering steels at a mild marine environment. *Hyp. Interact.*, C4, 49-54.

Oh, S.J., D.C. Cook & H.E. Townsend. 1999. Atmospheric corrosion of different steels in marine, rural and industrial environments. *Corrosion*, 41(9), 1687-702.

Raman, A. & B. Kuban. 1988. Infrared Spectroscopic Analysis of Phase Transformation Processes in Rust Layers Formed on Weathering Steels in Bridge Spans. *Corrosion*, 44(7), 483-88.

Raman, A., B. Kuban & A. Razvan. 1991. The application of infrared spectroscopy to the study of atmospheric rust systems—I. Standard spectra and illustrative applications to identify rust phases in natural atmospheric corrosion products. *Corros. Sci.*, 32(12), 1295-306.

Raman, A. et al., 1986. Characteristics of the rust from weathering steels in Louisiana Bridge spans. *Corrosion*, 42(8), 447-55.

Schwertmann, U., J. Friedl & H. Stanjek. 1999. From Fe(III) Ions to Ferrihydrite and then to Hematite. *J. Colloid Interface Sci.*, 209(1), 215-23.

Stratmann, M., K. Bohnenkamp & H.J. Engell. 1983. An electrochemical study of phase-transitions in rust layers. *Corros. Sci.*, 23(9), 969-85.

Stratmann, M. & H. Steckel. 1990. On the Atmospheric Corrosion of Metals, which are covered with Thin Electrolyte Layers; Part 1. *Corros. Sci.*, 30, 681-96.

Stratmann, M. & H. Steckel. 1990. On the Atmospheric Corrosion of Metals, which are covered with Thin Electrolyte Layers; Part 2. *Corros. Sci.*, 30, 697-714.

Stratmann, M. & H. Steckel. 1990. On the Atmospheric Corrosion of Metals, which are covered with Thin Electrolyte Layers; Part 3. *Corros. Sci.*, 30, 715-34.

Yamashita, M. et al., 1994. The long term growth of the protective rust layer formed on weathering steel by atmospheric corrosion during a quarter of a century. *Corros. Sci.*, 36(2), 283-99.

Recibido septiembre de 2011, aceptado diciembre de 2011.



ESTRATIFICACIÓN VERTICAL DE LAS ABEJAS DE LAS ORQUÍDEAS (EUGLOSSINAE) EN UN BOSQUE TROPICAL HÚMEDO, MONTE FRESCO, CERRO AZUL, PANAMÁ

Alonso Santos Murgas.¹, Oscar Gabriel López Chong.², Ronald Ivan Sánchez Arguello³

¹Museo de Invertebrados G. B. Fairchild, Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología, Universidad de Panamá, Panamá, República de Panamá. ²Instituto Smithsonian de Investigaciones Tropicales, Laboratorio de Biología Molecular y Evolución, Panamá, República de Panamá. ³Programa Centroamericano de Maestría en Entomología, Universidad de Panamá.

e-mail:¹santosmurgasa@gmail.com,²trichenus26@gmail, ³ronaldsanchezarguello@gmail.com.

RESUMEN

Se realizaron observaciones sobre la distribución vertical de abejas euglosinas en un bosque tropical húmedo, Monte Fresco, Cerro Azul, Panamá, Panamá. Los estratos evaluados fueron: sotobosque (1.5 m), el dosel (20-25 m) la parte media entre el dosel y sotobosque (10-15 m). Un total de 963 machos pertenecientes a 22 especies ubicados en los géneros *Eufriesea*, *Euglossa* y *Eulaema* fueron capturados usando aceite de eucalipto en trampas McPhail. *Euglossa imperialis*, *Euglossa variabilis* y *Euglossa tridentata* fueron las especies más abundantes y se capturaron en todos los estratos. Se encontró diferencias significativas en la diversidad y la abundancia de abejas en los diferentes estratos del bosque; en donde el dosel mostró la mayor diversidad y abundancia. La estratificación de la vegetación en el bosques tropical húmedo de Monte Fresco crea condiciones ambientales particulares que determinan la distribución de las abejas de las orquídeas, de tal forma que algunas especies pueden encontrarse con mayor frecuencia en el dosel del bosque.

PALABRAS CLAVES

Diversidad, abundancia, aceite de eucalipto, dosel, zona media del bosque, sotobosque, *Euglossa*, *Eufriesea*, *Eulaema*.

ABSTRACT

We made observations on the vertical distribution of euglosinas orchid bees in a tropical rainforest, Monte Fresco, Cerro Azul, Panama province, Panamá. Three strata were considered: understory (up to 1.5 m), canopy (20-25 m) and mid-canopy (between the canopy and understory (10-15 m)). A total of 963 males belonging to 22 species in the genera *Eufriesea*, *Euglossa*, and *Eulaema* were captured using McPhail eucalyptus oil traps. *Euglossa imperialis*, *Euglossa variabilis* and *Euglossa tridentata* were the most abundant species and were captured in all canopy-strata. Significant differences in the diversity and abundance of bees among the different canopy strata of the forest were found; the canopy showed the greatest diversity and abundance. Stratification of vegetation in the tropical humid forests of Monte Fresco creates differential environmental conditions at each stratum that determine the distribution of orchid bees, such that some species can be found with maximum frequency in the forest.

KEYWORDS

Diversity, abundance, eucalyptus oil, canopy, middle of the forest, understory, *Euglossa*, *Eufriesea*, *Eulaema*.

INTRODUCCIÓN

En insectos tropicales, en especial aquellos que dependen de las plantas para sobrevivir, como son las abejas de las orquídeas, la altitud es una de las variables que influye en la diversidad, distribución, preferencia y abundancia de sus poblaciones; y por ende en la polinización de las orquídeas y de otras plantas que dependen de éstas poblaciones de abejas (Santos, 2009). La estratificación de la vegetación en los bosques tropicales crea condiciones ambientales particulares que determinan la distribución de los organismos asociados, de tal forma que algunas especies pueden encontrarse con mayor frecuencia en un estrato del bosque que en otros (Dowdy, 1951; Sutton *et al.*, 1983; Oliveira & Campos, 1996).

Las abejas euglosinas (Apidae, Euglossini) con sus colores llamativos y combinados, dominados por el azul y verde metálicos, representan uno de los grupos más conocidos de las abejas del Neotrópico (Cameron, 2004; Roubik & Hanson, 2004; Michener, 2007). Euglossini está compuesto por cinco géneros bien definidos: *Eufriesea*, *Euglossa*, *Eulaema*, *Aglae* y *Exaerete*. Estos cinco géneros constituyen la tribu Euglossini, que significa con lengua verdadera (Kimsey, 1987; Ramírez *et al.*, 20002; Roubik & Hanson, 2004; Santos, 2009).

Los machos de Euglossini son atraídos por compuestos aromáticos producidos por flores de Orchidaceae, Araceae, Gesneriaceae y Solanaceae; aunque también pueden coleccionar estas sustancias de hongos y troncos (Ramírez *et al.*, 2002). Propias del Neotrópico, las abejas euglosinas habitan las tierras bajas desde el nivel del mar hasta más de los 2000 m, y desempeñan un importante papel como polinizadoras de orquídeas y de otras plantas que visitan en búsqueda de néctar, polen, fragancias y resinas (Dressler, 1985).

Después de la investigación de Vogel (1966) donde determinó que los machos son atraídos por los aromas de las orquídeas y que guardaban en sus patas posteriores, han surgido investigaciones donde se utilizan compuestos químicos como atrayentes artificiales. Se ha demostrado que algunos atrayentes son más eficientes que otros, y que dependiendo del tipo de atrayente varía la respuesta de las abejas.

Algunos compuestos identificados como presentes en fragancias florales de orquídeas, tales como el acetato de benzoilo, cineol, eugenol y salicinato de metilo, son muy buenos atrayentes de euglosinas (Santos, 2009). El cineol fue utilizado por Vélez y Pulido-Barrios (2005) y el eucaliptol por Santos (2009).

Esta investigación tiene como objetivo determinar la diversidad y abundancia de especies de abejas de las orquídeas (Insecta: Hymenoptera: Apidae: Euglossinae) a través de atrayentes químicos, en tres estratos del bosque en la localidad de Monte Fresco, Cerro Azul, Panamá. Pretendemos comprobar si la diversidad y abundancia de especies de las abejas de las orquídeas (Insecta: Hymenoptera: Apidae: Euglossinae) puede estar influenciada por la distribución vertical en un bosque tropical.

METODOLOGÍA

Los muestreos fueron realizados del 24-26 de julio de 2009 y 30-31 enero 2010, en un bosque tropical húmedo localizado en los límites del Parque Nacional Chagres, en la comunidad de Monte Fresco, corregimiento de Cerro Azul, Distrito de Panamá, Provincia de Panamá. Aproximadamente a 35min de la ciudad de Panamá, con coordenadas 9°09'35.0''N, 79°24'59.4''W; 650 m.

Las abejas fueron capturadas usando nueve trampas McPhail con Aceite de Eucalipto como atrayente, las cuales se instalaron a tres diferentes alturas: 1.5 m (sotobosque), 10-15 m (zona media) y 20-25 m (dosel). Se eligieron al azar tres árboles por estrato, separados por una distancia aproximada de 60 m, para colocar las trampas a manera de péndulo.

Las trampas se dejaron por un total de nueve horas-luz durante tres días (9 h/ día). Se instalaron alrededor de las 7:00 h y fueron retiradas a las 16:00 h. Las abejas capturadas fueron colocadas en viales con alcohol al 70% y llevadas al laboratorio del Museo de Invertebrados G.B. Fairchild, de la Universidad de Panamá. Posteriormente fueron montadas en alfileres entomológicos y etiquetadas. Luego fueron identificadas con ayuda de las claves taxonómicas de Roubik y Hanson (2004). Los resultados fueron analizados estadísticamente por medio de una prueba ANOVA (análisis de varianza) para determinar si había diferencias significativas entre los estratos y dos pruebas no paramétrica: Kruskal-Wallis, para determinar la diversidad y abundancia de especies entre los tres estratos del bosque y el índice de Simpson para estimar la dominancia de especies en los estratos.

RESULTADOS

Un total de 963 especímenes (Cuadro 1) de Euglossini correspondiente a cuatro géneros y 22 especies fueron capturados en los tres estratos de estudio en la localidad de Monte Fresco, Cerro Azul. *Euglossa imperialis* (185 especímenes) y *Euglossa variabilis* (168 especímenes) fueron las especies más abundantes y se capturaron en los tres estratos. En el dosel se capturaron 385 especímenes (40% del total colectado) correspondiente a 21 especies, en el sotobosque 307 especímenes (32%) en 12 especies, y en el estrato medio 271 especímenes (28%) en 16 especies.

Cuadro 1. Especímenes de Euglossinae por estratos del bosque.

Especies de Euglossinae	Estratos del Bosque		
	Sotobosque	Zona Media	Dosel
<i>Eufriesea schmidtiana</i> Fig. 3.	0	0	11
<i>Euglossa allosticta</i>	6	39	26
<i>Euglossa bursigera</i>	0	4	8
<i>Euglossa championi</i>	0	0	5
<i>Euglossa crassipuntata</i>	4	2	16
<i>Euglossa cybelia</i> Fig. 5.	0	0	23
<i>Euglossa deceptrix</i>	3	23	14
<i>Euglossa despecta</i>	1	31	3
<i>Euglossa dissimula</i>	67	7	5
<i>Euglossa dodsonai</i>	0	3	16
<i>Euglossa dressleri</i>	0	12	6
<i>Euglossa gorgonensis</i>	0	0	12
<i>Euglossa hansonii</i>	12	19	33
<i>Euglossa heterosticta</i>	1	1	1
<i>Euglossa igniventris</i>	0	0	5
<i>Euglossa imperialis</i> Fig. 8..	83	42	60
<i>Euglossa mixta</i> Fig. 7.	24	11	19
<i>Euglossa sapphirina</i>	0	0	12
<i>Euglossa tridentata</i>	12	36	52
<i>Euglossa variabilis</i>	90	27	51
<i>Eulaema meriana</i> Fig. 6.	0	5	0
<i>Eulaema nigríta</i> Fig. 4.	4	9	7
Total por Zonas	307	271	385

La abundancia y diversidad de las especies entre estratos fue comparada usando pruebas no paramétricas. El resultado de acuerdo al análisis de varianza (ANDEVA) fue $F=0.366$, $GL=2$, $P=0.695$ y los resultados estadístico de acuerdo a la prueba Kruskal Wallis para abundancia fue ($KW=7.304$, $GL=2$, $P=0.026$) y para diversidad ($KW=48.000$, $GL=2$, $P=0.000$). El índice de Simpson fue: soto bosque 9.76; zona media 9.70 y dosel 9.72.

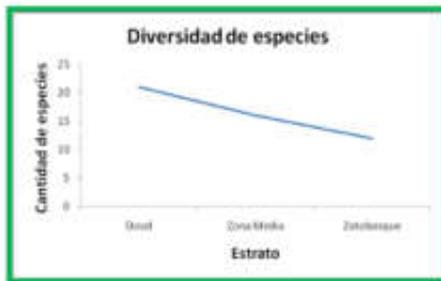


Fig. 1. Diversidad de abejas Euglossinae en los tres estratos del bosque muestreados.

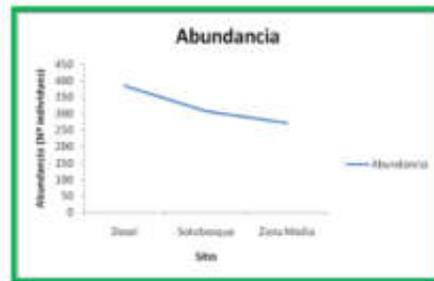


Fig. 2. Abundancia de abejas Euglossinae en los tres estratos del bosque muestreados.



Fig. 3. *Eufriesea schmidtiana*.



Fig. 4. *Eulaema nigrita*.



Fig. 5. *Euglossa cybelia*.



Fig. 6. *Eulaema meriana*



Fig. 7. *Euglossa mixta*



Fig. 8. *Euglossa imperialis*

DISCUSIÓN

La diversidad de las euglosinas es un buen indicador, no sólo de la riqueza de la comunidad de abejas, sino también de la diversidad de plantas con flores (Roubik & Hanson, 2004). Los resultados obtenidos y las pruebas estadísticas realizadas apoyan una estratificación vertical de las abejas euglosinas en el bosque de Monte Fresco tal como ha sido observado en otros bosques tropicales por Oliveira y Campos (1996); Vélez & Pulido-Barrios (2005) y Martins & De Souza (2005). Podemos observar que seis de las 22 especies se colectaron solo en el dosel del bosque, una en zona media y las otras 16 especies se colectaron en los tres estratos; lo que nos indica que la mayoría de las especies colectadas se distribuyeron en el dosel del bosque. El mismo comportamiento ocurrió en cuanto a la abundancia, es decir el número de individuos por especies también fue mayor en el dosel.

Esto resultados coinciden con los obtenidos por Roubik & Hanson (2004) y Santos (2009), que las abejas de las orquídeas se mueven en el bosque de un lugar a otro, en busca de sus recursos ya sea alimenticio o para la construcción de sus nidos. Su diversidad y abundancia están determinadas por múltiples factores como el clima, vegetación y la competencia con especies similares (Rosenzweig, 1995). También puede ser explicada por diferencia en la localización de los recursos (Braga, 1976); condiciones ambientales de cada estrato que influyen en las funciones homeostáticas de los individuos y preferencias en los sitios de nidificación (Oliveira & Campos, 1996).

Lasso *et al.* (1997), manifiestan que las abejas de las orquídeas para evitar sobrecalentarse, se valen de diferentes técnicas o estrategias de forrajeo. Ya sea forrajeando a determinadas horas del día, seleccionando las áreas de forrajeo en la sombra (sotobosque), cambiando la velocidad del vuelo y la frecuencia de descansos. Es posible que las aparentes diferencias en captura por estrato puedan deberse a simplemente a diferencias en estrategias de forrajeo.

Monte Fresco aloja el 33% (22 especies) de *Euglosa* con relación a las 65 especies reportadas para Panamá (Santos, 2009). Es probable que la representación de esta comunidad de abejas cambie a lo largo de todo el año pues muchas especies de euglosinos son altamente estacionales, por lo tanto la riqueza y la abundancia en este caso resultan ser

relativas y específicas para la época de muestreo correspondiente (Vélez & Pulido-Barrios, 2005).

Euglossa imperiales fue una de las tres especies con más individuos capturados, 185. Esta misma especie fue la más abundante en un estudio realizado en La Reserva Forestal La Tronosa, Provincia de Los Santos, República de Panamá por Santos (2009). Esto se explica, en vista que es una especie de amplia distribución que va desde México hasta Brasil, encontrándose desde tierras bajas hasta casi los 1, 800 msnm, y por ser un generalista que busca alimento en una gran variedad de especies de orquídeas (Roubik & Hanson, 2004).

Se puede concluir que las especies encontradas se distribuyeron heterogéneamente y hubo diferencias significativas en la abundancia y en la diversidad por estratos. Consideramos que la estratificación vertical de abejas de las orquídeas, influyó en la abundancia y la diversidad de las abejas en la localidad de Monte Fresco (Cerro Azul), Panamá.

REFERENCIAS

Braga, P. I. S. 1976. Atração de abelhas polinizadoras de Orchidaceae com auxílio de iscas-odores na campina, campinarana e floresta tropical úmida da região de Manaus. *Ciencia e Cultura* 28(7): 767-773.

Cameron, S A. 2004. Phylogeny and biology of the neotropical orchid bees (Euglossini). *Annual Review Entomology* 49: 377-404.

Martins, C. F. & A. K. P. De Souza. 2005. Estratificao vertical de abelhas Euglossinae (Hymenoptera: Apidae) em uma área de Mata Atlantica, Paraiba, Brasil. *Revista Brasileira de Zoologia* 22(4): 913-918.

Dressler, R L. 1985. Euglossine bees (Hymenoptera: Apidae) of the Tambopata reserved zone, Madre de Dios, Perú. *Revista Peruana de Entomologia* 27: 75-79.

Dowdy, W.W. 1951. Further ecological studies on stratification of the Arthropoda. *Ecology* 32(1): 37-52.

Kimsey, L.S. 1987. Generis relationship within the Euglossini (Hymenoptera: Apidae). *Systematic Entomology* 12: 63-72.

Lasso, E., P. Ortiz, F. Villalobos. 1997. Influencia de la temperatura y humedad en la distribución vertical de abejas de la subfamilia Euglossini. *Course Book*. 71-73 pp.

Michener, C. D. 2007. *The bees of the world*, second edition. Johns Hopkins University Press, Baltimore, xvi+953pp.

Oliveira, M. L. & L. A. Campos. 1996. Preferencia por estratos florestais e por substancias odoríferas em abelhas euglossinae (Hymenoptera, Apidae). *Revista Brasileira de Zoologia*. 13(4): 1075-1085.

Ramírez, S., R. L. Dressler & M. Ospina. 2002. Abejas euglosinas (Hymenoptera: Apidae) de la Región Neotropical: Listado de especies con notas sobre su biología. *Biota Colombiana* 3(1):7-118.

Rosenzweig, M. 1995. *Species diversity in space and time*. New Cork: Cambridge University Press, 436 pp.

Roubik, D.W. & E. P. Hanson. 2004. *Abejas de orquídeas de la América tropical: Biología y guía de campo / Orchid bees of tropical America: Biology and field guide*. 1 ed. Instituto Nacional de Biodiversidad, INBio, Heredia, Costa Rica. 370 pp.

Santos Murgas, A. 2009. Contribución al conocimiento de las abejas Euglossini (Hymenoptera: Apidae) y la utilización de dos atrayentes químicos, en la Reserva Forestal La Tronosa, provincia de Los Santos, Panamá. 77-81pp. En: *Evaluación de la Biodiversidad en la Reserva Forestal la Tronosa, provincia de Los Santos, Panamá. Resultados Finales 2005-2008*. Proyecto PROBIO-Universidad de Panamá, Agencia de Cooperación Internacional del Japón.

Sutton, S. L., C. P. Ash & A. Grundy. 1983. The vertical distribution of flying insects in lowland rain-forest of Panama, Papua, New Guinea and Brunei. *Zoological Journal of the Linnaeus Society* 78: 287-297.

Vélez, D. & H. Pulido-Barrios. 2005. Observaciones sobre la estratificación vertical de abejas Euglosinas (Apidae:Euglossini) en un bosque ripario de la orinoquia colombiana. *Caldasia* 27(2): 267-270.

Voguel, S. 1966. Parfumsammelnde vieren als bestauber von orchidaceen und *Gloxina*. *Oesterreichische Botanische Zeitschrift* 113: 302-361.

Recibido agosto de 2011, aceptado enero de 2012.



UTILIZACIÓN DE ASOCIACIONES DE MACROINVERTEBRADOS POTENCIALMENTE INDICADORAS (API's) PARA DISCRIMINAR AGUAS DE DIFERENTE CALIDAD

Yolanda Aguila S.¹ y Alexis N. García

¹Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Zoología; Vicerrectoría de Investigación y Postgrado, Programa Centroamericano de Maestría en Entomología.

RESUMEN

El estudio se realizó en las QBDA. Ancha y Limón y los ríos Chilibre y Chilibrillo, en el punto en que cruzan la Transistmica, de septiembre de 1999 a mayo de 2000. En cada sitio se estableció una estación de 25 metros de longitud y durante 9 meses se colectaron tres muestras de paquetes de hojarasca ('leafpacks'). En esta sección del estudio nos propusimos utilizar Asociaciones de Macroinvertebrados Potencialmente Indicadoras (API's) tales como CHIRO, EPT, MOL, HOT, DEP, para discriminar aguas superficiales con diferente calidad. En QBDA. Ancha se observó dominancia de CHIRO, MOL y HOT, en cambio, en Qbda. Limón, Chilibrillo y Chilibre dominaron CHIRO, EPT y DEP. El Análisis Jerárquico de Conglomerados (Cluster) mostró que la mayor similitud taxocenótica se evidenció entre Chilibre y Chilibrillo, siendo Qbda. Ancha la más diferente. El análisis con los datos físico-químicos mostró igual patrón.

PALABRAS CLAVES

Macroinvertebrados, indicadores biológicos, calidad del agua, taxocenótico.

ABSTRACT

The study was developed in four contrasting streams (Qbda. Ancha, Qbda. Limón, Chilibre, Chilibrillo), during the period September 1999 – may 2000, in order to use 'Asociaciones Potencialmente Indicadoras, API's ('Potentially Indicator Associations' e.g. CHIRO, EPT, MOL, HOT) to discriminate streams with different

water quality. A 25m long study site, was established in each stream, where three leaf packs were taken monthly. Samples from Qbda. Ancha were dominated by CHIRO, MOL, HOT, whereas Qbda. Limon, Chilibrillo, and Chilibre by CHIRO, EPT, and DEP. Cluster analyses showed that Chilibrillo and Chilibre were the most similar sites in taxocenotic terms, though Qbda. Ancha was the most different. Similar pattern was shown when using physico-chemical data.

KEYWORDS

Macroinvertebrates, biological indicators, water quality, taxocenotic.

INTRODUCCIÓN

La utilización de los organismos vivos como indicadores biológicos data de hace más de 100 años (Cairns & Pratt, 1993) y en las últimas décadas el uso de los macroinvertebrados bentónicos (asociados a sustrato), como indicadores de contaminación en los sedimentos de ríos y lagos, ha sido notoria (Canfield *et al.*, 1995). Esto es así porque la distribución espacial y temporal así como la identidad de los organismos está relacionada con la calidad del agua. Inclusive, estos organismos responden a cambios bruscos del ambiente (deficiencia de oxígeno, químicos, falta de alimento) con cambios de conducta tan obvios como la deriva (Waters, 1972; Brittain & Eikeland, 1988). Esto último permite detectar, fácilmente, cambios bruscos en el ecosistema acuático.

Diferentes tendencias se han observado en cuanto a la utilización de los macroinvertebrados para evaluar la calidad del agua, algunos investigadores se orientaron a considerar 'especies indicadoras' (Kolkwitz & Marsson, 1908, 1909 citado en Cairns & Pratt, 1993) otros idearon 'Índices Biológicos' (Kerans & Karr, 1994; Alba-Tercedor & Sánchez-Ortega, 1988; Zamora-Muñoz & Alba-Tercedor, 1996) y todos aquellos enfoques que han sido útiles han sido sustentados por un amplio conocimiento de la biología, ecología y taxonomía de los grupos escogidos.

En Panamá, se han utilizado 'índices' variados tales como un índice multimétrico o IBI (PMCC, 2000), el BMI Ranking Score (Harrington, 2001), el BMWP / Colombia, Costa Rica (Sánchez-Arguello, 2008), el

BMWP/Veraguas (Rodríguez *et al.*, 2009), el BMWP/PAN (Cornejo, 2010) y en el periodo 2004-2006 durante el desarrollo de el Proyecto PROTEMOCA (ANAM-JICA) se consideraron el PIM o 'Pollution Index Method' (Tsuda, 1972 citado en Fukushima, 2004) y el BIM o 'Biotic Index Method' (Beck & Tsuda, 1960 citado en Fukushima, 2004).

Esta investigación se orientó principalmente hacia la utilización de Asociaciones de Macroinvertebrados Potencialmente Indicadoras (API's) según Aguila 2001, para discriminar biológicamente, aguas superficiales con condiciones ambientales diferentes. Se esperaba que ambientes contrastantes (físico y químicamente) pudieran ser reflejados por asociaciones de macroinvertebrados específicos.

ÁREA DE ESTUDIO

El estudio se realizó en los ríos Chilibre y Chilibrillo (Corregimiento de Chilibre, Provincia de Panamá) y las Quebradas Ancha y Limón (Corregimiento de Nuevo San Juan, Colón) desde septiembre de 1999 a mayo de 2000, en el punto en que cruzan la carretera Transistmica. Estos sitios habían sido utilizados por el Proyecto de Monitoreo de la Cuenca del Canal (PMCC, 1999, 2000) y se contaba con algunos datos que permitían contrastarlos física y químicamente.

MÉTODOS

En cada estación y por nueve meses, se colectaron tres paquetes de hojarasca ('leaf packs'). Cada muestra de hojarasca llenaba aproximadamente 3/4 de una bolsa plástica de 8" x 7". Las muestras fueron procesadas (limpieza de sedimento, separación de organismos) en los laboratorios del Programa Centroamericano de Maestría en Entomología de la Universidad de Panamá. Los organismos fueron identificados al nivel morfoespecie, familia o clase dependiendo del grupo de macroinvertebrados y las horas/hombre que se utilizaban para la identificación de cada uno. Se utilizó bibliografía especializada diversa para la identificación de los distintos grupos taxonómicos (Merritt & Cummins, 1996; Edmunds, 1976; Pennak, 1989; Wiggins, 1977, 1996).

Para el análisis total de macroinvertebrados se utilizaron seis (6) de las nueve colectas o sea un total de 72 muestras obtenidas en el período septiembre-febrero. En el mes de enero se colectaron muestras el 7 y el 31 lo cual hemos definido como Enero1 y Enero2. Se consideraron las 'Asociaciones Potencialmente Indicadoras' (API's, según Aguila 2001) para comparar los sitios. Estas fueron definidas a priori, como EPT (Ephemeroptera + Plecoptera + Trichoptera), CHIRO (Chironomidae), MOL (Mollusca), DEP (Depredadores = Odonata + Coleoptera + Hemiptera) y HOT (Hirudinea + Oligochaeta + Turbellaria).

RESULTADOS

En QBDA. Ancha se observó una clara dominancia de CHIRO (277), MOL (207) y HOT (67) concentrándose éstos en las colectas de enero-2 y febrero. Al comparar los cinco grupos, en términos de porcentaje, por mes de colecta, observamos que en cuatro de los seis meses de estudio se presentó mayor porcentaje de CHIRO, en cambio en enero1 y febrero se presentó mayor porcentaje de DEP y MOL, respectivamente (Fig. 1a).

Por el contrario, en QBDA. Limón dominaron CHIRO (2,940), EPT (2,160) y DEP (200), observándose que más del 75% de los individuos se colectaron en la estación seca (ene-1, ene-2, feb). Con relación al porcentaje de cada grupo, por mes de estudio, se observó que EPT y CHIRO presentan un mayor porcentaje durante los seis meses, presentando dichos grupos una tendencia inversa (Fig.1b).

Coincidentalmente, en Chilibrillo también dominaron CHIRO (598), EPT (413) y DEP (83), siendo notorio el mayor porcentaje de CHIRO (88%) y EPT (70%) en la estación seca. Al analizar la representación porcentual de cada grupo, por mes, observamos que en Chilibrillo ésta es más heterogénea que en Qbda. Limón, notándose que hay representatividad de DEP principalmente en septiembre y octubre y de HOT en los tres últimos meses de estudio (Fig.1c).

En Chilibre, se repite la dominancia de CHIRO (3,499), EPT (1,461) y DEP (175) con más del 84% de los individuos colectados en la estación seca. Cuando verificamos el porcentaje de cada grupo, por

mes, en Chilibre observamos que en cuatro de los seis meses de estudio la mayor representación porcentual correspondió a CHIRO y EPT notándose nuevamente la tendencia inversa en estos dos grupos (Fig.1d). En síntesis, EPT, CHIRO y DEP fueron notorios en Qbda. Limón y Chilibre, en cambio MOL y HOT se presentaron principalmente en Qbda. Ancha y Qbda. Limón.

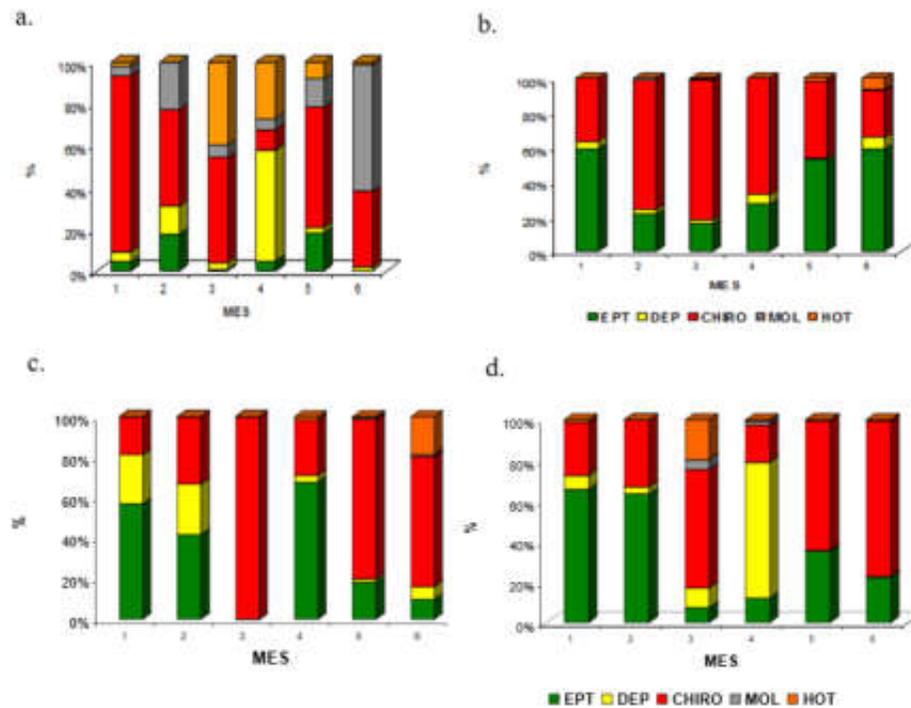


Fig.1. Asociaciones Potencialmente Indicadoras API's (%) para a) QBDA. Ancha, b) QBDA. Limón, c) Chilibrillo, d) Chilibre, de septiembre 1999 – febrero 2000 (n = 6/sitio, 72 total). EPT = Ephemeroptera + Plecoptera + Trichoptera, DEP = Depredadores, CHIRO = Chironomidae, MOL = Mollusca, HOT = Hirudinea + Oligochaeta + Turbellaria.

En ambos enfoques para el análisis jerárquico (insectos u otros macroinvertebrados) los sitios con mayor similitud (cuantitativamente: Sorenson, Morisita) en términos taxocenóticos (taxa, familia, género) fueron Chilibrillo y Chilibre. Qbda. Ancha es considerablemente diferente de los otros sitios para ambos análisis (más de 100 en distancia de unión en el cluster) Fig. 2a y 2b. Resultados semejantes mostró el análisis con los datos físico-químicos disponibles (Fig.2c, 2d).

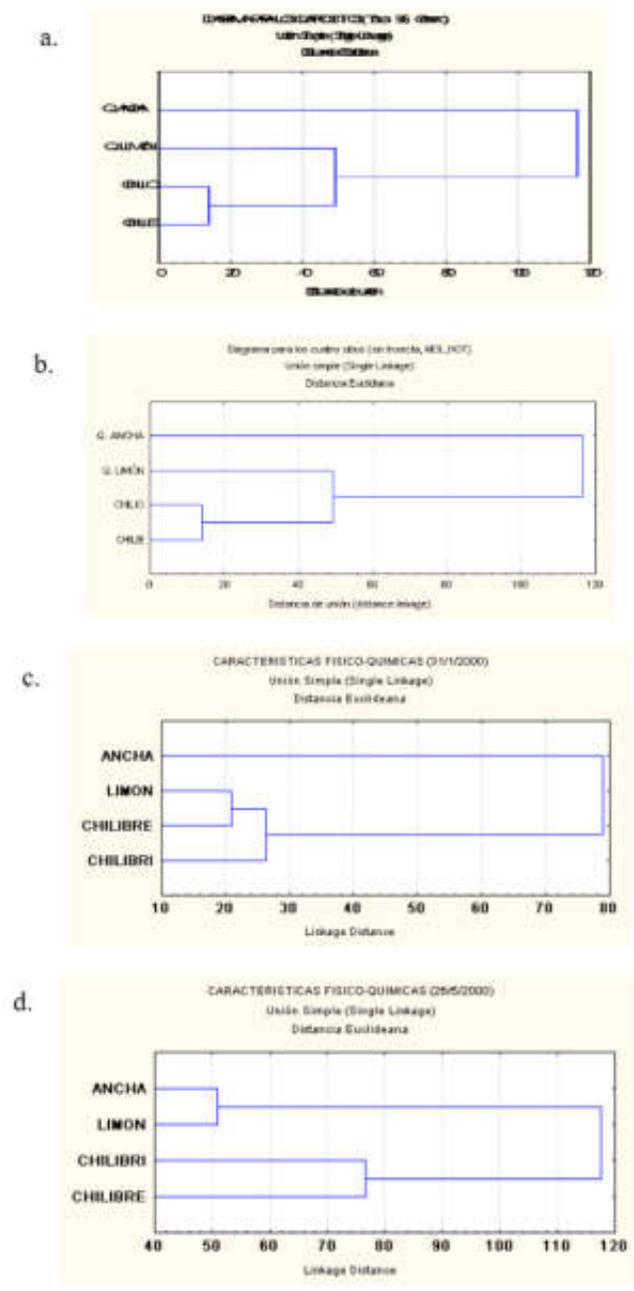


Fig.2. Análisis Jerárquico (Cluster) para a) Datos de insectos acuáticos ('género'); b) Otros macroinvertebrados (MOL.HOT); c) Datos fisico-químicos (mg/l) 31/1/2000; d) Datos fisico-químicos (mg/l) 26/5/2000.

DISCUSIÓN

La utilización de los macroinvertebrados acuáticos como indicadores de calidad del agua es ampliamente conocida (Rutt *et al.*, 1989) de allí que parte del análisis de los datos de este estudio tomara en consideración Asociaciones de Macroinvertebrados Potencialmente Indicadoras (CHIRO, MOL, HOT, DEP) que en alguna forma representaban hábitos de vida muy particulares y que su abundancia podría ser relacionada con algunas variables fisicoquímicas específicas.

La evidente dominancia de CHIRO (Chironomidae), MOL (Mollusca) y HOT (Hirudinea, Oligochaeta, Turbellaria) y la pobre representación de EPT (Ephemeroptera, Plecoptera, Trichoptera) es indicativa de condiciones muy particulares en Qbda. Ancha, condiciones fisicoquímicas y por que no biológicas, que ya se han discutido anteriormente (García, 2004, Aguila, 2005a).

La mayoría de los Hirudinea (sanguijuelas) son depredadores de quironómidos, oligoquetos, anfipodos y moluscos, aunque algunos se alimentan de zooplancton. Otros en cambio se alimentan de sangre cuando son ectoparásitos de peces, tortugas, anfibios u ocasionalmente el hombre. Utilizarlos individualmente para discriminar entre muestras podría aportar poca información puesto que presentan gran plasticidad fisiológica que les permite vivir en hábitats de gran diversidad fisicoquímica, incluso en condiciones de anoxia o agua supersaturada (hiperoxia), además sería necesario identificarlos a un nivel taxonómico más específico. De hecho un factor que pudo haber influido en la presencia de sanguijuelas fue la fuente de alimento para ellas y posiblemente la deficiencia de macrodepredadores (peces) que se pudieran alimentar de ellas (Davies, 1991).

Por otro lado, los moluscos de agua dulce presentan muchas adaptaciones para hábitats efímeros o relativamente inestables lo cual es posible debido a extensas variaciones interespecíficas, ciclo de vida, productividad, morfología y hábitos de vida, cualidad que es denominada por Russell-Hunter (1978) como plasticidad adaptativa. Las familias como Ancyliidae (Pulmonata acuático) y Thiaridae (Prosobranchia) pertenecen a subclases realmente contrastantes, los primeros son monoicos con fuerte poder de dispersión pasiva (aves,

insectos) y rápido crecimiento; los segundos, más primitivos, son dioicos con ciclo de vida más largo (Brown, 1991). De acuerdo con Calow (1973 a y b) los Ancyliidae son considerados como comedores de perifiton y periliton prefiriendo las diatomeas. No sería de extrañar que los Ancyliidae y los Thiaridae pudieran estar ocupando nichos relativamente distintos toda vez que cuentan con diferencias morfológicas en la rádula de ambos grupos.

La evidente abundancia de CHIRO, EPT y DEP en los otros sitios de estudio nos puede indicar cambios drásticos en las condiciones microambientales disponibles para los macroinvertebrados. Aunque es conveniente resaltar que en un futuro sería más adecuado utilizar la asociación ET (Ephemeroptera-Trichoptera) en vez de EPT toda vez que es ampliamente conocida la poca variabilidad de las familias de Plecoptera en los Trópicos.

Con relación a la asociación CHIRO (Chironomidae), es evidente que la utilización del nivel taxonómico de familia pudiera enmascarar una gran cantidad de información valiosa para deducir las condiciones ambientales propias de cada sitio. Afortunadamente en un estudio paralelo, Pardo (2002) hizo el análisis de la comunidad de Chironomidae a nivel de morfoespecie lo cual permitió establecer otras relaciones interesantes. Es importante resaltar que Brown et al. (1997) y Aguila (1998) también lograron discriminar quebradas intermitentes afectadas por diferentes prácticas silviculturales utilizando sólo la asociación de los Chironomidae, a nivel de género, lo cual apoya nuestra propuesta para utilizar asociaciones específicas de macroinvertebrados para diferenciar sitios perturbados.

La similitud taxocenótica entre Chilibrillo y Chilibre pudieran ser explicados en función de la semejanza en cuanto a la riqueza (45 vs 51) de macroinvertebrados lo cual permitiría mayor coincidencia en cuanto a los taxa presentes en ambos sitios. Además, la gran incidencia de Chironomidae pudiera estar separándolos del otro par constituido por QBDA. Ancha y QBDA. Limón. La figura del Cluster se constituye en una ayuda visual para entender mejor los resultados de los análisis de similitud. Vale la pena resaltar que física y químicamente, estos dos ríos son más parecidos si los comparamos con las dos quebradas estudiadas. Además, las condiciones

geomorfológicas así como el tipo de ribera, podrían estar influyendo también en el tipo de comunidad de macroinvertebrados.

CONCLUSIONES

La utilización del análisis considerando las Asociaciones Potencialmente Indicadoras (API's) permitió discriminar cualitativamente a QBDA. Ancha y QBDA. Limón entre sí y de los otros dos sitios. Fue evidente la heterogeneidad de grupos observada en QBDA. Ancha y la presencia notoria de los Chironomidae (CHIRO), Mollusca (MOL) Hirudinea-Oligochaeta-Turbellaria (HOT) en este sitio. Por otro lado, se evidenció la relación inversa entre CHIRO y EPT en Qbda. Limón, a lo largo del estudio y se evidenció una comunidad más homogénea en este sitio.

El análisis jerárquico (Cluster) permitió evidenciar la similitud taxocenótica entre Chilibrillo y Chilibre y separar gradualmente, a Qbda. Limón y Qbda. Ancha. Nuevamente hay indicación de que en Qbda. Ancha y Limón hay comunidades contrastantes con las de Chilibrillo y Chilibre lo cual también se evidencia con el cluster de datos fisico-químicos.

REFERENCIAS

Aguila, Y. 1998. Effects of Forestry Practices on Stream Ecosystems. Ph.D Dissertation, Arkansas University, USA.

Aguila, Y. 2001. Comparación físico, química y biológica de cuatro quebradas ubicadas en el eje de la Transistmica. Resúmenes. Semana de la Biota Acuática y Medio Ambiente, XIII Foro del Agua, 13-17 de agosto de 2001, Universidad de Panamá.

Aguila, Y. 2005a. 'Macroinvertebrados acuáticos como indicadores de la calidad del agua en sitios selectos de la Cuenca del Canal'. Informe de Investigación para la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado de la Universidad de Panamá (VIP No.01-04-00-03-98-40).

Alba-Tercedor, J. & A. Sánchez-Ortega. 1988. Un método rápido y simple para evaluar la calidad biológica de las aguas corrientes basado en el de Hellawell (1978), *Limnética* 4:51-56.

- Brittain, J.E. & T.J. Eikeland. 1988. Invertebrate drift-A review. *Hydrobiologia* 166:77-93.
- Brown, K.M. 1991. Chapter 10. Mollusca: Gastropoda. Páginas 285-314 en J.H. Thorp y A.P. Covich (eds.) *Ecology and Classification of North American Freshwater Invertebrates*. Academic Press.
- Brown, A., Y. Aguila & K. Brown. 1997. Responses of benthic macroinvertebrates in small intermittent streams to silvicultural practices. *Hydrobiologia* 347: 119 - 125.
- Cairns, J.Jr. & J.R. Pratt. 1993. Capítulo 2: A history of biological monitoring using benthic macroinvertebrates. Páginas 10-27 en: D.M. Rosenberg y V.H. Resh (eds.) *Freshwater biomonitoring and benthic macroinvertebrates*. New York, Chapman y Hall.
- Calow, P. 1973a. Field observations and laboratory experiments on the general food requirements of two species of freshwater snail, *Planorbis contortus* (Linn.) and *Ancylus fluviatilis* Mull. *Proceedings of the Malacological Society of London* 40: 483-489.
- Calow, P. 1973b. The food of *Ancylus fluviatilis* (Mull), a littoral, stone dwelling herbivore. *Oecologia* 13: 113-133.
- Canfield, T.J., F.J. Dwyer, J.F. Fairchild, C.G. Ingersoll & N.E. Kemble. 1995. Using an integrated field and laboratory approach for assessing contaminated sediments. Páginas 1-31 en: *The use of benthic ecology in assessing sediment contamination*. Eighth Annual NABS Technical Information Workshop, Keystone, Colorado.
- Cornejo R., A. 2010. Macroinvertebrados acuáticos bioindicadores de la calidad del agua en Panamá: Propuesta de Índice BMWP/PAN. Reunión especial: Macroinvertebrados dulceacuícolas en Mesoamérica (MADMESO), 15-19 de junio, 2010, Villahermosa, Tabasco, Méjico.
- Davies, R.W. 1991. Chapter 13. Annelida: Leeches, Polychaetes, and Acanthobdellids. Páginas 437-479 en J.H. Thorp y A. Covich (eds.) *Ecology and classification of North American Freshwater Invertebrates*. Academic Press.

Edmunds, G.F. Jr., S.L. Jensen & L. Berner. 1976. The Mayflies of North and Central America. University of Minnesota Press.

Fukushima, K. 2004. Taller Teórico Práctico de Biología del Agua (Insectos acuáticos) 20 de septiembre al 1 de octubre de 2004. Proyecto PROTEMOCA, ANAM-JICA.

García, A. 2004. Estudio sobre la comunidad de macroinvertebrados acuáticos asociados a hojarasca, en ecosistemas lóticos contrastantes. Tesis de Licenciatura, Universidad de Panamá, 137 pags.

Harrington, J. 2001. ACP-STRI Biological Survey of Western Panama Canal. Manuscrito.

Kerans, B.L. & J.R. Karr. 1994. A benthic index of biotic integrity (B-IBI) for rivers of the Tennessee Valley. *Ecological Applications* 4 (4): 768-785.

Merritt, R.W. & K.W. Cummins (Eds.). 1996. An Introduction to the Aquatic Insects of North America, 3rd. Edition, Kendall/Hunt, Dubuque, IA.

Pardo, J. 2002. Estudio comparativo de la comunidad de Chironomidae (Diptera) en ríos contrastantes en el eje de la Transistmica, Corregimientos de Chilibre y Nuevo San Juan. Tesis de Maestría en Entomología, V.I.P., Universidad de Panamá. 85 pp.

Pennak, R.W. 1989. Fresh-Water Invertebrates of the United States. Third Edition. John Wiley & Sons, Inc.

Proyecto Monitoreo de la Cuenca del Canal (PMCC) 1999. Reporte Anual Técnico. USAID-ANAM-STRI, Panamá.

Proyecto Monitoreo de la Cuenca del Canal (PMCC) 2000. Informe Final. The Louis Berger Group.

Rodríguez, V., N. Robles & Y. Pimentel. 2009. Calidad biológica del agua de los ríos Sábalo, Piña, Ponuga, Pocrí y Suay, en la Provincia de Veraguas, Panamá. *Tecnociencia* 11 (1): 75-89.

Russell-Hunter, W.D. 1978. Ecology of freshwater pulmonates. Páginas 335-383 en: V. Fritter & J. Peake (eds.) The Pulmonates: Systematics, evolution and ecology. Academic Press.

Rutt, G.P., N.S. Weatherley & S.J. Ormerod. 1989. Microhabitat availability in Welsh moorland and forest streams as a determinant of macroinvertebrates distribution. *Freshwater Biology* 22: 247-261.

Sánchez-Arguello, R.I. 2008. Diversidad y estructura de la comunidad de insectos acuáticos en el río Capira, Panamá. Tesis de Maestría, Univ. De Panamá. 109 pag.

Waters, T.F. 1972. The drift of stream insects. *Annual Review of Entomology* 17:253-272.

Wiggins, G.B. 1977. Larvae of the North American Caddisfly Genera (Trichoptera). University of Toronto Press.

Wiggins, G.B. 1996. Trichoptera families. Páginas 309-349 en: R.W. Merritt / K.W. Cummins (eds.) An Introduction to the Aquatic Insects of North America. Kendall/Hunt Pub. Co.

Zamora-Muñoz, C. & J. Alba-Tercedor. 1996. Bioassessment of organically polluted Spanish rivers, using a biotic index and multivariate methods. *J.N.Am.Benthol.Soc.*, 15 (3): 332-352.

Recibido septiembre de 2010, aceptado enero de 2012.